ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2022(2023)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2022(2023)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2022(2023)

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 T I

பகுதி B

※ ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (a) $0<|p|<1$ எனக் கொள்வோம். சமன்பாடு $p^2x^2-2x+1=0$ இற்கு வேறுவேறான மெய்ம் மூலங்கள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக.

இம்மூலங்கள் $\alpha, \beta\,(>\alpha)$ எனக் கொள்வோம். α, β ஆகிய இரண்டும் நேரெனக் காட்டுக.

$(\alpha-1)(\beta-1)$ ஆகியவற்றை p இற் கண்டு, $\alpha<1$ எனவும் $\beta>1$ எனவும் உய்த்தறிக.

$\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}=\frac{1}{|p|}\sqrt{2(1-|p|)}$ எனக் காட்டுக.

$\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}=\frac{1}{|p|}\sqrt{2(1+|p|)}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$|\sqrt{\alpha}-1|, |\sqrt{\beta}-1|$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு

$|p|x^2-\sqrt{2(1-|p|)}x+\sqrt{2(1+|p|)}-|p|-1=0$ எனக் காட்டுக.

(b) $p(x)=2x^3+ax^2+bx-4$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a, b\in\mathbb{R}$ ஆகும். $(x+2)$ ஆனது $p(x), p'(x)$ ஆகிய இரண்டினதும் ஒரு காரணியெனத் தரப்பட்டுள்ளது; இங்கு $p'(x)$ ஆனது x ஐக் குறித்து $p(x)$ இன் பெறுதியாகும். a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. a, b ஆகியவற்றின் இப்பெறுமானங்களுக்கு $p(x)-3p'(x)$ ஐ முற்றாகக் காரணிப்படுத்துக.

12. (a) ஒவ்வொரு மாணவனுக்கும் குறைந்தபட்சம் ஒரு பழமேனும் கிடைக்கத்தக்கதாக, ஆறு மாம்பழங்களையும் நான்கு தோடம்பழங்களையும் எட்டு மாணவர்களிடையே, பகிர்ந்து கொள்ள வேண்டியுள்ளது.

(i) ஆறு மாணவர்களுக்கு ஒரு பழம் வீதமும் எஞ்சியுள்ள இரு மாணவர்களில் ஒரு மாணவனுக்கு இரு மாம்பழங்களும் மற்றைய மாணவனுக்கு இரு தோடம்பழங்களும்

(ii) ஏழு மாணவர்களுக்கு ஒரு பழம் வீதமும் மற்றைய மாணவனுக்கு மூன்று மாம்பழங்களும்

(iii) ஏழு மாணவர்களுக்கு ஒரு பழம் வீதமும் மற்றைய மாணவனுக்கு மூன்று பழங்களும்

கிடைக்கும் வெவ்வேறு விதங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(b) $r\in\mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r=\frac{4(2r+7)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}$ எனக் கொள்வோம். அத்துடன் $r\in\mathbb{Z}^+$ இற்கு $f(r)=\frac{A}{(2r+1)}+\frac{B}{(2r+3)}$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு A, B ஆகியன மெய்ம் மாறிலிகளாகும். $r\in\mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r=f(r)-f(r+1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைத் துணிக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $n\in\mathbb{Z}^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^{n}U_r=\frac{4}{5}-\frac{3}{2n+3}+\frac{1}{2n+5}$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty}U_r$ ஒருங்குகின்றது என்பதை உய்த்தறிந்து, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $\sum_{r=1}^{\infty}(U_r+kU_{r+1})=1$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக மெய்ம் மாறிலி k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

[பக். 8 ஐப் பார்க்க

13. (a) $A = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம்; எல்லா $a \in \mathbb{R}$ இற்கும் A^{-1} இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ஆகிய தாயங்கள் $A = PQ^T + R$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ளன. $a = 1$ எனக் காட்டுக.

a இன் இப்பெறுமானத்திற்கு A^{-1} ஐ எழுதி, இதிலிருந்து, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(b) $z, w \in \mathbb{C}$ எனக் கொள்வோம். $z\bar{z} = |z|^2$ எனக் காட்டி, இதிலிருந்து, $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$ எனக் காட்டுக.

$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$ என்பதை உய்த்தறிந்து, ஆகண் வரிப்படத்தில் $z, w, 0$ ஆகியவற்றை வகைகுறிக்கும் புள்ளிகள் ஒரேகோட்டில் இல்லாதபோது இதற்கு ஒரு கேத்திரகணித விளக்கத்தைத் தருக.

(c) $z = -1 + \sqrt{3}i$ எனக் கொள்வோம். z ஐ வடிவம் $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $r > 0$ உம் $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ உம் ஆகும்.

$n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $z^n = a_n + ib_n$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ ஆகும். $m, n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\mathrm{Re}\left(z^m \cdot z^n\right)$ ஐ a_m, a_n, b_m, b_n ஆகியவற்றில் எழுதுக.

z^{m+n} ஐக் கருதி, த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, $m, n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $a_m a_n - b_m b_n = 2^{m+n}\cos(m+n)\frac{2\pi}{3}$ எனக் காட்டுக.

14. (a) $x \neq -2$ இற்கு $f(x) = \frac{2x+3}{(x+2)^2}$ எனக் கொள்வோம்.

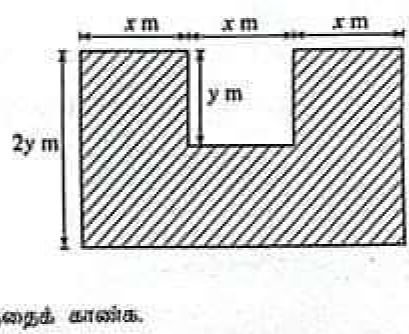
$f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $x \neq -2$ இற்கு $f'(x) = \frac{-2(x+1)}{(x+2)^3}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக. இதிலிருந்து, $f(x)$ அதிகரிக்கும் ஆயிடையையும் $f(x)$ குறையும் ஆயிடைகளையும் காண்க. அத்துடன், $f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

$x \neq -2$ இற்கு $f''(x) = \frac{2(2x+1)}{(x+2)^4}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $y = f(x)$ இன் வரைபின் விபத்திப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

அணுகுகோடுகள், திரும்பற் புள்ளி, விபத்திப் புள்ளி ஆகியவற்றைக் காட்டி, $y = f(x)$ இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

$[k, \infty)$ மீது $f(x)$ ஒன்றுக்கொன்றாக இருக்கும் k இன் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தை எடுத்துரைக்க.

(b) படத்திற் காட்டப்பட்ட நிழற்றிய பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $45\ \mathrm{m}^2$ ஆகும். இது நீளம் $3x$ m ஐயும் அகலம் $2y$ m ஐயும் உடைய ஒரு செவ்வகத்திலிருந்து நீளம் x m ஐயும் அகலம் y m ஐயும் உடைய ஒரு செவ்வகத்தை அகற்றுவதனால் பெறப்பட்டுள்ளது. நிழற்றிய பிரதேசத்தின் சுற்றளவு L m ஆனது $x > 0$ இற்கு $L = 6x + \frac{54}{x}$ இனால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.



L குறைந்தபட்சமாக இருக்கத்தக்கதாக x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

[பக். 9 ஐப் பார்க்க

15. (*a*) எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $x^2+x+2=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B, C ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $\dfrac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாக எழுதி, $\displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$ ஐக் காண்க.

(*b*) $1+\sin 2x = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ எனக் காட்டி, இதிலிருந்து, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x = 1$ எனக் காட்டுக.

(*c*) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\cos 2x}{(1+\sin 2x)^2}\,\mathrm{d}x$ எனக் கொள்வோம். பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி, $I=-\dfrac{\pi^2}{8}+J$ எனக் காட்டுக; இங்கு $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$.

தொடர்பு $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$ ஐயும் (*b*) இல் உள்ள பேறையும் பயன்படுத்தி J இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு, $I=\dfrac{\pi}{8}(2-\pi)$ எனக் காட்டுக.

16. $P \equiv (x_0, y_0)$ எனவும் l ஆனது $ax+by+c=0$ இனால் தரப்படும் நேர்கோடு எனவும் கொள்வோம். P இலிருந்து l இற்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரம் $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ எனக் காட்டுக.

l_1, l_2 ஆகியன முறையே $4x-3y+8=0, 3x-4y+13=0$ ஆகியவற்றினால் தரப்படும் இரு நேர்கோடுகளெனக் கொள்வோம். l_1 உம் l_2 உம் $A\equiv(1,4)$ இல் இடைவெட்டுகின்றனவெனக் காட்டுக.

l_1 இற்கும் l_2 இற்குமிடையே உள்ள கூர்ங்கோணத்தின் இருகூறாக்கியின் பரமானச் சமன்பாடுகளை $x=t$, $y=t+3$ என எழுதலாம் எனவும் காட்டுக; இங்கு $t\in\mathbb{R}$.

இதிலிருந்து, l_1, l_2 ஆகிய இரு கோடுகளையும் தொடுவதும் l_1 இற்கும் l_2 இற்குமிடையே கூர்ங்கோணம் அடங்கும் பிரதேசத்தில் இருப்பதுமான வட்டம் எதனதும் சமன்பாடு $(x-t)^2+(y-t-3)^2=\dfrac{1}{25}(t-1)^2$ இனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக; இங்கு $t\in\mathbb{R}, t\neq 1$.

மேற்குறித்த வட்டங்களிடையே A ஐ மையமாகக் கொண்டதும் ஆரை 1 ஐ உடையதுமான வட்டத்தை நிமிர்கோணமுறையாக இடைவெட்டும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

17. (*a*) $\cos(A+B)$ ஐ $\cos A, \cos B, \sin A, \sin B$ ஆகியவற்றில் எழுதி, $\sin(A-B)$ இற்கு ஓர் இயல்பொத்த கோவையைப் பெறுக.

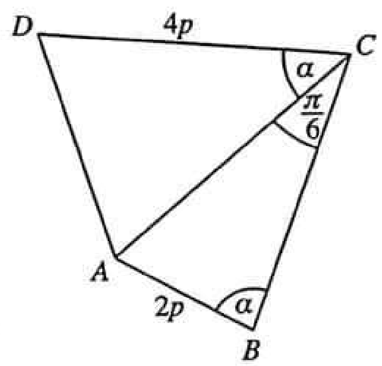
$k \in \mathbb{R}$ எனவும் $k \neq 1$ எனவும் கொள்வோம். $k > 1, k < 1$ என்னும் வகைகளை வெவ்வேறாகக் கருதிக்கொண்டு $2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ ஐ வடிவம் $R\cos(\theta+\alpha)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு k இல் $R(>0)$ உம், $\alpha(0<\alpha<2\pi)$ உம் துணியப்பட வேண்டிய மெய்ம் மாறிலிகளாகும்.

இதிலிருந்து, $2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=|k-1|$ ஐத் தீர்க்க.

(*b*) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ள நாற்பக்கல் $ABCD$ இல் $AB=2p$, $CD=4p$, $A\hat{C}B=\frac{\pi}{6}$, $A\hat{B}C=A\hat{C}D=\alpha$ ஆகும்.

$AD^2=16p^2(\sin^2\alpha-\sin 2\alpha+1)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $AD=4p$ எனின், $\alpha=\tan^{-1}(2)$ எனக் காட்டுக.



(*c*) $x>1$ இற்கு $\tan^{-1}(\ln x^{\frac{2}{3}})+\tan^{-1}(\ln x)+\tan^{-1}(\ln x^2)=\frac{\pi}{2}$ ஐத் தீர்க்க.

* * *

அந்தரங்கமானது

இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்

க.பொ.த (உயர் தர)ப் பரீட்சை – 2022(2023)

10 - இணைந்த கணிதம் I

புள்ளியிடும் திட்டம்

இந்த விடைத்தாள் பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்காகத் தயாரிக்கப்பட்டது. பிரதம பரீட்சகர்களின் கலந்துரையாடல் நடைபெறும் சந்தர்ப்பத்தில் பரிமாறிக்கொள்ளப்படும் கருத்துக்களுக்கேற்ப இதில் உள்ள சில விடயங்கள் மாற்றப்படலாம்.

திருத்தங்கள் உள்ளடக்கப்படவுள்ளன

க.பொ.த (உயர் தரப்) பரீட்சை - 2022(2023)

10 - இணைந்த கணிதம் I

புள்ளி வழங்கும் திட்டம்

பகுதி I			
பகுதி A	$= 10 \times 25$	=	250
பகுதி B	$= 05 \times 150$	=	750
மொத்தம்		=	1000/10
இறுதிப் புள்ளி		=	**100**

1. Using the **Principle of Mathematical Induction**, prove that $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$ for all $n \in \mathbb{Z}^+$

$n=1$, இற்கு L.H.S. $=\frac{1}{2}$, R.H.S. $=\frac{1}{2}$.

$\therefore n=1$. இற்கு முடிவு உண்மையாகும் 5

ஏதாவது $k \in \mathbb{Z}^+$ இனை எடுக்க. $n=k$ இற்கு முடிவ உண்மை என்க.

i.e. $\sum_{r=1}^{k} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{k}{k+1}$. .... (1) 5

இப்போது

$$\sum_{r=1}^{k+1} \frac{1}{r(r+1)} = \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad 5$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{k+2}. \quad 5$$

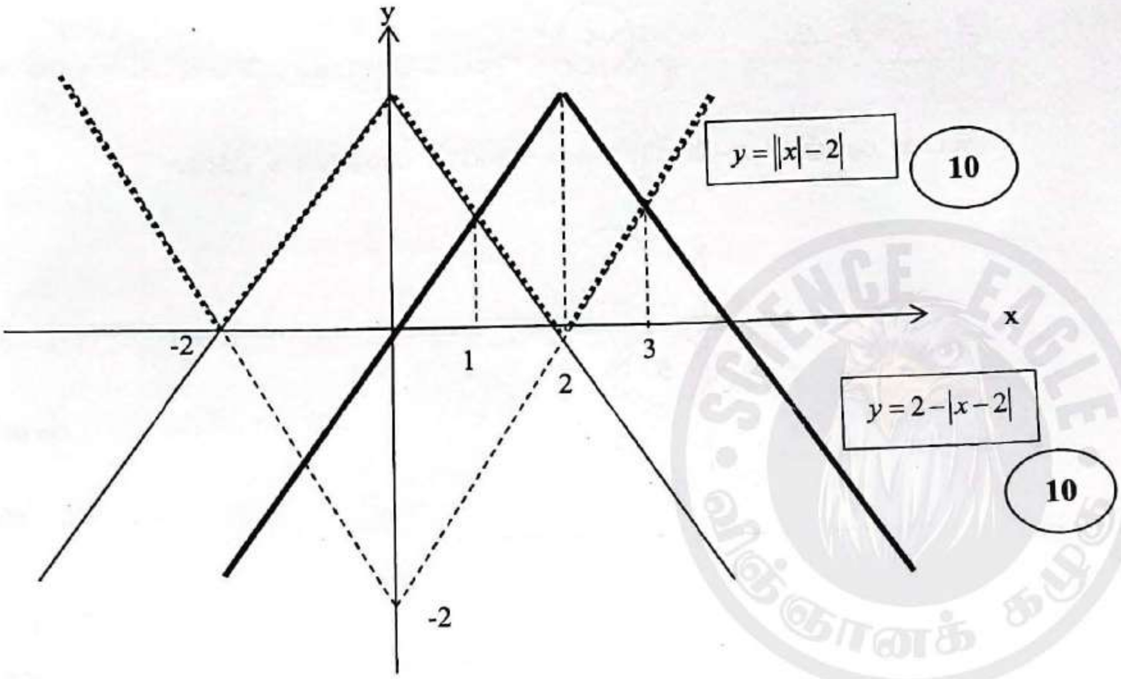
எனவே $n=k$, இற்கு முடிவு உண்மையெனின் $n=k+1$. இற்கு முடிவு உண்மை.

$n=1$. இற்கு முடிவ உண்மை என காட்டியுள்ளோம்

ஆகவே கணித தொகுத்தறி முறையின் படி எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$. இற்கும் முடிவு உண்மையாகும் 5

25

2. Sketch the graphs of $y = 2 - |x-2|$ and $y = ||x|-2|$ in the same diagram.
Hence or otherwise, find all real values of x satisfying the inequality $||x|-2| + |x-2| \le 2$.



$$||x|-2| + |x-2| \le 2$$
$$\Leftrightarrow ||x|-2| \le 2 - |x-2|$$

வரைபிலிருந்து $1 \le x \le 3$.

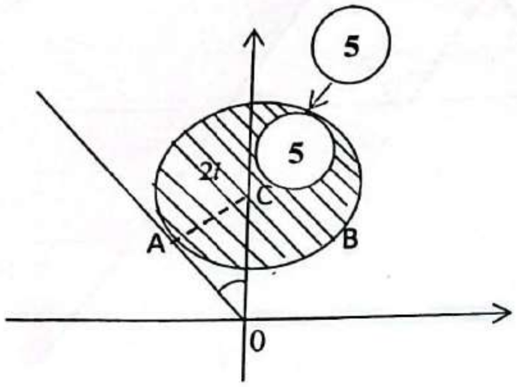
5

25

3. Shade in an Argand diagram, the region consisting of points that represent the complex num z satisfying the inequality $|\bar{z}+2i| \leq 1$.
Find the greatest value of Arg z for the complex numbers z represented by the points in this sh region.

$|\bar{z}+2i| = |z-2i|$. 5

தரப்பட்ட பிரதேசம் $|z-2i| \leq 1$. இனால் தரப்படும் பிரதேசத்தை ஒத்தது.



A. என்ற புள்ளியால் தரப்படும் சிக்கல் எண் z_0 என்க

ΔOAC, இலிருந்து $A\hat{O}C = \frac{\pi}{6}$. 5

Arg z இன் தேவையான உயர் பெறுமானம் $=$ Arg z_0

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{2\pi}{3}.$$ 5

முதல் 5 க்கான வேறு முறை:

$z = x + iy$, என்க. இங்கு $x, y \in \mathbb{R}$

$$|\bar{z}+2i|^2 = |x-(y-z)i|^2$$
$$= x^2 + (y-2)^2$$ 5

தரப்பட்ட பிரதேசம் $x^2 + (y-2)^2 \leq 1$. இனால் தரப்படும் பிரதேசத்தை ஒத்தது

4. Let $a \in \mathbb{R}$. Write down the expansion of $(2+ax)^5$ in ascending powers of x up to and including x^2 term. **Hence,** find the values of a for which the coefficient of x^2 in the expansion of $(4-5x)(2+ax)^5$ is -80.

தேவையான விரிவு $= {}^5C_0 2^5 + {}^5C_1 2^4 (ax) + {}^5C_2 2^3 (ax)^2$ 5

$= 32 + 5\times 16ax + 10\times 8a^2x^2$ 5 +5

$= 32 + 80ax + 80a^2x^2$

இப்போது, $(4-5x)(2+ax)^5 = 4(2+ax)^5 - 5x(2+ax)^5$

x^2 இன் குணகம் $= 4\times 80a^2 - 5\times 80a$ 5

இது $4\times 80a^2 - 5\times 80a = -80$ இனால் தரப்படும்

5

$\therefore\ 4a^2 - 5a + 1 = 0.$

$\therefore\ (4a-1)(a-1) = 0.$

$\therefore\ a = \frac{1}{4}$ or $a = 1.$ 5

25

5. Show that $\lim_{x\to 0} \frac{x((1+x)\operatorname{cosec} 2x - \cot 2x)}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}} = \frac{1}{4}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\left((1+x)\operatorname{cosec}2x-\cot 2x\right)}{\left(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}\cdot\frac{(1+x-\cos 2x)}{\left(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}\right)} \quad 5$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}\cdot\frac{(1+x-\cos 2x)}{\left(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}\right)}\times\frac{\left(\sqrt{(1+2x)}+\sqrt{1-2x}\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right)} \quad 5$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{\left(2\sin^2 x+x\right)}{\left[(1+2x)-(1-2x)\right]}\cdot\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\left(\frac{2\sin^2 x}{4x}+\frac{1}{4}\right)\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right) \quad 5$$

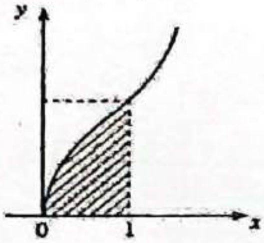
$$=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{4}\times 2 \quad 10$$

$$=\frac{1}{4}.$$

All three limits correct	10
Any two	5

6. **Using** $\frac{d}{dx}\left\{x(x^2+1)\tan^{-1}x\right\} = (3x^2+1)\tan^{-1}x + x$, **show that** $\int_0^1 (3x^2+1)\tan^{-1}x\,dx = \frac{1}{2}(\pi-1)$.

The region enclosed by the curves $y = \sqrt{2(3x^2+1)\tan^{-1}x}$, $x = 1$ **and** $y = 0$ **is rotated about the** x**-axis through** 2π **radians. Show that the volume of the solid thus generated is** $\pi(\pi-1)$.



$\frac{d}{dx}\left\{(x^2+1)\tan^{-1}x\right\} = (3x^2+1)\tan^{-1}x + x,$ இனைப் பயன்படுத்தி

$$\int_0^1 \left[(3x^2+1)\tan^{-1}x + x\right] dx = x(x^2+1)\tan^{-1}x\Big|_0^1 \quad 5$$

$$\therefore \int_0^1 (3x^2+1)\tan^{-1}x\,dx + \int_0^1 x\,dx = 2\tan^{-1}1$$

$$\therefore \int_0^1 (3x^2+1)\tan^{-1}x\,dx + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 2\frac{\pi}{4} \quad 5$$

$$\therefore \int_0^1 (3x^2+1)\tan^{-1}x\,dx = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\pi-1). \quad 5$$

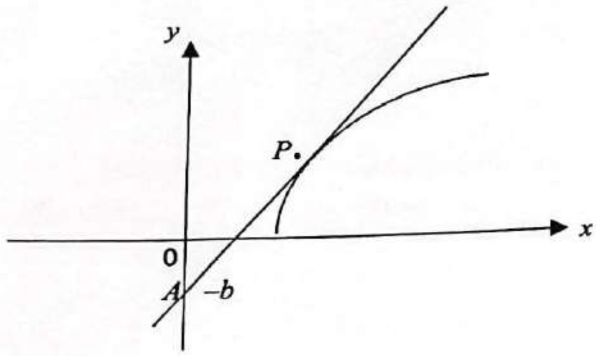
தேவையான கனவளவு $= \pi\int_0^1 2\left(3x^2+1\right)\tan^{-1}x\ dx$ 5

$$= 2\pi\frac{1}{2}(\pi-1) \quad 5$$

$$= \pi(\pi-1).$$

25

7. Let $a, b > 0$. A curve is parametrically given by $x = a\sec\theta$ and $y = b\tan\theta$ for $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. The tangent line to the curve at the point $P \equiv (a\sec\theta,\ b\tan\theta)$ passes through the point $(0, -b)$. Find coordinates of P.



$x = a\sec\theta, \qquad y = b\tan\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = a\sec\theta\tan\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = b\sec^2\theta$ 5

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{b\sec^2\theta}{a\sec\theta\tan\theta}$ 5

$\therefore \quad = \frac{b\sec\theta}{a\tan\theta}.$

AP இன் படித்திறன் $AP = \frac{b + b\tan\theta}{a\sec\theta}.$

தரப்பட்ட நிபந்தனையிலிருந்து $\frac{b\sec\theta}{a\tan\theta} = \frac{b(1+\tan\theta)}{a\sec\theta}.$ 5

$\therefore \ \sec^2\theta = \tan\theta + \tan^2\theta$

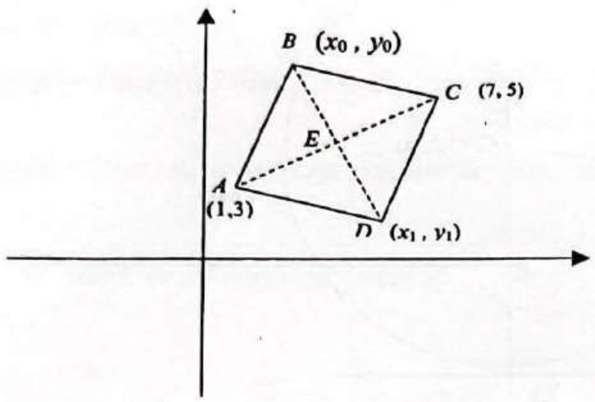
$\therefore \ \tan\theta = 1$

$\therefore \ \theta = \frac{\pi}{4}$ 5

$\therefore \ P \equiv \left(\sqrt{2}a,\ b\right)$ 5

25

8. Let $ABCD$ be a square with $A \equiv (1,3)$ and $C \equiv (7,5)$. Find the x-coordinates of B and D.



$B = (x_0, y_0)$, $D = (x_1, y_1)$ என்க

Since E in the mid-point of AC, we have $E \equiv (4,4)$. 5

எனின் $AE^2 = 3^2 + 1^2 = 10$

$ABCD$ ஆனது சதுரம் ஆகையால் $BE = AE$.

எனவே Hence, $(x_0 - 4)^2 + (y_0 - 4)^2 = 10$. ---------------- (1) 5

Also, $AE \perp BE$.

$\therefore \left(\frac{4-3}{4-1}\right) \times \left(\frac{y_0 - 4}{x_0 - 4}\right) = -1$. 5

Hence, $y_0 - 4 = -3(x_0 - 4)$ ---------------- (2)

$(1), (2) \Rightarrow (x_0 - 4)^2 + 9(x_0 - 4)^2 = 10$. 5

Hence, $y_0 - 4 = -3(x_0 - 4)$.

$\therefore \ (x_0 - 4)^2 = 1$.

$\therefore \ (x_0 - 4) = \pm 1$.

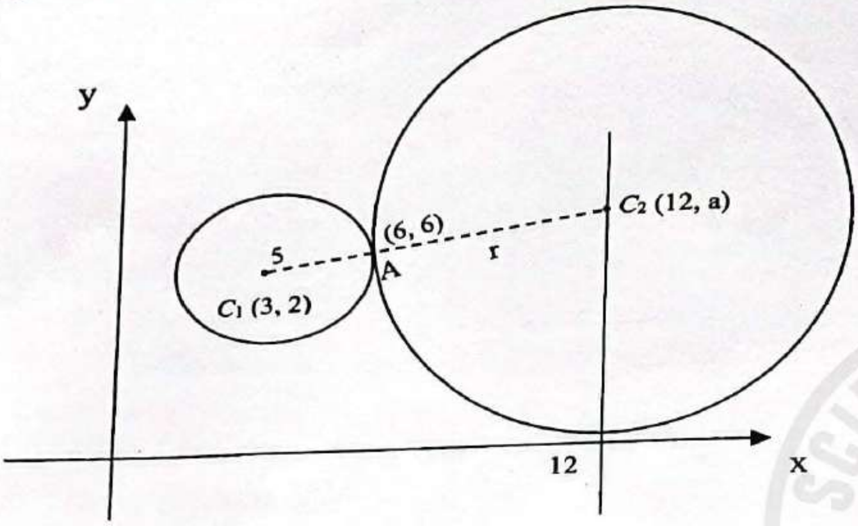
$\therefore \ x_0 = 5$ or $x_0 = 3$. 5

Note that (x_1, y_1) also satisfies (1) and (2), when (x_0, y_0) is replaced by (x_1, y_1).

Hence, x coordinates of B and D are 3 and 5.

25

9. Find the equation of the circle that touches the circle $x^2+y^2-6x-4y-12=0$ extern
point (6, 6) and has its centre on the line $x = 12$.



தரப்பட்ட வட்டத்தின் மையம் C_1 என்க தேவையான வட்டத்தின் மையம் C_2 என்க

Then $C_1 \equiv (3,2)$, $C_2 \equiv (12,\ a)$; where $a \in \mathbb{R}$ 5

Since the circles touch externally C_2 lies on the line C_1A.

$$\therefore \frac{6-2}{6-3} = \frac{a-6}{12-6}.$$ 5

$$\therefore 3a - 18 = 24.$$

$$\therefore a = 14.$$ 5

The radius of the required circle $C_2 = \sqrt{(12-6)^2 + (14-6)^2}$

$$= 10.$$ 5

Hence, the required equalion is $(x-12)^2 + (y-14)^2 = 100.$ 5

10. Show that $\cos 5\theta = \cos 3\theta$ if and only if $\theta = \frac{n\pi}{4}$ for $n \in \mathbb{Z}$.
Show also that $\frac{\sin 5\theta - \sin 3\theta}{\cos 5\theta - \cos 3\theta} = -\cot 4\theta$ for $\theta \neq \frac{n\pi}{4}$ and $n \in \mathbb{Z}$.

$\cos 5\theta = \cos 3\theta$

$\Leftrightarrow \quad 5\theta = 2n\pi \pm 3\theta$ for $n \in \mathbb{Z}$. 5

$\Leftrightarrow \quad 8\theta = 2n\pi$ or $2\theta = 2n\pi$ for $n \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow \quad \theta = \frac{n\pi}{4}$ or $\theta = n\pi$ for $n \in \mathbb{Z}$. 5

$\Leftrightarrow \quad \theta = \frac{n\pi}{4}$ for $n \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{\sin 5\theta - \sin 3\theta}{\cos 5\theta - \cos 3\theta} = \frac{2\cos 4\theta \sin\theta}{-2\sin 4\theta \sin\theta}$$ 5 5

$$= -\cot 4\theta$$ 5

25

Part B

* Answer five questions only.

11.(a) Let $0<|p|<1$. Show that the equation $p^2x^2-2x+1=0$ has real distinct roots.
Let α and β $(>\alpha)$ be these roots. Show that α and β are both positive.
Find $(\alpha-1)(\beta-1)$ in terms of p, and deduce that $\alpha<1$ and $\beta>1$.
Show that $\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}=\frac{1}{|p|}\sqrt{2(1-|p|)}$
It is given that $\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}=\frac{1}{|p|}\sqrt{2(1+|p|)}$. Show that the quadratic equation whose roots are $|\sqrt{\alpha}-1|$ and $|\sqrt{\beta}-1|$ is $|p|x^2-\sqrt{2(1-|p|)}x+\sqrt{2(1+|p|)}-|p|-1=0$.

(b) Let $p(x)=2x^3+ax^2+bx-4$, where $a, b\in\mathbb{R}$. It is given that $(x+2)$ is a factor of both $p(x)$ and $p'(x)$, where $p'(x)$ is the derivative of $p(x)$ with respect to x. Find the values of a and b. For these values of a and b, completely factorise $p(x)-3p'(x)$.

71

(a)

$0<|p|<1$.

$p^2x^2-2x+1=0$. இன் பிரித்துக்காட்டி Δ என்க

$p^2<1$. ஆதலால் $\therefore \Delta=4-4p^2=4(1-p^2)>0$,
5 5

$\therefore$ சமன்பாடு இரு வேறுவேறான மெய் மூலங்களை கொண்டிருக்கும் 5 **15**

α, β $(>\alpha)$ ஆகியன மூலகங்கள் என்க.

எனின் $\alpha\beta=\dfrac{1}{p^2}>0.$ 5

α and β இரண்டும் நேரானவை அல்லது மறையானவை.

எனினும் $\alpha+\beta=\dfrac{2}{p^2}>0$ ஆதலால் α, β இரண்டும் நேரானது. 5
5

15

$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{2}{p^2}+1=\dfrac{p^2-1}{p^2}<0$ and $\alpha-1<\beta-1$.
5 5 5

$\therefore \alpha-1<0$ and $\beta-1>0$. 5

$\therefore$ $\alpha<1$ and $\beta>1$.

20

$$(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=\frac{2}{p^2}-2\frac{1}{|p|}=\frac{2}{p^2}(1-|p|).$$

5 5

$$\therefore \sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}=\frac{1}{|p|}\sqrt{2(1-|p|)}$$ 5

15

தேவையான சமன்பாடு $\left(x-\left|\sqrt{\alpha}-1\right|\right)\left(x-\left|\sqrt{\beta}-1\right|\right)=0.$ 10

$$x^2-\left(\left|\sqrt{\alpha}-1\right|+\left|\sqrt{\beta}-1\right|\right)x+\left|\sqrt{\alpha}-1\right|\left|\sqrt{\beta}-1\right|=0$$

$\left|\sqrt{\alpha}-1\right|=1-\sqrt{\alpha}$,$\left|\sqrt{\beta}-1\right|=\sqrt{\beta}-1$ ஆதலால்

$$x^2-(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})x+\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha\beta}-1=0$$ 5

$$\therefore\ x^2-\frac{1}{|p|}\sqrt{2(1-|p|)}\,x+\frac{1}{|p|}\sqrt{2(1+|p|}-\frac{1}{|p|}-1=0$$

$$\therefore\ |p|x^2-\sqrt{2(1-|p|}\,x+\sqrt{2(1+|p|}-|p|-1=0$$ 5

20

$p(x)=2x^3+ax^2+bx-4$

$\therefore p'(x)=6x^2+2ax+b.$ 5

$(x+2)$ ஆனது $p\ (x)$, இன் காரணி ஆதலால்

$p(-2)=0.$ 5

இப்போது, $p(-2)=-16+4a-2b-4=0.$ 5

$\therefore\ 2a-b=10$ ---------------- (1)

$(x+2)$ ஆனது $p'(x)$, இன் காரணி ஆதலால்

$p'(-2)=0.$ 5

இப்போது, $p'(-2)=24-4a+b=0.$ 5

$\therefore 4a-b=24.$ ---------------- (2)

(1) and (2) $\Rightarrow a=7$ and $b=4.$

5 5

35

$$p(x)-3p'(x)=(2x^3+7x^2+4x-4)-3(6x^2+14x+4)$$ 5

$$=(x+2)(2x^2+3x-2)-3(x+2)(6x+2)$$ 5

$$=(x+2)\left[2x^2+3x-2-18x-6\right]$$

$$=(x+2)\ (2x^2-15x-8)$$ 5

$$=(x+2)(2x+1)(x-8)$$

5 5 5

30

வேறு முறை:

$$p(x)=2x^3+ax^2+bx-4$$

$(x+2)$ ஆனது $p(x)$, $p'(x)$ இரண்டினதும் காரணி ஆகையால்

$p(x)=(x+2)^2(2x+k).$ 5 இங்கு k ஒரு மாறிலி.

10

மாறிலிகளை ஒப்பிட $4k=-4$

$\therefore k=-1$ 5

$\therefore p(x)=(x+2)^2(2x-1).$

$\therefore p(x)=(x^2+4x+4)(2x-1)=2x^3+7x^2+4x-4.$ 5

x: இன் குணங்களை ஒப்பிட $b=4$ and $a=7.$

5 5

$\therefore p(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$

$\therefore p'(x) = 6x^2 + 14x + 4 = 2(3x^2 + 7x + 2) = 2(x+2)(3x+1)$ 5

$\therefore p(x) - 3p'(x) = (x+2)^2(2x-1) - 3(2(x+2)(3x+1))$ 5

$= (x+2)[(x+2)(2x-1) - 6(3x+1)]$

$= (x+2)(2x^2 - 15x - 8)$ 5

$= (x+2)(2x+1)(x-8)$ 5

5 5

30

12. (a) Six mangoes and four oranges are to be distributed among eight students so that each receives at least one fruit.

Find the number of different ways in which

(i) six students get one fruit each and out of the remaining two students one gets two m and the other gets two oranges,

(ii) seven students get one fruit each, and the other student gets three mangoes,

(iii) seven students get one fruit each, and the other student gets three fruits.

(b) Let $U_r = \frac{4(2r+7)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}$ for $r \in \mathbb{Z}^+$. Also, let $f(r) = \frac{A}{(2r+1)} + \frac{B}{(2r+3)}$ for $r \in \mathbb{Z}^+$, and B are real constants. Determine the values of A and B such that $U_r = f(r) - f(r+1)$ fo

Hence or otherwise, show that $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{4}{5} - \frac{3}{2n+3} + \frac{1}{2n+5}$ for $n \in \mathbb{Z}^+$.

Deduce that the infinite series $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ is convergent and find its sum.

Hence, find the value of the real constant k such that $\sum_{r=1}^{\infty} (U_r + kU_{r+1}) = 1$.

(a) (i)

2 மாணவர்கள்		6 மாணவர்கள்
2M 2OR		4M 2OR
$^8C_2$	x	$^6C_4 \times {}^2C_2$
2OR 2M		4M 2OR
$^8C_2$	x	$^6C_4 \times {}^2C_2$

5 5

தேவையான வழிகள் : $2 \times {}^8C_2 \times {}^6C_4 \times {}^2C_2$ 5

$= 2 \times \frac{8!}{6!2!} \times \frac{6!}{4!2!} = 2 \times 28 \times 15 = 840.$ 5

5

25

3M 3M 4OR

$^8C_1$ x $^7C_3 \times {}^4C_4$

தேவையான வழிகள்: $^9C_1 \times {}^7C_3 \times {}^4C_4 = 8 \times 4\frac{7!}{4!3!} = 8 \times 35 = 280$.

5 5 5

15

(iii) 3- பழம் : 3M + 3OR 2M + 1OR 1M + 2OR 5

4 வகைகள்

3M வகை 280 வழிகள் (ii) இல் உள்ளவாறு

3OR வகை $^8c_1 \times {}^7c_6 \times {}^1c_1 = 8 \times 7 = 56$ வழிகள் 5

2M + 1OR வகை $^8c_1 \times {}^7c_4 \times {}^3c_3 = 8 \times 35 = 280$ வழிகள் 5

1M + 2OR வகை $^8c_1 \times {}^7c_5 \times {}^2c_2 = 8 \times 21 = 168$ வழிகள் 5

தேவையான வழிகள்= $280 + 56 + 280 + 168$

$= 784$ 5

25

வேறு முறை:

(a) மாம்பழங்கள் 6; தோடம்பழங்கள் 4; மாணவர்கள் 8.

(i) ஒரு மாணவனுக்கு 2 மாம்பழங்களும் ,இன்னொருவருக்கு 2 தோடம் பழங்களும் வழங்கப்படுவதால் 6 மாணவர்கள் 4 மாம்பழங்கள்,2 தோடம்பழங்களில் இருந்து ஒவ்வொன்றை பெறுவர்.

						2Ma	2Or

4 மாம்பழங்களும், 2 தோடம்பிங்களும் 6 மாணவர்களுகிடையில் (ஒன்று வீதம்) பங்கிடப்படும் வழிகள்

$$=\frac{6!}{4!2!} \quad 10$$

8மாணவர்களிலிருந்து ஒரு மாணவர் தெரிவு செய்யப்பட்டு 2 மாம்பழங்களை வழங்குவதற்கான வழிகள் $= {}^{8}C_1$

7 மாணவர்களிலிருந்து மற்றுமெரு மாணவன் தெரிவு செய்யப்பட்டு 2 தோடம்பழங்களை வழங்குவதற்கான வழிகள் $= {}^{7}C_1$ 5

$$\text{தேவையான வழிகள்} = \frac{6!}{4!2!} \times {}^{8}C_1 \times {}^{7}C_1$$

$$= 840 \text{ ways.} \quad 5$$

OR

$$= \frac{6!}{4!2!} \times {}^{8}P_2$$

$$= 840 \text{ ways.}$$

25

(ii) 7 மாணவர்கள் ஒவ்வொரு பழம் வீதமும் ஒரு மாணவன் மூன்று மாம்பழங்களையும் பெறுகையில்

							3Ma

3மாம்பழங்களும் 4 தோடம்பிங்களும் ஆளுக்கு ஒவ்வென்று வீதம் 7 மாணவர்களிடையே பகிந்தளிக்க்க கூடிய வழிகள் $= \frac{7!}{4!3!}$ 5

எட்டு மாணவர்களிலிருந்து ஒரு மாணவன் தெரிவு செய்யப்பட்டு 3 மாம்பழங்களை வழங்குவதற்கான வழிகள் $= {}^{8}C_1$ 5

$$\therefore \text{தேவையான வழிகள்} = {}^{8}C_1 \times \frac{7!}{4!3!}$$

$$= 280 \text{ ways.} \quad 5$$

(iii)

3 பழங்கள் ஒரு மாணவனுக்கு வழங்கல		7 பழங்கள் 7 மாணவர்களுக்கு வழங்கல்		தேவையான வழிகள்	
மாம்பழம்	தோடம்பழம்	மாம்பழம்	தோடம்பழம்		
3	0	3	4	$= {}^{8}C_1 \times \frac{7!}{3!4!} = 280$	5
2	1	4	3	$= {}^{8}C_1 \times \frac{7!}{4!3!} = 280$	5

1	2	5	2	$= {}^8C_1 \times \frac{7!}{5!2!} = 168$	5
0	3	6	1	$= {}^8C_1 \times \frac{7!}{6!} = 56$	5

தேவையான வழிகள்

$$= 280 + 280 + 168 + 56$$
$$= 784 \quad 5$$

25

(b). $r \in \mathbb{Z}^+$

$$U_r = \frac{4(2r+7)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}$$

$$U_r = f(r) - f(r+1)$$

$$\frac{4(2r+7)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)} = \frac{A}{2r+1} + \frac{B}{2r+3} - \frac{A}{2r+3} - \frac{B}{2r+5} \quad 5$$

$$\therefore 4(2r+7) = A(2r+3)(2r+5) + (B-A)(2r+1)(2r+5) - B(2r+1)(2r+3)$$

$$= (4A+4B)r + 10A - 2B$$

Any Method 10

r இன் அடுக்குகளின் குணங்களை ஒப்பிட

:

$$\left.\begin{array}{ll} r: & 8 = 4A + 4B \Rightarrow 2 = A + B \\ r^0: & 28 = 10A + 2B \Rightarrow 14 = 5A + B \end{array}\right\} A = 3, \quad B = -1$$

5 5

25

$U_r = f(r) - f(r+1)$ இங்கு $f(r) = \frac{3}{2r+1} - \frac{1}{2r+3}$ 5

$r = 1;\ U_1 = f(1) - f(2)$

$r = 2;\ U_2 = f(2) - f(3)$ 5

. .

. .

. .

$r = n-1;\ U_{n-1} = f(n-1) - f(n)$

5

$r=n; \quad U_n = f(n)-f(n+1)$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1)-f(n+1) \quad 5$$

$$\therefore \quad \sum_{r=1}^{n} U_r = f(1)-f(n+1) \quad 5$$

$$=1-\frac{1}{5}-\frac{3}{2n+3}+\frac{1}{2n+5}$$

$$=\frac{4}{5}-\frac{3}{2n+3}+\frac{1}{2n+5} \quad 5 \quad r\in\mathbb{Z}$$

30

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} U_r \quad 5$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{2n+3}+\frac{1}{2n+5}\right)$$

$$=\frac{4}{5} \quad 5$$

$\therefore$ முடிவிலி தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஆனது ஒருங்கும் அதன் கூட்டுத்தொகை $\frac{4}{5}$. 5

15

$U_r=\frac{3}{3}-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

$U_{r+1}=\frac{3}{5}-\frac{1}{7}$

$=\frac{16}{35}$

$$1=\sum_{r=1}^{\alpha}(U_r+kU_{r+1})$$

$$=(1+k)\left(\sum_{r=1}^{\alpha} U_r\right)-kU_1 \quad 5$$

$$=(1+k)\left(\frac{4}{5}\right)-k\left(\frac{12}{35}\right) \quad 5$$

$$\therefore k=\frac{7}{16} \quad 5$$

15

---

13. (*a*) Let $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix}$. Show that $\mathbf{A}^{-1}$ exists for all $a \in \mathbb{R}$.

The matrices $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ and $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ are such that $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{Q}^{\mathbf{T}} + \mathbf{R}$. Show that $a = 1$.

For this value of a, write down $\mathbf{A}^{-1}$ and hence, find the values of x and y such that $\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$.

(*b*) Let $z, w \in \mathbb{C}$. Show that $z\bar{z} = |z|^2$ and hence, show that $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$.

Deduce that $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$ and give a geometric interpretation for it when the points representing z, w and 0 in the Argand diagram are non-collinear.

(*c*) Let $z = -1 + \sqrt{3}i$. Express z in the form $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, where $r > 0$ and $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

Let $z^n = a_n + ib_n$, where $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ for $n \in \mathbb{Z}^+$. Write down $\mathrm{Re}\left(z^m \cdot z^n\right)$ in terms of a_m, a_n, b_m and b_n for $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

Considering z^{m+n} and using De Moivre's theorem, show that $a_m a_n - b_m b_n = 2^{m+n}\cos(m+n)\frac{2\pi}{3}$, for $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

(*a*) $|A| = a(a+2) + 2 = a^2 + 2a + 2 = (a+1)^2 + 1 \neq 0$ for all $a \in \mathbb{R}$. 5

5

$\therefore$ எல்லா $a \in \mathbb{R}$ இற்கு A^{-1} உண்டு 5

$\boxed{15}$

5

$$A = PQ^T + R$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & -2 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad 5$$

5

$$= \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 5$$

$a = 1$ and $a + 2 = 3$. $\therefore a = 1$ 5

$\boxed{25}$

When $a=1$, $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ $\therefore A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ 10

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ 10\end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}-5\\ 10\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\ 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$$ 10

5 5

$\therefore \quad x=1$ and $y=3$.

30

(*b*) Taking $z=x+iy;\ x,y\in\mathbb{R}$,

$z\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-i^2y^2=x^2+y^2=|z|^2$

5 5

10

$|z+w|^2=(z+w)\overline{(z+w)}$ 5

$=(z+w)(\overline{z}+\overline{w})$ 5

$=z\overline{z}+z\overline{w}+\overline{z}w+w\overline{w}$ 5

$=|z|^2+z\overline{w}+\overline{z\overline{w}}+|w|^2$

$=|z|^2+2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})+|w|^2$ 5

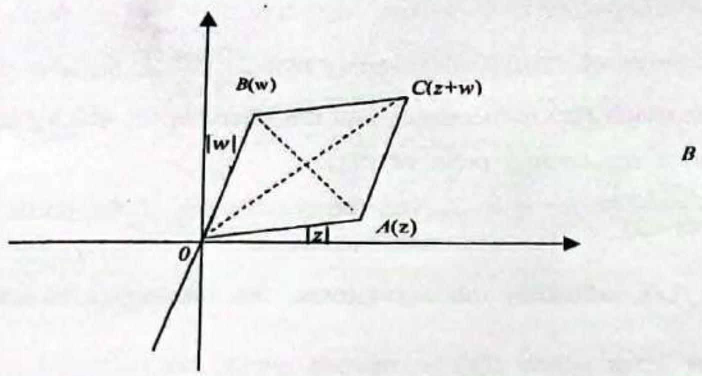
20

Note that $|z-w|^2=|z|^2-2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})+|w|^2$ by

5

$\therefore \quad |z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right)$

5



If z, w and 0 are non-collinear, then $OC^2 + AB^2 = 2\left(OA^2 + OB^2\right)$.

$\left(\because OC = |z+w| \text{ and } AB = |z+w|.\right)$

ஒரு இணைகரத்தில் மூலை விட்டங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையானது அதன் பக்க நீளங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கு சமனாகும்

5

15

(c) $z = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ 10

5

இங்கு $r = 2$, and $\theta = \frac{2\pi}{3}.$

15

5

$$\text{Re}(z^m z^n) = \text{Re}\left[\left(a_m + ib_m\right)\left(a_n + ib_n\right)\right] = a_m a_n - b_m b_n \quad \text{--------} \quad (1)$$

05

---

5 5

$$z^m z^n = z^{m+n} = \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{n+m} = 2^{m+n}\left[\cos\frac{2(m+n)\pi}{3} + i\sin\frac{2(m+n)\pi}{3}\right]$$

$$\therefore \text{Re}(z^m z^n) = 2^{m+n}\cos(m+n)\frac{2\pi}{3} \quad \text{------------------} \quad (2)$$

5

$$(1) \text{ and } (2) \Rightarrow a_m a_n - b_m b_n = 2^{m+n}\cos(m+n)\frac{2\pi}{3}.$$

15

---

14. (*a*) Let $f(x)=\dfrac{2x+3}{(x+2)^2}$ for $x\neq-2$.

Show that $f'(x)$, the derivative of $f(x)$, is given by $f'(x)=\dfrac{-2(x+1)}{(x+2)^3}$ for $x\neq-2$.

Hence, find the interval on which $f(x)$ is increasing and the intervals on which $f(x)$ is decrea

Also, find the coordinates of the turning point of $f(x)$.

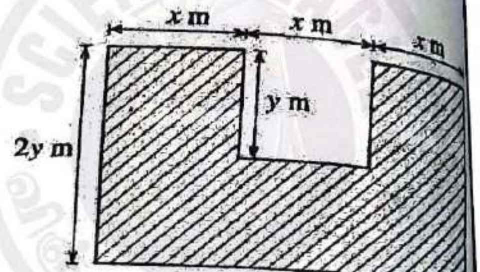
It is given that $f''(x)=\dfrac{2(2x+1)}{(x+2)^4}$ for $x\neq-2$. Find the coordinates of the point of inflection the graph of $y=f(x)$.

Sketch the graph of $y=f(x)$ indicating the asymptotes, the turning point and the point inflection.

State the smallest value of k for which $f(x)$ is one-one on $[k,\infty)$.

(*b*) The shaded region shown in the figure is of area 45 m^2. It is obtained by removing a rectangle of length x m and width y m from a rectangle of length $3x$ m and width $2y$ m. Show that the perimeter L m of the shaded region is given by $L=6x+\dfrac{54}{x}$ for $x>0$.

Find the value of x such that L is minimum.



(a) For $x\neq-2$, ஆக $f(x)=\dfrac{2x+3}{(x+2)^2}$.

$$f'(x)=\frac{(x+2)^2(2)-2(2x+3)(x+2)}{(x+2)^4} \quad 20$$

$$=\frac{2(x+2)\left[x+2-2x-3\right]}{(x+2)^4}$$

$$=\frac{-2(x+1)}{(x+2)^3} \quad 5$$

25

$$f'(x)=0 \iff x=-1 \quad 5$$

	$-\infty<x<-2$	$-2<x<-1$	$-1<x<\infty$
$f'(x)$ இன் குறி	$(-)$	$(+)$	$(-)$
$f(x)$ is	குறைவடைகின்றது ↘	அதிகரிக்கின்றது ↗	குறைவடைகின்றது ↘
	5	5	5

$\therefore f(x)$ ஆனது $(-2,-1]$ and இல் அதிகரிக்கின்றது அத்துடன்

$(-\infty,-2)$, $[-1,\infty)$ இல் குறைவடைகின்றது

20

திரும்பற் புள்ளி $(-1,1)$ ஆனது ஓரிட உயர்வாகும்

5 5

$$f''(x)=\frac{2(2x+1)}{(x+2)^4}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{2}.$$ 5

	$-2<x<-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<x<\infty$
$f''(x)$ இன் குறி	$(-)$	$(+)$
குவிவுத்தன்மை	கீழ்நோக்கி குவிந்தது	மேல்நோக்கி குவிந்தது

5 5

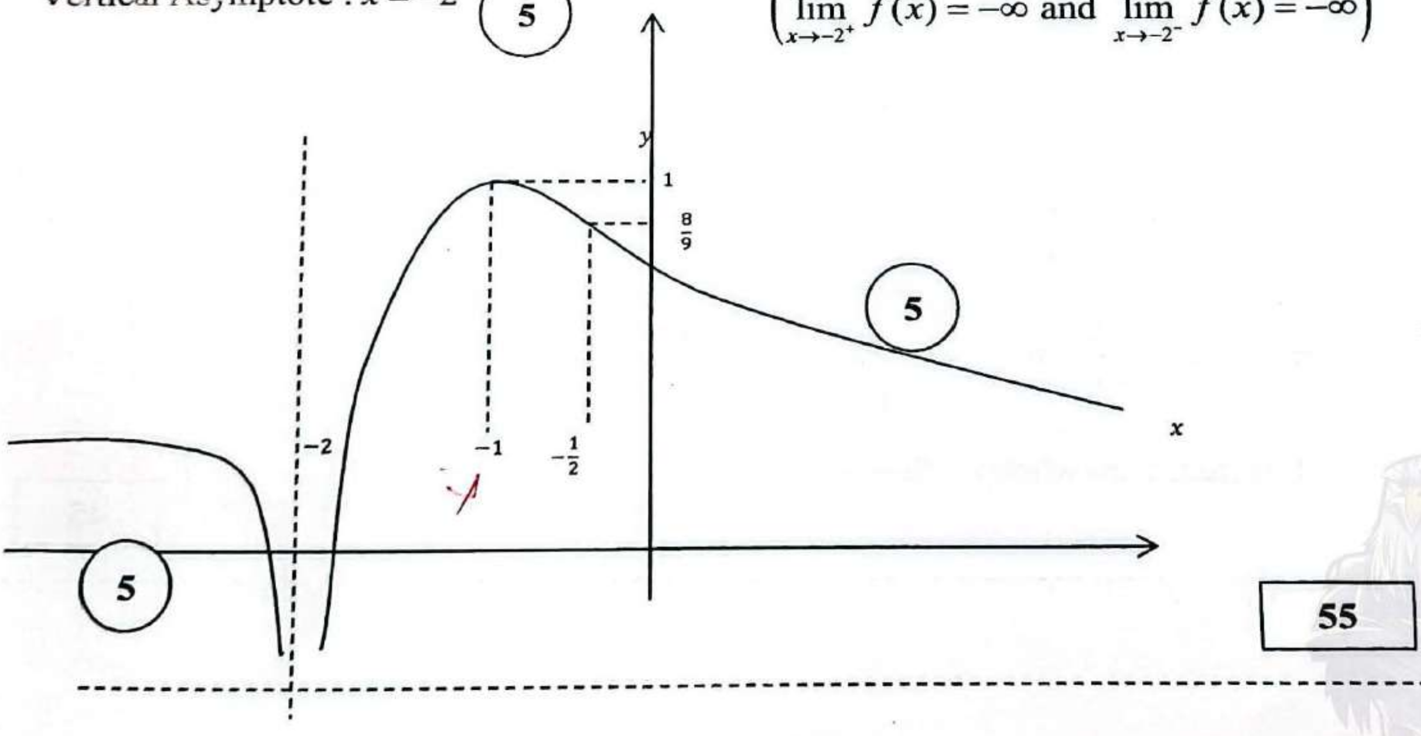
$\therefore$ the point of inflection is $\left(\frac{-1}{2},\frac{8}{9}\right)$ விபத்தி புள்ளியாகும்

5

x - intercept: $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ 5 5

Horizontal Asymptote: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ $\therefore y=0$

Vertical Asymptote : $x=-2$ 5 $\left(\lim_{x\to-2^+} f(x)=-\infty \text{ and } \lim_{x\to-2^-} f(x)=-\infty\right)$

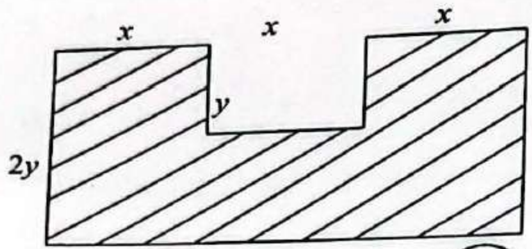


55

$f(x)$ ஆனது $[k,\infty)$ இன்மேல் ஒன்றுக்கொன்றானது ஆக k, இன் மிகக்குறைந்த பொறுமானம $k=-1$. 5

05

(b)



for $x>0$, $y>0$

5 5

நிழற்றிய பிரதேசத்தின் பரப்பு $45=(3x)(2y)-xy$

$\therefore\ 45=5xy$

$\therefore\ y=\dfrac{9}{x}$ 5

$L=6x+6y$ 10

$=6x+\dfrac{54}{x}$ for $x>0$ 5

$\dfrac{dL}{dx}=6-\dfrac{54}{x^2}=\dfrac{6(x^2-9)}{x^2}=\dfrac{6(x-3)(x+3)}{x^2}$

5

$\dfrac{dL}{dx}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=3$ 5

For $0<x<3$, $\dfrac{dL}{dx}<0$ and

For $x>3$, $\dfrac{dL}{dx}>0$.

5

$\therefore$ L is minimum when $x=3$.

45

---

15. (*a*) Find the values of the constants A, B and C such that

$x^2+x+2=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+1)$ for all $x\in\mathbb{R}$.

Hence, write down $\dfrac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)}$ in partial fractions and find $\displaystyle\int\frac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)}\,dx$.

(*b*) Show that $1+\sin 2x=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ and hence, show that $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin 2x}\,dx=1$.

(*c*) Let $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2\cos 2x}{(1+\sin 2x)^2}\,dx$. Using integration by parts, show that $I=-\frac{\pi^2}{8}+J$, where $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\sin 2x}\,dx$.

Using the relation $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx$ and the result in (*b*), evaluate J and show that $I=\frac{\pi}{8}(2-\pi)$.

(*a*)

$$x^2+x+2=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+1)$$
$$=(A+B)x^2+(A+B+C)x+A+C$$

x இனது அடுக்குகளின் குணகங்களை ஒப்பிட:

$x^0:\quad 2=A+C$

$x:\quad 1=A+B+C$ 5

$x^2:\quad 1=A+B$

$\therefore A=2,\quad B=-1\quad and\quad C=0.$ 5

5 5

20

$$\frac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)}=\frac{2}{x+1}-\frac{x}{x^2+x+1}$$ 5

$$\therefore\int\frac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)}dx=2\int\frac{1}{x+1}dx-\int\frac{x}{x^2+x+1}dx$$ 5

$$= 2\ln|x+1| - \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2x+1}{x^2+x+1}}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

5 5 5

$$-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\tan^{-1}\frac{(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + C$$

5 5 5

$x^2+x+1>0$

$$= 2\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}} + C, \text{ where } C \text{ is an arbitrary constant.}$$

$\boxed{40}$

(*b*)

$$2\cos^2(\frac{\pi}{4}-x) = 2(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x)^2$$

$$=(\cos x + \sin x)^2 \quad 5$$

$$= 1 + 2\sin x\cos x \quad 5$$

$$= 1 + \sin 2x \quad 5$$

$\boxed{15}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}dx \quad 5$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx \quad 5$$

$$= \frac{-1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \quad 5$$

$$= \frac{-1}{2}\left(\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) - \tan\frac{\pi}{4}\right) \quad 5$$

$$= \frac{-1}{2}(-1-1)$$

$$= 1 \quad 5$$

25

(C) $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cos 2x}{(1+\sin 2x)^2}\,dx$$

$$= x^2\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{1}{1+\sin 2x}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}dx \quad 5$$

5 5

$$= \frac{-1}{2} \times \frac{\pi^2}{4} \times \frac{1}{1+0} \quad 5 \quad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}dx$$

$$= \frac{-\pi^2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}dx$$

$$= \frac{-\pi^2}{8} + J. \quad 5$$

25

5

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\underbrace{1+\sin 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}_{\sin 2x}}\,dx$$

5

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{x}{1+\sin 2x}}_{J}dx$$

5

$$\therefore 2J = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{1}{1+\sin 2x}dx}_{1}$$

$$\therefore J = \frac{\pi}{4} \quad 5$$

$$\therefore I = \frac{-\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}(2-\pi) \quad 5$$

25

---

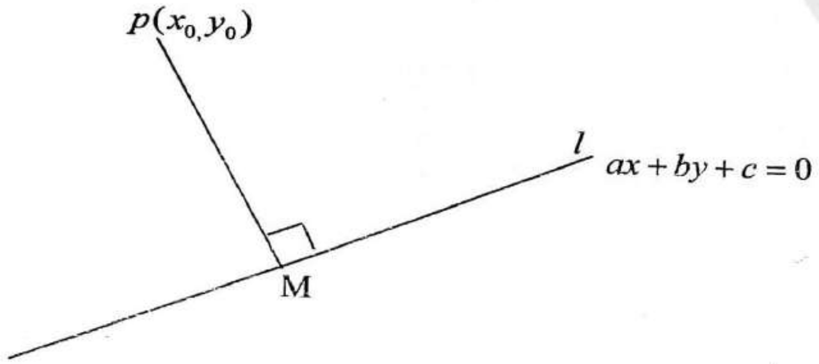
16. Let $P \equiv (x_0, y_0)$ and l be the straight line given by $ax+by+c=0$. Show that the perpendicular distance from P to l is $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Let l_1 and l_2 be two straight lines given by $4x-3y+8=0$ and $3x-4y+13=0$, respectively. Show that l_1 and l_2 intersect at $A \equiv (1, 4)$.

Also, show that the parametic equations of the bisector of the acute angle between l_1 and l_2 can be written as $x=t$ and $y=t+3$, where $t \in \mathbb{R}$.

Hence, show that the equation of any circle touching both straight lines l_1 and l_2, and lying in the region between l_1 and l_2 that contains the acute angle, is given by $(x-t)^2+(y-t-3)^2=\frac{1}{25}(t-1)^2$, where $t \in \mathbb{R}$ and $t \neq 1$.

From among the above circles, find the equations of the circles that intersect the circle centred at A of radius 1, orthogonally.



இங்கு $a^2+b^2 \neq 0$

நேர்கோடு PM இன் சமன்பாடு $(y-y_o)=\frac{a}{b}(x-x_0)$ 5

P இனூடாக செல்வதும் l இற்கு செங்குத்தானதுமான கோட்டிலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி

(x_0+at, y_0+bt) for $t \in \mathbb{R}$. இனால் தரப்படும். 5

M ஆனது l இல் உள்ளது; $a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c=0$ 5

$$\therefore t(a^2+b^2) = -ax_0+by_0+c$$

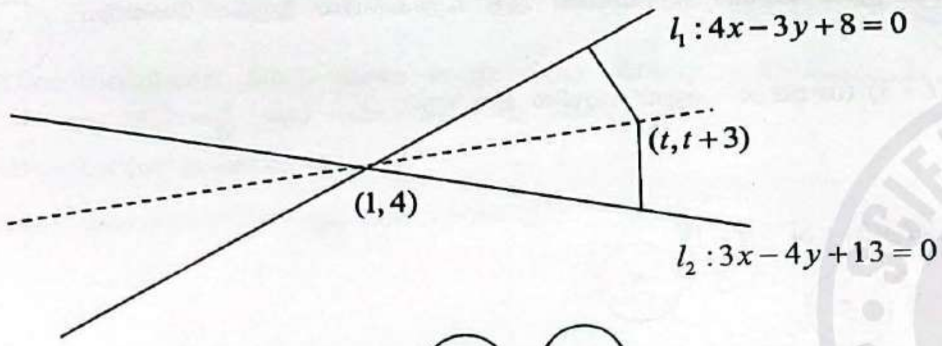
$$\therefore \qquad t = \frac{-(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}$$ 5

$\therefore$ தேவையான தூரம் $PM = \sqrt{a^2t^2 + b^2t^2}$ 5

$= \sqrt{a^2 + b^2}\,|t|$

$= \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 5

30



5 5

A இன் ஆள்கூறுகளை l_1 and l_2 இல் பிரதியிட, l_1, and l_2 ஆனது $A = (1,4)$ 5 இல் இடைவெட்டும்

15

கோண இரு கூறாக்கிகள் $\dfrac{4x - 3y + 8}{5} = \pm \dfrac{3x - 4y + 13}{5}$ இனால் தரப்படும் 10

The angle bisectors are $\underbrace{x + y - 5}_{m=-1} = 0$ and $x - y + 3 = 0$.

5 5

Let θ be the acute angle between l_1 and $x_1 + y - 5 = 0$

Then, $\tan\theta = \left|\dfrac{\frac{4}{3} - (-1)}{1 + \frac{4}{3}(-1)}\right| = 7 > 1$ 5

10

5

$\therefore$ கூர்ங்கோண இரு கூறாக்கி $x - y + 3 = 0$ 5

கூர்ங்கோண இரு கூறாக்கி பரமனத்தில் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

Let $x = t$ for $t \in \mathbb{R}$. 5

Then $y = x + 3 = t + 3$. 5

55

தேவையான வட்டத்தின் மையம் கூர்ங்கோண இரு கூறாக்கியில் இருக்க வேண்டும் 5

$\therefore$ மையம் $(t, t+3)$ for $t \in \mathbb{R}$ எனும் வடிவில் இருக்கும்

ஆரை $= \dfrac{|4t - 3(t+3) + 8|}{5} = \left|\dfrac{t-1}{5}\right|$ 5 5

$\therefore$ சமன்பாடு

$$(x-t)^2 + (y-(t+3))^2 = \tfrac{1}{25}(t-1)^2$$ 5

That is $(x-t)^2 + (y-t-3)^2 = \frac{1}{25}(t-1)^2$, where $t \in \mathbb{R}$.

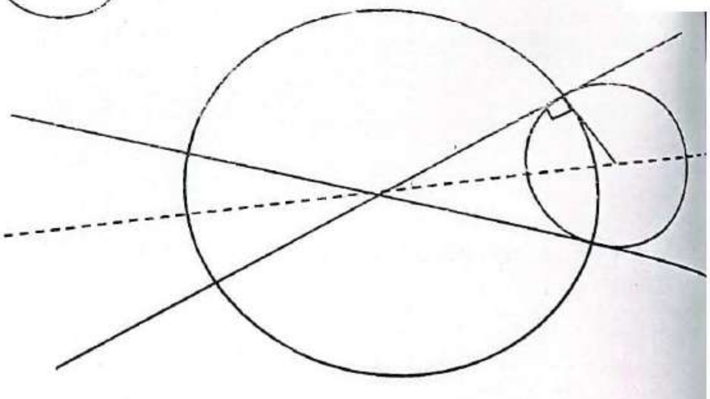
5

25

நிமிர்கோணத்தில் இடைவெட்டும் வட்டங்களுக்கு பைதகரசு தேற்றத்தை பிரயோகிக்க

10

$$(t-1)^2 + (t+3-4)^2 = 1^2 + \frac{1}{25}(t-1)^2$$



$\therefore \quad (t-1)^2 = 25$

$\Rightarrow t-1 = 5 \quad \text{or} \quad t-1 = -5$

$\therefore \quad t = 6 \quad \text{or} \quad t = -4$ 5 5

$\therefore$ Equation of circle that intersects S orthogonally an $(x-6)^2 + (y-9)^2 = 1$, $(x+4)^2 + (y-7$

5 5

30

---

17. (*a*) Write down $\cos(A+B)$ in terms of $\cos A$, $\cos B$, $\sin A$ and $\sin B$, and obtain a similar expression for $\sin(A-B)$.

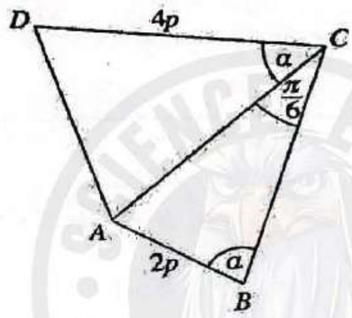
Let $k \in \mathbb{R}$ and $k \neq 1$. By separately considering the cases $k > 1$ and $k < 1$, express

$2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ in the form $R\cos(\theta+\alpha)$, where $R(>0)$ in terms of k, and $\alpha(0<\alpha<2\pi)$ are real constants to be determined.

Hence, solve $2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=|k-1|$.

(*b*) In the quadrilateral $ABCD$ shown in the figure $AB=2p$, $CD=4p$, $A\hat{C}B=\frac{\pi}{6}$ and $A\hat{B}C=A\hat{C}D=\alpha$. Show that $AD^2=16p^2(\sin^2\alpha-\sin 2\alpha+1)$.

Hence, show that if $AD=4p$, then $\alpha=\tan^{-1}(2)$.



(*c*) Solve, $\tan^{-1}(\ln x^{\frac{2}{3}})+\tan^{-1}(\ln x)+\tan^{-1}(\ln x^2)=\frac{\pi}{2}$ for $x>1$.

(*a*) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ 5

$$\sin(A-B)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(A-B)\right) \quad 5$$

$$=\cos\left((\frac{\pi}{2}-A)+B\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\cos B-\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\sin B \quad 5$$

$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B \quad 5$$

20

$$2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2k\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)+2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad 10$$

$$=k\left(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\right)+\left(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta\right) \quad 5$$

$$=(k-1)\left(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\right)$$

$$=2(k-1)\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) \quad 5$$

$$=2(k-1)\cos(\theta+\beta) \quad \text{where } \beta=\frac{\pi}{3} \quad 5$$

when $k>1$ $\quad 2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2(k-1)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

where $R=2(k-1)$ and $\alpha=\frac{\pi}{3}$. 5

when $k<1$ $\quad 2k\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2(1-k)\cos\left(\pi+\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$$=2(1-k)\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)$$

where $R=2(k-1)$ and $\alpha=\frac{4\pi}{3}$. 5

35

$$2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=|k-1|$$

when $k>1$

$$2(k-1)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=k-1$$

$$\therefore \cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$ 5

$$\Rightarrow \theta+\frac{\pi}{3}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3} \quad n\in\mathbb{Z}$$

$$\therefore \quad \theta=2n\pi-\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}\ n\in\mathbb{Z}.$$ 5

when $k<1$

$$2(1-k)\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)=1-k$$

$$\therefore \quad \cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$ 5

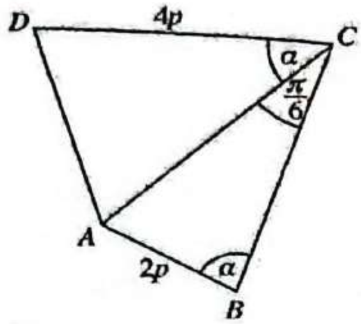
$$\theta+\frac{4\pi}{3}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}n\in\mathbb{Z}.$$

$$\therefore \quad \theta=2n\pi-\frac{4\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}n\in\mathbb{Z}.$$

5

20

(b) முக்கோணம் ABC: இற்கு சைன் விதி 10



$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{2p}{\sin\frac{\pi}{6}} \Rightarrow b = 4p\sin\alpha \quad 5$$

Cosine Rule for the triangle ACD:

$$AD^2 = b^2 + (4p)^2 - 2b(4p)\cos\alpha \quad 10$$

$$= 16p^2\sin^2\alpha + 16p^2 - 2(4p)^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= 16p^2(\sin^2\alpha - \sin 2\alpha + 1) \quad 5$$

30

If $AD = 4p$, the ADC is an isosceles triangle, we have

$\sin^2\alpha - \sin 2\alpha + 1 = 1$

$\sin\alpha(\sin\alpha - 2\cos\alpha) = 0$ 5

Since $\sin\alpha \neq 0$,

$\sin\alpha = 2\cos\alpha$ 5

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$ $\cos\alpha \neq 0$

$\therefore$ $\tan\alpha = 2$

$\alpha = \tan^{-1}(2)$ 5

15
