09118

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2021(2022)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2021(2022)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2021(2022)

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 T I

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

வினாத்தாளை வாசித்து, வினாக்களைத் தெரிவுசெய்வதற்கும் விடை எழுதும்போது முன்னுரிமை வழங்கும் வினாக்களை ஒழுங்கமைத்துக் கொள்வதற்கும் மேலதிக வாசிப்பு நேரத்தைப் பயன்படுத்துக.

சுட்டெண்							

அறிவுறுத்தல்கள் :

※ இவ்வினாத்தாள் பகுதி **A** (வினாக்கள் 1 - 10), பகுதி **B** (வினாக்கள் 11 - 17) என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டது.

※ பகுதி **A :**
எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்குமுரிய உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.

※ பகுதி **B :**
ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக. உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள தாள்களில் எழுதுக.

※ ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி **A** இன் விடைத்தாளானது பகுதி **B** இன் விடைத்தாள்களுக்கு மேலே இருக்கத்தக்கதாக, இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.

※ வினாத்தாளின் பகுதி **B** ஐ மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்கு மாத்திரம்

(10) இணைந்த கணிதம் I		
பகுதி	வினா எண்	புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

மொத்தம்

இலக்கத்தில்	
எழுத்தில்	

குறியீட்டெண்கள்

விடைத்தாள் பரீட்சகர்		
பரிசீலித்தவர்:	1	
	2	
மேற்பார்வை செய்தவர்:		

tamilguru.lk

[பக். 2 ஐப் பார்க்க

பகுதி A

1. **கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப்** பயன்படுத்தி, எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $\sum_{r=1}^{n}(6r+1) = n(3n+4)$ என நிறுவுக.

2. ஒரே வரிப்படத்தில் $y = 2|x+1|$, $y = 2-|x|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளைப் பரும்படியாக வரைக. **இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக,** சமனிலி $2|x+2|+|x| \leq 4$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.

[பக். 3 ஐப் பார்க்க

சுட்டெண் | | | | | | | |

3. ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில், $\text{Arg}(z-1-i)=-\frac{\pi}{4}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கைப் பருமட்டாக வரைக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $\text{Arg}(iz+1-i)=\frac{\pi}{4}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் $|z-2+i|$இன் இழிவுப் பெறுமானம் $\frac{1}{\sqrt{2}}$ எனக் காட்டுக.

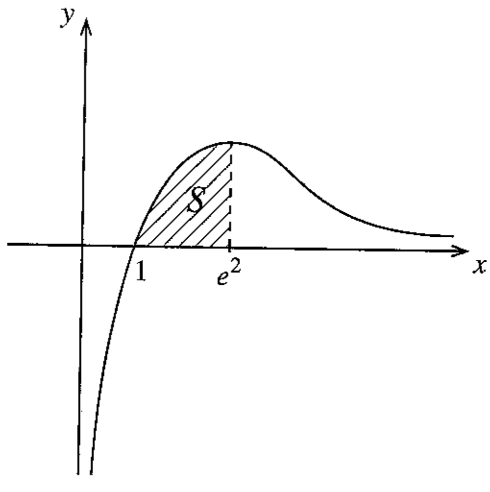
4. $k>0$ எனக் கொள்வோம். $\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^{11}$ இன் ஈருறுப்பு விரியில் உள்ள x^7 இன் குணகமும் $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{11}$ இன் ஈறுப்பு விரியில் உள்ள x^{-7} இன் குணகமும் சமமெனத் தரப்பட்டுள்ளது. $k=1$ எனக் காட்டுக.

[பக். 4 ஐப் பார்க்க

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)} = 4$ எனக் காட்டுக.

6. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}},\ y=0,\ x=e^2$ ஆகிய வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசம் S எனக் கொள்வோம். S இன் பரப்பளவு 4 சதுர அலகுகளெனக் காட்டுக.

பிரதேசம் S ஆனது x-அச்சைப் பற்றி 2π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றப்படுகின்றது. இவ்வாறு பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\dfrac{8\pi}{3}$ எனக் காட்டுக.



[பக். 5 ஐப் பார்க்க

7. $t \neq 0$ இற்கு $x = ct,\ y = \frac{c}{t}$ ஆகியவற்றினால் பரமானமுறையாகத் தரப்படும் செங்கோண அதிபரவளைவுக்குப் புள்ளி $P \equiv \left(cp,\ \frac{c}{p}\right)$ இல் உள்ள தொடலிக் கோட்டின் சமன்பாடு $x + p^2 y = 2cp$ எனக் காட்டுக.
இவ்வதிபரவளைவுக்குப் P இல் உள்ள செவ்வன் கோடு அதிபரவளைவை வேறொரு புள்ளி $Q \equiv \left(cq,\ \frac{c}{q}\right)$ இல் மறுபடியும் சந்திக்கின்றது. $p^3 q = -1$ எனக் காட்டுக.

8. $A \equiv (0, -1)$ எனவும் $B \equiv (9, 8)$ எனவும் கொள்வோம். AB மீது புள்ளி C ஆனது $AC : CB = 1 : 2$ ஆக இருக்குமாறு உள்ளது. C இனூடாக AB இற்குச் செங்குத்தாக உள்ள நேர்கோடு l இன் சமன்பாடு $x + y - 5 = 0$ எனக் காட்டுக.
AD ஆனது நேர்கோடு $y = 5x + 1$ இற்குச் சமாந்தரமாக இருக்குமாறு l மீது உள்ள புள்ளி D எனக் கொள்வோம். D இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

[பக். 6 ஐப் பார்க்க

9. நேர்கோடு $x + 2y = 3$ ஆனது வட்டம் $S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$ ஐ இரு வேறுவேறான புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றதெனக் காட்டுக.
இவ்விரு புள்ளிகளினூடாகவும் வட்டம் $S = 0$ இன் மையத்தினூடாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

10. $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 1$ ஐ வடிவம் $R\cos(2x - \alpha)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $R > 0$ உம் $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ உம் ஆகும்.
இதிலிருந்து, சமன்பாடு $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x = 1$ ஐத் தீர்க்க.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2021(2022)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2021(2022)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2021(2022)

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 T I

பகுதி B

※ **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (*a*) $k>1$ எனக் கொள்வோம். சமன்பாடு $x^2-2(k+1)x+(k-3)^2=0$ இற்கு வேறுவேறான மெய்ம் மூலங்கள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக.

α, β ஆகியன இம்மூலங்களெனக் கொள்வோம். $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ ஆகியவற்றை k இல் எழுதி, α, β ஆகிய இரண்டும் நேராக இருக்குமாறு k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இப்போது $1<k<3$ எனக் கொள்வோம். $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}, \dfrac{1}{\sqrt{\beta}}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை k இல் காண்க.

(*b*) $f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$ எனவும் $g(x)=x^3+cx^2+ax+1$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $a, b, c \in \mathbb{R}$ ஆகும். $f(x)$ ஆனது $(x-1)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி 5 எனவும் $g(x)$ ஆனது x^2+x-2 இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி $x+1$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. $a,\ b,\ c$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

மேலும் $a,\ b,\ c$ ஆகியவற்றுக்கான இப்பெறுமானங்களுடன் எல்லா $x\in\mathbb{R}$ இற்கும் $f(x)-2g(x)\le\dfrac{13}{12}$ எனக் காட்டுக.

12. (*a*) கீழே தரப்பட்டுள்ள 10 இலக்கங்களிலிருந்தும் எடுக்கப்படும் 4 இலக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு 4 இலக்க எண்ணை அமைக்க வேண்டியுள்ளது :

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5

(i) தெரிந்தெடுக்கப்படும் எல்லா 4 இலக்கங்களும் வேறுபட்டனவாக இருப்பின்,

(ii) எந்த 4 இலக்கங்களும் தெரிந்தெடுக்கப்படலாமெனின்,

அமைக்கத்தக்க அத்தகைய வேறுபட்ட 4 இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(*b*) $r\in\mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r=\dfrac{-16r^3+12r^2+40r+9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$ எனக் கொள்வோம்.

$r\in\mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r=\dfrac{A(r-1)}{(2r+1)^2}-\dfrac{(r-B)}{(2r-1)^2}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $A,\ B$ ஆகிய மெய்ம் மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைத் துணிக.

இதிலிருந்து, $r\in\mathbb{Z}^+$ இற்கு $\dfrac{1}{5^{r-1}}U_r=f(r)-f(r-1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $f(r)$ ஐக் கண்டு,

$n\in\mathbb{Z}^+$ இற்கு $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{5^{r-1}}U_r=1+\frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{5^{r-1}}U_r$ ஒருங்குகின்றதென **உய்த்தறிந்து**, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ எனவும் $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $a \in \mathbb{R}$.

மேலும் $\mathbf{C} = \mathbf{AB}^{\mathrm{T}}$ எனவும் கொள்வோம். $\mathbf{C}$ ஐ a இற் கண்டு, எல்லா $a \neq 0$ இற்கும் $\mathbf{C}^{-1}$ இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

$\mathbf{C}^{-1}$ இருக்கும்போது அதனை a இல் எழுதுக.

$\mathbf{C}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}$ எனின், $a = 2$ எனக் காட்டுக.

a இற்கான இப்பெறுமானத்துடன் $\mathbf{DC} - \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{C} = 8\mathbf{I}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாகத் தாயம் $\mathbf{D}$ ஐக் காண்க; இங்கு $\mathbf{I}$ ஆனது வரிசை 2 ஆகவுள்ள சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமாகும்.

(*b*) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ எனவும் $z_2 = 1 + i$ எனவும் கொள்வோம். $\frac{z_1}{z_2}$ ஐ வடிவம் $x + iy$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $x, y \in \mathbb{R}$.

மேலும் z_1, z_2 ஆகிய சிக்கலெண்கள் ஒவ்வொன்றையும் வடிவம் $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $r > 0$ உம் $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ உம் ஆகும். **இதிலிருந்து,** $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ எனக் காட்டுக.
$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ என **உய்த்தறிக.**

(*c*) $n \in \mathbb{Z}^+$ எனவும் $k \in \mathbb{Z}$ இற்கு $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ எனவும் கொள்வோம்.

த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, $(1 + i\tan\theta)^n = \sec^n\theta(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $(1 - i\tan\theta)^n$ இற்கு ஓர் இயல்பொத்த கோவையைப் பெற்று,

$(1 + i\tan\theta)^n + (1 - i\tan\theta)^n = 2\sec^n\theta\cos n\theta$ எனக் காட்டுக.

$z = i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$ ஆனது $(1+z)^{25} + (1-z)^{25} = 0$ இன் ஒரு தீர்வென **உய்த்தறிக.**

14. (*a*) $x \neq 0, 2$ இற்கு $f(x) = \frac{4x+1}{x(x-2)}$ எனக் கொள்வோம்.

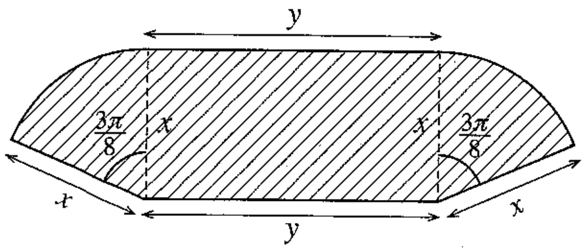
$x \neq 0, 2$ இற்கு $f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $f'(x) = -\frac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $f(x)$ அதிகரிக்கும் ஆயிடைகளையும் $f(x)$ குறையும் ஆயிடைகளையும் காண்க.

அணுகுகோடுகள், x-வெட்டுத்துண்டு, திரும்பற் புள்ளிகள் ஆகியவற்றைக் காட்டி $y = f(x)$ இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

இவ்வரைபைப் பயன்படுத்திச் சமனிலி $f(x) + |f(x)| > 0$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.

(*b*) இங்கு உள்ள உருவில் நிழற்றப்பட்டுள்ள பிரதேசம் S ஆனது ஒரு செவ்வகத்தையும் ஒவ்வொன்றும் மையத்தில் கோணம் $\frac{3\pi}{8}$ ஐ எதிரமைக்கும் ஒரு வட்டத்தின் இரு ஆரைச்சிறைகளையும் கொண்ட ஒரு தோட்டத்தைக் காட்டுகின்றது. அதன் பரிமாணங்கள் மீற்றரில் உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளன. S இன் பரப்பளவு $36\ \mathrm{m}^2$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. S இன் சுற்றளவு p m ஆனது $x > 0$ இற்கு $p = 2x + \frac{72}{x}$ இனால் தரப்படுகின்றது எனவும் $x = 6$ ஆக இருக்கும்போது p இழிவு எனவும் காட்டுக.



[பக். 9 ஐப் பார்க்க

15. (*a*) எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $x^4+3x^3+4x^2+3x+1 = A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1) + Cx^2$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B, C ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $\dfrac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களில் எழுதி,

$\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$ ஐக் காண்க.

(*b*) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right)dx$ எனக் கொள்வோம். $I = \dfrac{\pi}{24} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$ எனக் காட்டி, **இதிலிருந்து,** I இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(*c*) $\dfrac{d}{dx}\left(x\ln(x^2+1) + 2\tan^{-1}x - 2x\right) = \ln(x^2+1)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$ ஐக் கண்டு, $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}(\ln 4 + \pi - 4)$ எனக் காட்டுக.

a ஒரு மாறிலியாகவுள்ளபோது பேறு $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ஐப் பயன்படுத்தி

$\displaystyle\int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

16. $P \equiv (x_1, y_1)$ எனவும் l ஆனது $ax+by+c=0$ இனால் தரப்படும் நேர்கோடு எனவும் கொள்வோம். புள்ளி P இனூடான l இற்குச் செங்குத்தான கோடு மீது உள்ள புள்ளி எதனதும் ஆள்கூறுகள் (x_1+at, y_1+bt) இனால் தரப்படுகின்றனவெனக் காட்டுக; இங்கு $t \in \mathbb{R}$.

P இலிருந்து l இற்குள்ள செங்குத்துத் தூரம் $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ என **உய்த்தறிக.**

l ஆனது நேர்கோடு $x+y-2=0$ எனக் கொள்வோம். $A \equiv (0, 6)$, $B \equiv (3, -3)$ ஆகிய புள்ளிகள் l இன் இரு பக்கங்களிலும் இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக.

l இற்கும் கோடு AB இற்குமிடையே உள்ள கூர்ங்கோணத்தைக் காண்க.

l ஐத் தொடுவனவும் முறையே A, B ஆகிய மையங்களைக் கொண்டனவுமான S_1, S_2 என்னும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

l இனதும் கோடு AB இனதும் வெட்டுப் புள்ளி C எனக் கொள்வோம். புள்ளி C இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

S_1, S_2 ஆகியவற்றுக்கு C இனூடாக உள்ள மற்றைய பொதுத் தொடலியின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

உற்பத்தியினூடாகச் செல்வதும் S_1 இன் பரிதியை இருகூறிடுவதும் S_2 இற்கு நிமிர்கோணமானதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு $3x^2+3y^2-38x-22y=0$ எனக் காட்டுக.

[பக். 10 ஐப் பார்க்க

17. (*a*) $\cos(A+B)$, $\cos(A-B)$ ஆகியவற்றை $\cos A$, $\cos B$, $\sin A$, $\sin B$ ஆகியவற்றில் எழுதுக.

இதிலிருந்து, $\cos C+\cos D=2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$ எனக் காட்டுக.

$\cos C-\cos D=-2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$ என **உய்த்தறிக.**

சமன்பாடு $\cos 9x+\cos 7x+\cot x\,(\cos 9x-\cos 7x)=0$ ஐத் தீர்க்க.

(*b*) வழக்கமான குறிப்பீட்டில், ஒரு முக்கோணி ABC இற்குக் **கோசைன் நெறியைக்** கூறி நிறுவுக.

$n\in\mathbb{Z}$ இற்கு $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ எனக் கொள்வோம். $\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ எனக் காட்டுக.

ஒரு முக்கோணி ABC இல் $AB=20$ cm, $BC=10$ cm, $\sin 2B=\frac{24}{25}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

அத்தகைய இரு வேறுவேறான முக்கோணிகள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டி, ஒவ்வொன்றுக்கும் AC இன் நீளத்தைக் காண்க.

(*c*) சமன்பாடு $\sin^{-1}\left[(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}\right]+\tan^{-1}(e^{x})=\tan^{-1}(2)$ ஐத் தீர்க்க.

***

More Past Papers at
tamilguru.lk

09118

AL/2021(2022)/10/T-II

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2021(2022)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2021(2022)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2021(2022)

සංයුක්ත ගණිතය II
இணைந்த கணிதம் II
Combined Mathematics II

10 T II

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

வினாத்தாளை வாசித்து, வினாக்களைத் தெரிவுசெய்வதற்கும் விடை எழுதும்போது முன்னுரிமை வழங்கும் வினாக்களை ஒழுங்கமைத்துக் கொள்வதற்கும் மேலதிக வாசிப்பு நேரத்தைப் பயன்படுத்துக.

சுட்டெண்							

அறிவுறுத்தல்கள் :

* இவ்வினாத்தாள் பகுதி **A** (வினாக்கள் 1 - 10), பகுதி **B** (வினாக்கள் 11 - 17) என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டது.
* பகுதி **A :**
எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்குமுரிய உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
* பகுதி **B :**
ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக. உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள தாள்களில் எழுதுக.
* ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி **A** இன் விடைத்தாளானது பகுதி **B** இன் விடைத்தாள்களுக்கு மேலே இருக்கத்தக்கதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
* வினாத்தாளின் பகுதி **B** ஐ மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.
* இவ்வினாத்தாளில் g ஆனது புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகலைக் குறிக்கின்றது.

பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்கு மாத்திரம்

(10) இணைந்த கணிதம் II		
பகுதி	வினா எண்	புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

மொத்தம்

இலக்கத்தில்	
எழுத்தில்	

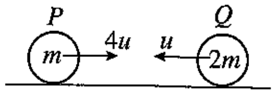
குறியீட்டெண்கள்

விடைத்தாள் பரீட்சகர்		
பரிசீலித்தவர்:	1	
	2	
மேற்பார்வை செய்தவர்		

[பக். 2 ஐப் பார்க்க

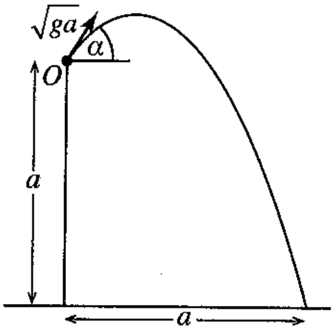
பகுதி A

1. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உம் திணிவு $2m$ ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை Q உம் ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது ஒரே நேர்கோட்டின் வழியே ஒன்றையொன்று நோக்கி முறையே $4u$, u என்னும் கதிகளுடன் இயங்கி நேரடியாக மோதுகின்றன. P இற்கும் Q இற்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் $\frac{4}{5}$ ஆகும். மோதுகைக்குப் பின்னர் P உம் Q உம் ஒன்றிலிருந்தொன்று எதிர்த் திசைகளில் இயங்குகின்றனவெனக் காட்டுக.

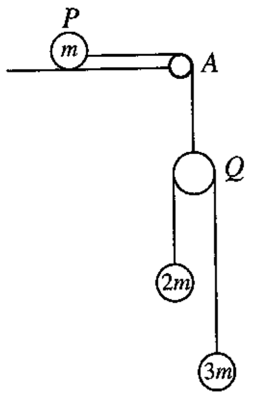


மோதுகைக்குப் பின்னர் P உம் Q உம் ஒன்றுக்கொன்று இடைத்தூரம் a இல் இருப்பதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

2. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஒரு கிடைத் தரைக்கு மேலே நிலைக்குத்துத் தூரம் a இல் உள்ள ஒரு புள்ளி O இலிருந்து ஒரு துணிக்கை கிடையுடன் கோணம் $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ இல் தொடக்க வேகம் $\sqrt{ga}$ உடன் எறியப்படுகின்றது. துணிக்கை புள்ளி O இலிருந்து கிடைத் தூரம் a இல் தரையில் அடிக்கின்றது. $\tan\alpha = 1+\sqrt{2}$ எனக் காட்டுக.

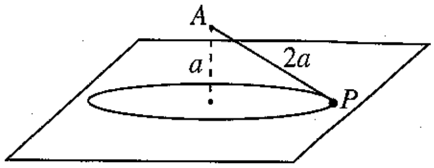


3. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது வைக்கப்பட்டு, மேசையின் ஓரத்தின் புள்ளி A இல் நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஒரு நிலைத்த சிறிய ஒப்பமான கப்பிக்கு மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் ஓர் இலேசான ஒப்பமான கப்பி Q உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு கப்பி Q இற்கு மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் $2m$, $3m$ என்னும் திணிவுகளை உடைய துணிக்கைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கைகளும் இழைகளும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இருக்கின்றன. இழைகள் இறுக்கமாக இருக்கத் தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. Q இன் ஆர்முடுகலைத் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக.



4. M kg திணிவுள்ள ஒரு கார் கிடையுடன் சாய்வு $\sin^{-1}\left(\frac{1}{20}\right)$ ஐக் கொண்ட ஒரு நேர் வீதி வழியே ஒரு மாறா ஆர்முடுகலுடன் மேல்நோக்கி இயங்குகின்றது. அதன் இயக்கத்திற்கு ஒரு மாறாத் தடை R N உள்ளது. அது தன் கதியை 36 km h^{-1} இலிருந்து 72 km h^{-1} இற்கு அதிகரிக்கச் செய்வதற்குக் கார் சென்ற தூரம் 500 m ஆகும். அதன் கதி 54 km h^{-1} ஆக இருக்கும்போது கார் உஞற்றிய வலுவைத் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

5. நீளம் $2a$ ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசைக்கு நிலைக்குத்தாக மேலே தூரம் a இல் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி A உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் மற்றைய நுனியுடன் இணைக்கப்பட்ட திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது இழை இறுக்கமாக இருக்க மேசை மீது ஒரு கிடை வட்டத்தில் சீரான கதி $\sqrt{\frac{ga}{2}}$ உடன் இயங்குகின்றது (உருவைப் பார்க்க). மேசையின் மூலம் துணிக்கை P மீது பிரயோகிக்கப்படும் செவ்வன் மறுதாக்கத்தின் பருமன் $\frac{5}{6}mg$ எனக் காட்டுக.

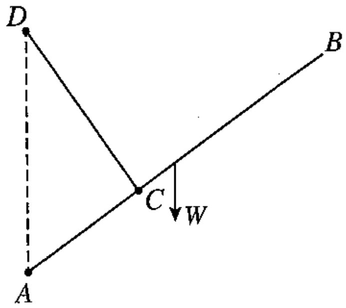


6. வழக்கமான குறிப்பீட்டில், ஒரு நிலைத்த உற்பத்தி O பற்றி A, B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$, $\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ ஆகும். $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$ ஐப் பயன்படுத்தி $O\hat{A}B$ ஐக் காண்க.

C ஆனது OA மீது $O\hat{C}B=\frac{\pi}{2}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளி எனக் கொள்க. $\overrightarrow{OC}$ ஐக் காண்க.

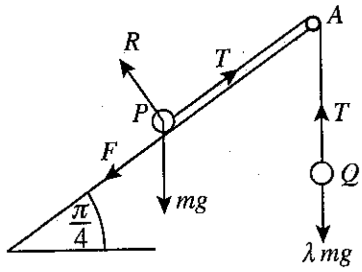
[பக். 5 ஐப் பார்க்க

7. நீளம் $8a$ ஐயும் நிறை W ஐயும் உடைய ஒரு சீரான கோல் AB இன் முனை A ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. நீளம் $4a$ ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி கோல் மீது $AC = 3a$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளி C உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை மற்றைய நுனி A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே $AD = 5a$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி D உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் நாப்பத்தில் இருக்கின்றது. இழையின் இழுவை $\frac{16}{15}W$ எனக் காட்டுக. A இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடைக் கூறையும் காண்க.



....

8. கிடையுடன் கோணம் $\frac{\pi}{4}$ இற் சாய்ந்த ஒரு கரடான தளத்தின் மீது திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P வைக்கப்பட்டுள்ளது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு சாய்தளத்தின் ஓரத்திலே A இல் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான சிறிய கப்பிக்கு மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி துணிக்கை P உடனும் மற்றைய நுனி திணிவு λmg ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை Q உடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை P இற்கும் சாய்தளத்திற்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ ஆகும். கோடு PA ஆனது சாய்தளத்தின் ஓர் அதியுயர் சரிவுக்கோடாக இருக்கும் அதே வேளை இழை இறுக்கமாக இருக்க P, Q ஆகிய இரு துணிக்கைகளும் நாப்பத்தில் இருக்கின்றன.



$\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \lambda \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}$ எனக் காட்டுக. (உரிய விசைகள் உருவிற் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.)

....

9. A, B ஆகியன ஒரு மாதிரி வெளி Ω இன் இரு சாரா நிகழ்வுகளெனக் கொள்வோம். வழக்கமான குறிப்பீட்டில், $P(A)=\frac{1}{5}$ எனவும் $P(B)=\frac{3}{4}$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. $P(A\cup B)$, $P(A|A\cup B)$, $P(B|A')$ ஆகியவற்றைக் காண்க; இங்கு A' ஆனது A இன் நிரப்பு நிகழ்வைக் குறிக்கின்றது.

10. நேர் நிறைவெண்களின் ஐந்து நோக்கல்களின் ஒரு தொடையின் இடை 6 உம் வீச்சு 10 உம் ஆகும். அதற்கு இரு ஆகாரங்கள் உள்ளன. இடையம் ஆகாரங்களிலிருந்து வேறுபடுமெனின், ஐந்து நோக்கல்களையும் காண்க.

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි /முழுப் பதிப்புரிமையுடையது /All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2021(2022)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2021(2022)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2021(2022)

සංයුක්ත ගණිතය	II
இணைந்த கணிதம்	II
Combined Mathematics	II

10 T II

பகுதி B

※ **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

(இவ்வினாத்தாளில் g ஆனது புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகலைக் குறிப்பிடுகின்றது.)

11. (*a*) ஒரு புள்ளி O இலிருந்து நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி வேகம் $u \text{ m s}^{-1}$ உடன் எறியப்படும் ஒரு துணிக்கை P ஆனது 4 செக்கன்களுக்குப் பின்னர் ஒரு புள்ளி A ஐ அடையும் அதே வேளை மேலும் 2 செக்கன்களுக்குப் பின்னர் மறுபடியும் A இற்கு வருகின்றது. துணிக்கை P இரண்டாம் தடவை A இல் இருக்கும் கணத்தில் வேறொரு துணிக்கை Q ஆனது O இலிருந்து நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி அதே வேகம் $u \text{ m s}^{-1}$ உடன் எறியப்படுகின்றது. P, Q ஆகியவற்றின் இயக்கங்களுக்கான வேக-நேர வரைபை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக.

இதிலிருந்து, g இல் u இன் பெறுமானத்தையும் OA இன் உயரத்தையும் P உடன் மோதுவதற்கு Q எடுக்கும் நேரத்தையும் காண்க.

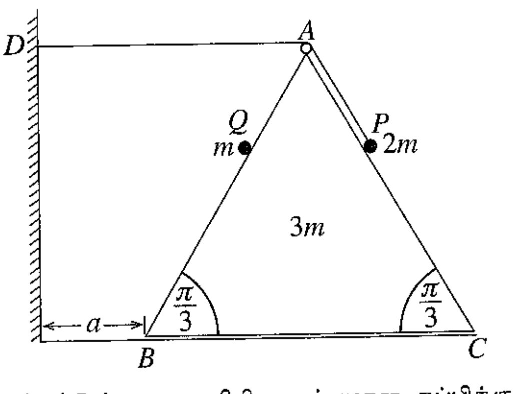
(*b*) ஒரு கப்பல் S நிலம் தொடர்பாகச் சீரான கதி $u \text{ km h}^{-1}$ உடன் வடக்கு நோக்கிச் செல்கின்றது. ஒரு குறித்த கணத்தில் S இலிருந்து கிழக்கே d km தூரத்தில் ஒரு படகு P உம் S இலிருந்து தெற்கே $\sqrt{3}\,d$ km தூரத்தில் வேறொரு படகு Q உம் இருக்கின்றன. படகு P நிலம் தொடர்பாகச் சீரான கதி $2u \text{ km h}^{-1}$ உடன் ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையில் S ஐ இடைமறிப்பதற்குச் செல்லும் அதே வேளை படகு Q நிலம் தொடர்பாகச் சீரான கதி $3u \text{ km h}^{-1}$ உடன் ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையில் P ஐ இடைமறிப்பதற்குச் செல்கின்றது.

(i) படகு P ஆனது கப்பல் S ஐ இடைமறிப்பதற்கு எடுக்கும் நேரம் $\dfrac{d}{\sqrt{3}u}$ h எனவும்

(ii) படகு Q ஆனது படகு P ஐ இடைமறிப்பதற்கு முன்பாகப் படகு P கப்பல் S ஐ இடைமறிக்கும் எனவும்

காட்டுக.

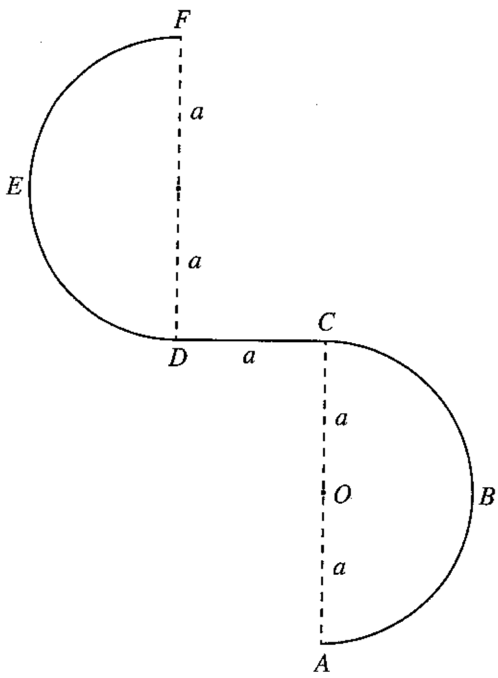
12. (*a*) உருவில் சமபக்க முக்கோணி ABC ஆனது $AB = BC = AC = 6a$ ஆகவும் BC ஐக் கொண்டுள்ள முகம் ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்தின் மீதும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்ட திணிவு $3m$ ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான சீரான ஆப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடான நிலைக்குத்துக் குறுக்குவெட்டாகும். AB, AC ஆகிய கோடுகள் அவற்றைக் கொண்டுள்ள முகங்களின் அதியுயர் சரிவுக் கோடுகளாகும். புள்ளி D ஆனது AD கிடையாக இருக்குமாறு ABC இன் தளத்தில் ஆப்பின் புள்ளி B இலிருந்து தூரம் a இல் உள்ள நிலைக்குத்துச் சுவர் மீதான ஒரு நிலைத்த புள்ளியாகும். A இல் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு சிறிய ஒப்பமான கப்பிக்கு மேலாகச் செல்லும் நீளம் $5a$ ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி AC மீது வைக்கப்பட்டுள்ள திணிவு $2m$ ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை மற்றைய நுனி சுவர் மீது உள்ள நிலைத்த புள்ளி D உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை Q ஆனது AB மீது தாங்கப்பட்டுள்ளது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு $AP = AQ = a$ ஆக இருக்கத் தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது.



ஆப்பு சுவரில் அடிக்கும் கணத்தில் ஆப்புத் தொடர்பாக Q இன் வேகத்தைத் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

[பக். 8 ஐப் பார்க்க

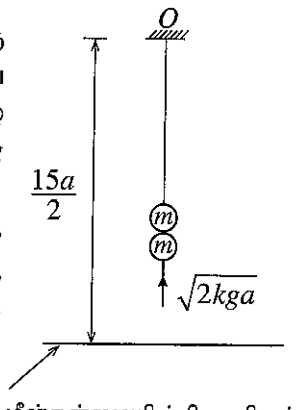
(*b*) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஒரு மெல்லிய கம்பி $ABCDEF$ ஆனது நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. பகுதி ABC ஆனது மையம் O ஐயும் ஆரை a ஐயும் கொண்ட ஒரு மெல்லிய **ஒப்பமான** அரைவட்டக் கம்பியாகும். பகுதி CD ஆனது நீளம் a ஐ உடைய ஒரு மெல்லிய **கரடான** கிடைக் கம்பியாகும். பகுதி DEF உம் ஆரை a ஐ உடைய ஒரு மெல்லிய **ஒப்பமான** அரைவட்டக் கம்பியாகும். AC, DF ஆகிய விட்டங்கள் நிலைக்குத்தானவை. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு சிறிய ஒப்பமான மணி P ஆனது A இல் வைக்கப்பட்டுக் கிடையாக ஒரு வேகம் $u\left(>3\sqrt{ag}\right)$ கொடுக்கப்படும் அதே வேளை அது கம்பி வழியே இயங்கத் தொடங்குகின்றது. மணியின் C இலிருந்து D வரையுள்ள இயக்கத்தில் மணி மீது கம்பியின் மூலம் பிரயோகிக்கப்படும் உராய்வு விசையின் பருமன் $\frac{1}{2}mg$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. மணி P இன் A இலிருந்து C வரையுள்ள இயக்கத்தில் $\overrightarrow{OP}$ ஆனது $\overrightarrow{OA}$ உடன் கோணம் $\theta\ (0 \le \theta \le \pi)$ ஐ ஆக்கும்போது அதன் கதி v ஆனது $v^2 = u^2 - 2ag(1-\cos\theta)$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.



F இல் கம்பியைப் பிரிந்து செல்வதற்குச் சற்று முன்னர் மணி P இன் கதி w ஆனது $w^2 = u^2 - 9ag$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டி, அக்கணத்தில் கம்பியின் மூலம் மணி P மீது பிரயோகிக்கப்படும் மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

13. இயற்கை நீளம் $4a$ ஐ உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடனும் மற்றைய நுனி திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை O இற்குக் கீழே தூரம் $5a$ இல் நாப்பத்தில் தொங்குகின்றது. இழையின் மீள்தன்மை மட்டு $4mg$ எனக் காட்டுக.

இப்போது திணிவு m ஐ உடைய வேறொரு துணிக்கை Q நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி இயங்கி P உடன் மோதி ஒன்றிணைந்து ஒரு சேர்த்தித் துணிக்கை R ஐ ஆக்குகின்றது. துணிக்கை P உடன் மோதுவதற்குச் சற்று முன்னர் துணிக்கை Q இன் கதி $\sqrt{2kga}$ ஆகும். R இயங்கத் தொடங்கும் வேகத்தைக் காண்க.



இழை தளர்வுறாமல் இருந்து பின்னர் நடைபெறும் இயக்கத்தில் சேர்த்தித் துணிக்கை R இற்கு O இலிருந்து உள்ள தூரம் x ஆனது சமன்பாடு $\ddot{x} + \frac{g}{2a}(x-6a) = 0$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றதெனக் காட்டுக. $X = x - 6a$ என எழுதி, $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ எனக் காட்டுக; இங்கு $\omega = \sqrt{\frac{g}{2a}}$.

மேற்குறித்த எளிய இசை இயக்கத்தின் மையத்தையும் சூத்திரம் $\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ ஐப் பயன்படுத்தி வீச்சம் c ஐயும் காண்க.

$k > 3$ எனின், இழை தளர்வுறுமெனக் காட்டுக.

இப்போது, $k = 8$ எனக் கொள்வோம். P, Q ஆகிய துணிக்கைகள் ஒன்றிணையும் கணத்திலிருந்து புள்ளி O இற்குக் கீழே தூரம் $\frac{15}{2}a$ இல் ஒரு **மீள்தன்மையின்றிய கிடை நிலத்தில்** அடிப்பதற்குச் சேர்த்தித் துணிக்கை R எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

மேலும், சேர்த்தித் துணிக்கை R நிலத்தில் அடித்த பின்னர் அடையும் உயர்ந்தபட்ச உயரத்தையும் காண்க.

14. (*a*) **a, b** ஆகியன பூச்சியமல்லாதனவும் சமாந்தரமல்லாதனவுமான காவிகள் எனவும் $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ எனவும் கொள்வோம்.

$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0}$ எனின், $\lambda = 0$ எனவும் $\mu = 0$ எனவும் காட்டுக.

ABC ஒரு முக்கோணியெனக் கொள்வோம். AB இன் நடுப் புள்ளி D உம் CD இன் நடுப் புள்ளி E உம் ஆகும். BC, (நீட்டப்பட்ட) AE ஆகிய கோடுகள் F இற் சந்திக்கின்றன. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ எனவும் $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ எனவும் கொள்வோம். முக்கோணிக் கூட்டல் விதியைப் பயன்படுத்தி $\overrightarrow{AE} = \dfrac{\mathbf{a}+2\mathbf{b}}{4}$ எனக் காட்டுக.

$\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AE}$ ஆகவும் $\overrightarrow{CF} = \beta\overrightarrow{CB}$ ஆகவும் இருப்பது ஏனென விளக்குக; இங்கு $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

முக்கோணி ACF ஐக் கருதுவதன் மூலம் $(\alpha - 4\beta)\mathbf{a} + 2(\alpha + 2\beta - 2)\mathbf{b} = \mathbf{0}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, α , β ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

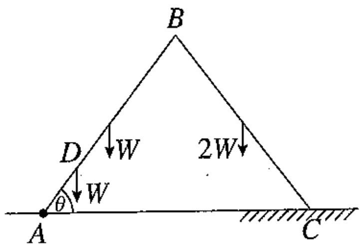
(*b*) ABC ஆனது ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $2a$ ஆகவுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணி எனவும் D, E, F ஆகியன முறையே AB, BC, AC ஆகியவற்றின் நடுப் புள்ளிகள் எனவும் கொள்வோம். $2P, \sqrt{3}P, 2\sqrt{3}P, \alpha P$ என்னும் பருமன்களை உடைய விசைகள் முறையே $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}$ வழியே தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதியின் விளையுள் $\overrightarrow{AC}$ இற்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்குகின்றதெனத் தரப்பட்டுள்ளது. α இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

விசைத் தொகுதி A இனூடாகத் தாக்கும் பருமன் R ஐ உடைய ஒரு தனி விசையுடன் பருமன் G ஐ உடைய ஓர் இணைக்குச் சமவலுவுள்ளது. R, G ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இவ்விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் எழுதி, AB ஐ விளையுளின் தாக்கக் கோடு சந்திக்கும் புள்ளிக்கு A இலிருந்து உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

இப்போது பருமன் H ஐ உடைய ஓர் இணை தொகுதியுடன் சேர்க்கப்படுகின்றது. இப்புதிய தொகுதியின் விளையுள் புள்ளி B இனூடாகத் தாக்குகின்றது. H இன் பெறுமானத்தையும் இவ்விணையின் போக்கையும் காண்க.

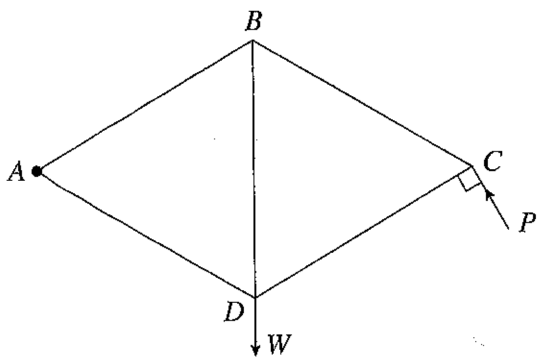
15. (*a*) ஒவ்வொன்றும் நீளம் $2a$ ஐ உடைய AB , BC என்னும் இரு சீரான கோல்கள் முனை B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. AB, BC ஆகிய கோல்களின் நிறைகள் முறையே $W, 2W$ ஆகும். முனை A ஒரு கிடை நிலத்தின் மீதுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் AB மீது, $AD = \dfrac{a}{2}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக, உள்ள புள்ளி D இல் நிறை W ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு தொகுதி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே, $B\hat{A}C = \theta$ ஆகவும் கோல் BC இன் முனைப் புள்ளி C மேற்குறித்த கிடை நிலத்தின் ஒரு கரடான பகுதி மீதும் இருக்குமாறு, நாப்பத்தில் உள்ளது. கோல் BC இற்கும் நிலத்திற்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும்.



$\cot\theta \leq \dfrac{15}{7}\mu$ எனக் காட்டுக.

CB இன் மூலம் AB மீது மூட்டு B இல் உஞற்றப்படும் மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

(*b*) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டப்படல், அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட சம நீளமுள்ள AB, BC, CD, DA, DB என்னும் ஐந்து இலேசான கோல்களைக் கொண்டுள்ளது. ஒரு சுமை W ஆனது மூட்டு D இல் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை சட்டப்படல் A இல் ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டு, ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில், BD நிலைக்குத்தாக இருக்க அதற்கு மூட்டு C இல் கோல் CD இற்குச் செங்குத்தாக உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ள திசையில் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு விசை P இன் மூலம், நாப்பத்தில் வைக்கப்படுகின்றது.



(i) P இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

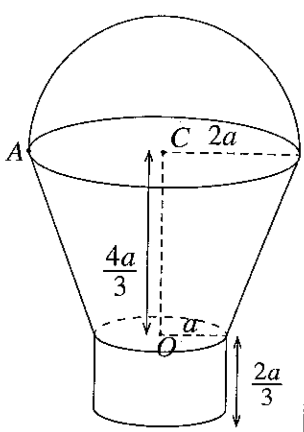
(ii) போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி, C, B, D ஆகிய மூட்டுகளுக்கு ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக. **இதிலிருந்து**, கோல்களில் உள்ள தகைப்புகளை அவை இழுவைகளா, உதைப்புகளா எனக் குறிப்பிட்டுக், காண்க.

16. (i) ஆரை a ஐ உடைய ஓர் அரைவட்ட வில்லின் வடிவமுள்ள ஒரு மெல்லிய சீரான கம்பியின் திணிவு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து தூரம் $\frac{2a}{\pi}$ இலும்

(ii) உயரம் h ஐ உடைய ஒரு சீரான பொட் செவ்வட்டக் கூம்பின் திணிவு மையம் அதன் அடியின் மையத்திலிருந்து தூரம் $\frac{1}{3}h$ இலும்

உள்ளனவெனக் காட்டுக.

உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு மேல் வட்ட விளிம்பினதும் கீழ் வட்ட விளிம்பினதும் ஆரைகள் முறையே $2a$, a ஆகவும் உயரம் $\frac{4a}{3}$ ஆகவும் உள்ள ஒரு பொட் செவ்வட்டக கூம்பின் அடித்துண்டின் வடிவமுள்ள ஒரு சீரான மெல்லிய ஓட்டுடன் பின்வரும் பகுதிகளை ஒவ்வொன்றும் ஓட்டினைச் சந்திக்கும் இடங்களில் விறைப்பாகப் பொருத்துவதன் மூலம் ஒரு வாளி செய்யப்பட்டுள்ளது.



- ஆரை a ஐயும் மையம் O ஐயும் கொண்ட ஒரு சீரான மெல்லிய வட்டத் தகடு
- ஆரை a ஐயும் உயரம் $\frac{2a}{3}$ ஐயும் கொண்ட பொட் செவ்வட்ட உருளையின் வடிவமுள்ள ஒரு சீரான மெல்லிய ஓடு
- ஆரை $2a$ ஐயும் மையம் C ஐயும் கொண்ட ஓர் அரைவட்டத்தின் வடிவமுள்ள ஒரு சீரான மெல்லிய கம்பி

அடித்துண்டு, தகடு, உருளை ஆகியவற்றின் அலகுப் பரப்பளவிற்கான திணிவு σ உம் கம்பியின் அலகு நீளத்திற்கான திணிவு $11a\sigma$ உம் ஆகும்.
வாளியின் திணிவு மையத்திற்கு O இலிருந்து உள்ள தூரம் $(10\pi + 27)\frac{a}{9\pi}$ எனக் காட்டுக.
கம்பி அடித்துண்டின் மேல் விளிம்பைச் சந்திக்கும் புள்ளி A இலிருந்து வாளி ஒரு நிலைக்குத்து இழையினால் சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்படும்போது நாப்பத் தானத்தில் OC கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணத்தைக் காண்க.

17. (*a*) A, B என்னும் இரு சர்வசமப் பெட்டிகள் ஒவ்வொன்றிலும் அவற்றின் நிறங்களைத் தவிர எல்லா அம்சங்களிலும் சர்வசமமான 10 பந்துகள் உள்ளன. பெட்டி A இல் 6 வெள்ளைப் பந்துகளும் 4 சிவப்புப் பந்துகளும் பெட்டி B இல் 8 வெள்ளைப் பந்துகளும் 2 சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. ஒரு பெட்டியை எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்து, அப்பெட்டியிலிருந்து ஒன்றின்பின் மற்றதாகப் பிரதிவைப்பு இல்லாமல் எழுமாற்றாக 3 பந்துகள் வெளியே எடுக்கப்படுகின்றன.

(i) இரு சிவப்புப் பந்துகளும் ஒரு வெள்ளைப் பந்தும் வெளியே எடுக்கப்படுவதற்கான,

(ii) இரு சிவப்புப் பந்துகளும் ஒரு வெள்ளைப் பந்தும் வெளியே எடுக்கப்படுகின்றனவெனத் தரப்படும்போது பெட்டி A தெரிந்தெடுக்கப்பட்டமைக்கான

நிகழ்தகவைக் காண்க.

(*b*) தரவுத் தொடை $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ இன் இடையும் நியம விலகலும் முறையே $\overline{x}$, σ_x எனவும் $i = 1, 2, \ldots, n$ இற்கு $y_i = \frac{x_i - \alpha}{\beta}$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு α , $\beta\ (>0)$ ஆகியன மெய்ம் மாறிலிகளாகும். $\overline{y} = \frac{\overline{x} - \alpha}{\beta}$ எனவும் $\sigma_y = \frac{\sigma_x}{\beta}$ எனவும் காட்டுக; இங்கு $\overline{y}$, σ_y ஆகியன முறையே தரவுத் தொடை $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ இன் இடையும் நியம விலகலும் ஆகும்.

ஒரு கம்பனியின் 100 சேவையாளர்களின் ஒரு காப்புறுதித் திட்டத்திற்கான மாதத் தவணைக் கட்டணங்கள் பின்வரும் மீடிறன் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

மாதத் தவணைக் கட்டணம் (ரூபாய்) x	சேவையாளர்களின் எண்ணிக்கை
1500 – 3500	30
3500 – 5500	40
5500 – 7500	20
7500 – 9500	10

உருமாற்றம் $y = \frac{x - 500}{1000}$ ஐப் பயன்படுத்தி y இன் இடையையும் நியம விலகலையும் $\frac{3(\text{இடை} - \text{இடையம்})}{\text{நியம விலகல்}}$ இனால் வரையறுக்கப்படும் y இன் ஓராயக் குணகத்தையும் மதிப்பிடுக.

இதிலிருந்து, x இன் இடை, நியம விலகல், ஓராயக் குணகம் ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக.

க.பொ.த. (உயர்தர)ப் பரீட்சை - 2021 (2022)

10 - இணைந்த கணிதம்

புள்ளி வழங்கும் திட்டம்

பத்திரம் I

பகுதி A	$= 10 \times 25$	$= 250$
பகுதி B	$= 05 \times 150$	$= 750$

மொத்தம் $= \dfrac{1000}{10}$

இறுதி புள்ளி $= 100$

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடல் - பொது நுட்ப முறைகள்

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடும் போதும், புள்ளிப்பட்டியலில் புள்ளிகளைப் பதியும் போதும் ஓர் அங்கீகரிக்கப்பட்ட முறையைக் கடைப்பிடித்தல் கட்டாயமானதாகும். அதன்பொருட்டு பின்வரும் முறையில் செயற்படவும்.

1. விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடுவதற்கு சிவப்பு நிற குமிழ்முனை பேனாவை பயன்படுத்தவும்.
2. சகல விடைத்தாள்களினதும் முதற்பக்கத்தில் உதவிப் பரீட்சகரின் குறியீட்டெண்ணைக் குறிப்பிடவும். இலக்கங்கள் எழுதும்போது **தெளிவான இலக்கத்தில்** எழுதவும்.
3. இலக்கங்களை எழுதும்போது பிழைகள் ஏற்பட்டால் அவற்றைத் தனிக்கோட்டினால் கீறிவிட்டு, மீண்டும் பக்கத்தில் சரியாக எழுதி, சிற்றொப்பத்தை இடவும்.
4. ஒவ்வொரு வினாவினதும் உபபகுதிகளின் விடைகளுக்காக பெற்றுக்கொண்ட புள்ளியை பதியும் போது அந்த வினாப்பகுதிகளின் இறுதியில் △ இன் உள் பதியவும். இறுதிப் புள்ளியை வினா இலக்கத்துடன் ☐ இன் உள் பின்னமாகப் பதியவும். புள்ளிகளைப் பதிவதற்கு பரீட்சகர்களுக்காக ஒதுக்கப்பட்ட நிரலை உபயோகிக்கவும்.

உதாரணம் - வினா இல 03

(i) .... ✓ △ $\frac{4}{5}$

....

....

(ii) .... ✓ △ $\frac{3}{5}$

....

....

(iii) .... ✓ △ $\frac{3}{5}$

....

....

(03) (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = $\boxed{\frac{10}{15}}$

பல்தேர்வு விடைத்தாள் (துளைத்தாள்)

1. க.பொ.த.(உ.த) தர் மற்றும் தகவல் தொழிநுட்பப் பரீட்சைக்கான துளைத்தாள் திணைக்களத்தால் வழங்கப்படும். சரியாக துளையிடப்பட்டு அத்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாள் தங்களுக்கு கிடைக்கப்பெறும். அத்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாளைப் பயன்படுத்துவது பரீட்சகரின் கடமையாகும்.
2. அதன்பின்னர் விடைத்தாளை நன்கு பரிசீலித்துப் பார்க்கவும். ஏதாவது வினாவுக்கு, ஒரு விடைக்கும் அதிகமாக குறியிட்டிருந்தாலோ, ஒரு விடைக்காவது குறியிடப்படாமலிருந்தாலோ தெரிவுகளை வெட்டிவிடக்கூடியதாக கோடொன்றைக் கீறவும். சில வேளைகளில் பரீட்சார்த்தி முன்னர் குறிப்பிட்ட விடையை அழித்துவிட்டு வேறு விடைக்குக் குறியிட்டிருக்க முடியும். அவ்வாறு அழித்துள்ள போது நன்கு அழிக்காது விட்டிருந்தால், அவ்வாறு அழிக்கப்பட்ட தெரிவின் மீதும் கோடிடவும்.
3. துளைத்தாளை விடைத்தாளின் மீது சரியாக வைக்கவும். சரியான விடையை ✓ அடையாளத்தாலும் பிழையான விடையை ○ அடையாளத்தாலும் இறுதி நிரலில் அடையாளமிடவும். சரியான விடைகளின் எண்ணிக்கையை அவ்வவ் தெரிவுகளின் இறுதி நிரையின் கீழ் அத்துடன் அவற்றை கூட்டி சரியான புள்ளியை உரிய கட்டத்தில் எழுதவும்.

கட்டமைப்பு கட்டுரை விடைத்தாள்கள்

1. பரீட்சார்த்திகளால் விடைத்தாளில் வெறுமையாக விடப்பட்டுள்ள இடங்களையும், பக்கங்களையும் குறுக்குக் கோடிட்டு வெட்டிவிடவும். பிழையான பொருத்தமற்ற விடைகளுக்குக் கீழ் கோடிடவும். புள்ளி வழங்கக்கூடிய இடங்களில் ✓ அடையாளமிட்டு அதனைக் காட்டவும்.
2. புள்ளிகளை ஓவலண்ட் கடதாசியின் இடது பக்கத்தில் குறிக்கவும்.
3. சகல வினாக்களுக்கும் கொடுத்த முழுப் புள்ளியை விடைத்தாளின் முன் பக்கத்திலுள்ள பொருத்தமான பெட்டியினுள் வினா இலக்கத்திற்கு நேராக 2 இலக்கங்களில் பதியவும். வினாத்தாளில் உள்ள அறிவுறுத்தலின் படி வினாக்கள் தெரிவு செய்யப்படல் வேண்டும். எல்லா வினாக்களினதும் புள்ளிகளும் முதல் பக்கத்தில் பதியப்பட்ட பின் விடைத்தாளில் மேலதிகமாக எழுதப்பட்டிருக்கும் விடைகளின் புள்ளிகளில் குறைவான புள்ளிகளை வெட்டி விடவும்.
4. மொத்த புள்ளிகளை கவனமாக கூட்டி முன் பக்கத்தில் உரிய கூட்டில் பதியவும். விடைத்தாளில் வழங்கப்பட்டுள்ள விடைகளுக்கான புள்ளியை மீண்டும் பரிசீலித்த பின் முன்னால் பதியவும். ஒவ்வொரு வினாக்களுக்கும் வழங்கப்படும் புள்ளிகளை உரிய விதத்தில் எழுதவும்.

புள்ளிப்பட்டியல் தயாரித்தல்

இம்முறை சகல பாடங்களுக்குமான இறுதிப்புள்ளி குழுவினுள் கணிப்பிடப்படமாட்டாது. இது தவிர ஒவ்வொரு வினாப் பத்திரத்துக்குமான இறுதிப்புள்ளி தனித்தனியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதியப்பட வேண்டும். பத்திரம் I ற்கான பல்தேர்வு வினாப்பத்திரம் மட்டும் இருப்பின் புள்ளிகள் இலக்கத்திலும் எழுத்திலும் பதியப்பட வேண்டும்.

ooo

1. கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $\sum_{r=1}^{n}(6r+1) = n(3n+4)$ என நிறுவுக.

$n=1$, இற்கு இ.கை. ப $=6+1=7$

வ.கை. ப. $=1(3+4)=7$

$n=1$. இற்கு பேறு உண்மையானது (5)

For verifying the result for $n=1$

k யாதாயினும் நேர் நிறை எண் என்க

$n=k$ இட்கு பேறு உண்மையானது எனக் கொள்வோம்

$$\sum_{r=1}^{k}(6r+1) = k(3k+4).$$ (5)

For writing the statement for $n=k$

$$\sum_{r=1}^{k+1}(6r+1) = \sum_{r=1}^{k}(6r+1) + \{6(k+1)+1\}$$

$= k(3k+4)+6k+7$ (5)

For substituting "$n=k$ result" in"$n=k+1$"

$= 3k^2+10k+7$

$= (k+1)(3k+7).$ (5)

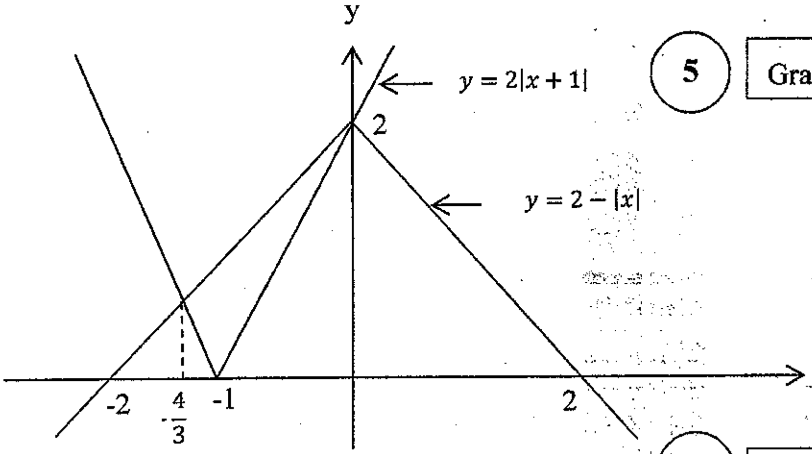
$= (k+1)[3(k+1)+4].$

$(k+1)(3k+7)$or equivalent seen

ஆகவே இற்கு $n=k$, பேறு உண்மையானதெனின் $n=k+1$ இற்கும் பேறு உண்மையாகும். $n=1$ இற்கு பேறு உண்மையானது என்று நாம் ஏற்கனவே நிறுவியுள்ளோம் இதிலிருந்து கணித தொகுத்தறிவுக் கோட்ப்பாடிற்கேட்ப எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்க்கும் பேறு உண்மையானதாகும் (5)

conclusion with the "Principle of Mathematical Induction". (Given only if all the other steps are correct.)

2. ஒரே வரிப்படத்தில் $y = 2|x+1|$, $y = 2 - |x|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளைப் பரும்படியாக வரைக. இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, சமனிலி $2|x+2| + |x| \leq 4$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.



(5) Graph of $y = 2|x+1|$

(5) Graph of $y = 2 - |x|$

ஒரு வெட்டுப்புள்ளியின் x – ஆள்கூறு $x = 0$.

மற்றய வெட்டுப்புள்ளியின் x – ஆள்கூறு $x < -1$ இற்கு

$-2(x+1) = 2 + x$ இனால் தரப்படும்

இதிலிருந்து $x = -\frac{4}{3}$. (5)

$x = 0$ and $x = -\frac{4}{3}$ seen

$t = \frac{x}{2}$. என்க. (5)

$t = \frac{x}{2}$ substitution or equivalent

தரப்பட்ட சமனிலி

$2|2t+2| + |2t| \leq 4$. என ஆகும்

இது $2|t+1| \leq 2 - |t|$. இற்கு சமானமாகும்

வரைபிலிருந்து

$-\frac{4}{3} \leq t \leq 0.$

$\therefore -\frac{8}{3} \leq x \leq 0.$ (5)

correct solution seen

Aliter 1:

வரைபுக்கு (5) + (5),

Case (i) $x \le -2$:

எனின், $2|x+2|+|x| \le 4 \Leftrightarrow -2(x+2)-x \le 4$.

$\therefore -\frac{8}{3} \le x$.

ஆகவே தீர்வுகள் $-\frac{8}{3} \le x \le -2$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் பெறுமானங்களாகும்.

Case (ii) $-2 < x \le 0$:

எனின், $2|x+2|+|x| \le 4 \Leftrightarrow 2(x+2)-x \le 4$.

$\therefore x \le 0$.

ஆகவே $-2 < x \le 0$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் பெறுமானங்களாகும்.

Case (iii) $x > 0$:

எனின், $2|x+2|+|x| \le 4 \Leftrightarrow 2(x+2)+x \le 4$

$\therefore x \le 0$

ஆகவே தீர்வுகள் இல்லை.

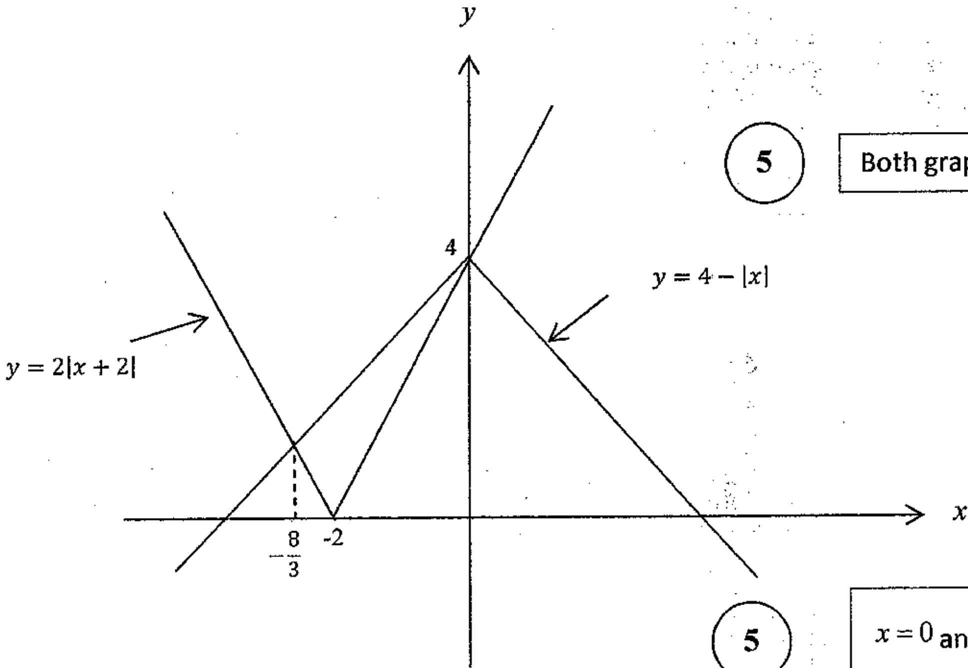
All 3 cases with correct solutions	(10)
only 2 cases with correct solutions	(5)

$\therefore$ தரப்பட்ட சமனிலியின் தீர்வுகள் $-\frac{8}{3} \le x \le 0$. ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் பெறுமானங்களாகும் (5)

Aliter 2:

வரைபுக்கு (5) + (5)

$$2|x+2|+|x|\le 4 \Leftrightarrow 2|x+2|\le 4-|x|.$$



(5) Both graphs

(5) $x=0$ and $x=-\dfrac{8}{3}$ seen

வரைபிலிருந்து,

$$2|x+2|\le 4-|x|$$

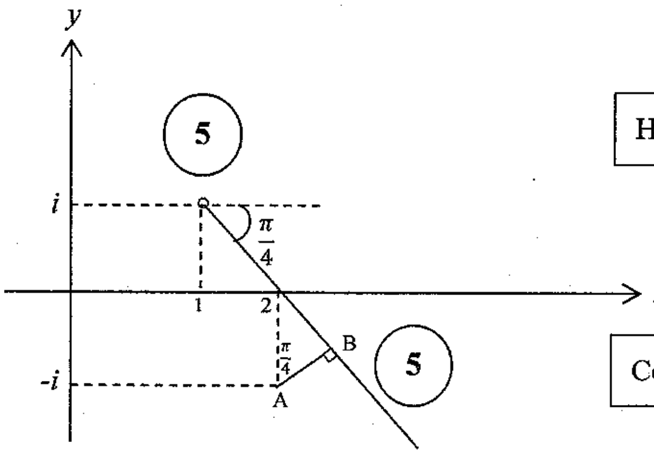
$$\Leftrightarrow -\frac{8}{3}\le x\le 0$$ (5)

correct solution seen

3. ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில், $\text{Arg}(z-1-i)=-\frac{\pi}{4}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கைப் பருமட்டாக வரைக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $\text{Arg}(iz+1-i)=\frac{\pi}{4}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் $|z-2+i|$இன் இழிவுப் பெறுமானம் $\frac{1}{\sqrt{2}}$ எனக் காட்டுக.

$$\text{Arg}\left(z-(1+i)\right)=-\frac{\pi}{4}$$



Hole at $1+i$

Correct half line

$$\text{Arg}\left(i(z-i-1)\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \text{Arg}\, i+\text{Arg}\left(z-(1+i)\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \text{Arg}\left(z-(1+i)\right)=-\frac{\pi}{4} \quad \text{(5)}$$

Breaking the argument of the product to a sum, and using $\text{Arg}\, i=\frac{\pi}{2}$.

$$\min\left|z-(2-i)\right|=AB \quad \text{(5)}$$

Recognising the minimum distance

$$=1\cdot\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{(5)}$$

Work leading to the answer

Aliter:

வரைபடத்துக்கு (5) + (5)

$z = x + iy$ என்க

$\frac{\pi}{4} = Arg(iz + 1 - i) = Arg\left(1 - y + i(x-1)\right)$

$\therefore \quad x - 1 = (1)(1-y)$ (5)

$\Rightarrow \quad x + y = 2.$

Writing the given information as a relation of x and y.

$|z - 2 + i| = |x + iy - 2 + i|$

$= |(x-2) + i(y+1)|$

$= |y + i(y+1)| \qquad (\because x - 2 = y)$

$= \sqrt{y^2 + (y+1)^2}$

$= \sqrt{2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$ (5)

Writing the absolute value as a complete square of x or y.

$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, ஏனெனில் $2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0; \quad y = -\frac{1}{2}$ ஆகும்போது = ஆகும்.

$\therefore \min|z - 2 + i| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (5)

Work leading to the answer.

4. $k > 0$ எனக் கொள்வோம். $\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^{11}$ இன் ஈருறுப்பு விரியில் உள்ள x^7 இன் குணகமும் $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{11}$ இன் ஈறுப்பு விரியில் உள்ள x^{-7} இன் குணகமும் சமமெனத் தரப்பட்டுள்ளது. $k=1$ எனக் காட்டுக.

$k > 0.\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^{11}$; இற்கு

$T_{r+1} = {}^{11}C_r (x^2)^{11-r}\left(\frac{k}{x}\right)^r = {}^{11}C_r x^{22-3r} k^r$

$22-3r = 7 \Rightarrow r = 5$ (5) Correct value of r

$\therefore x^7$ இன் குணகம் $= {}^{11}C_5\, k^5$ (5) Correct coefficient

$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{11}$; இற்கு $T_{r+1} = {}^{11}C_r\, x^{11-r}\,(-1)^r\left(\frac{1}{x^2}\right)^r = (-1)^r\, {}^{11}C_r\, x^{11-3r}$

$11-3r = -7 \Rightarrow r = 6$ (5) Correct value of r

(5) Correct coefficient

$\therefore x^{-7}$ இன் குணகம் $= {}^{11}C_6$

ஆகவே, ${}^{11}C_6 = {}^{11}C_5\, k^5 \Rightarrow k=1$, ஏனெனில் ${}^{11}C_6 = {}^{11}C_5$.

(5) Work leading to the answer

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)} = 4$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})} \times \frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right)}$$ (5)

Multiplying by the conjugate

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{(1-\cos 2x)}{x^2 \cos 2x} \times \left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$$

$$= \left(\lim_{2x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\right) \times \lim_{x\to 0} 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 2x}\right) \times \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$$

$= \quad 1 \times 2 \times 1 \times 2$

(5) (5) (5) (5)

Each limit (5)

$= \quad 4.$

Aliter 1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x(1-\cos 2x)}{x^2 \cos 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$ (5)

multiplying by the conjugate

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x(1-\cos^2 2x)}{x^2 \cos 2x(1+\cos 2x)} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2x}$$

$$= 4\left(\lim_{2x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\right)^3 \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos 2x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+\cos 2x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \sqrt{1+x}+\sqrt{1+x}\right)$$

$$= 4 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 2$$

(5) (5) (5) (5)

Each limit (5)

$$= 4.$$

Aliter2:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}$$

(5)

multiplying by the conjugate

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \times \left(\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\right) \frac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \times \frac{\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\tan x(2\tan^2 x)}{x^2(1-\tan^4 x)} . \quad \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2x}$$

$$= 2\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^3 \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}\right)^3 \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{1-\tan^4 x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)$$

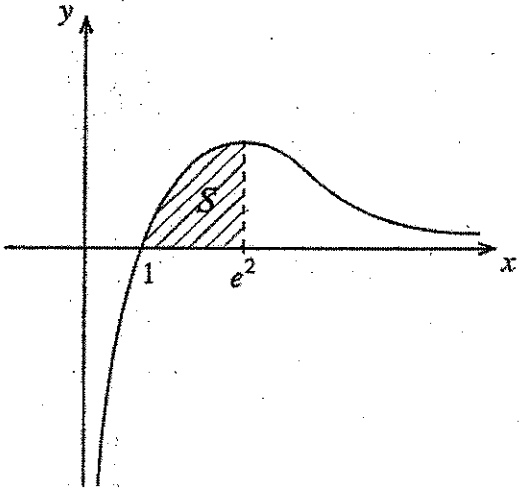
$$= 2 \times 1 \times \ 1 \times 1 \times 2$$

$= 4.$ (5) (5) (5) (5)

Each limit (5)

Setting up the integral for S

6. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = e^2$ ஆகிய வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசம் S எனக் கொள்வோம். S இன் பரப்பளவு 4 சதுர அலகுகளெனக் காட்டுக.
பிரதேசம் S ஆனது x-அச்சைப் பற்றி 2π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றப்படுகின்றது. இவ்வாறு பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\dfrac{8\pi}{3}$ எனக் காட்டுக.



பரப்பு $S = \int_1^{e^2} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$ (5)

$= (\ln x).2x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 2x^{\frac{1}{2}} \times \dfrac{1}{x}\, dx$ (5) Integration by parts or equivalent

$= 4e - 2\int_1^{e^2} x^{-\frac{1}{2}} dx$

$= 4$ (5) Work leading to the answer

தேவையான கனவளவு $= \int_1^{e^2} \pi \left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ Setting up the integral for the volume (5)

$= \pi \int_1^{e^2} \dfrac{(\ln x)^2}{x} dx$

$= \pi \dfrac{(\ln x)^3}{3}\Big|_1^{e^2}$

$= \dfrac{8\pi}{3}.$ (5) Work leading to the answer

7. $t \neq 0$ இற்கு $x = ct,\ y = \frac{c}{t}$ ஆகியவற்றினால் பரமானமுறையாகத் தரப்படும் செங்கோண அதிபரவளைவுக்குப் புள்ளி $P \equiv \left(cp, \frac{c}{p}\right)$ இல் உள்ள தொடலிக் கோட்டின் சமன்பாடு $x + p^2y = 2cp$ எனக் காட்டுக. இவ்வதிபரவளைவுக்குப் P இல் உள்ள செவ்வன் கோடு அதிபரவளைவை வேறொரு புள்ளி $Q \equiv \left(cq, \frac{c}{q}\right)$ இல் மறுபடியும் சந்திக்கின்றது. $p^3q = -1$ எனக் காட்டுக.

$\frac{dx}{dt} = c, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{c}{t^2}$. $(t \neq 0.)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{c}{t^2}}{c} = -\frac{1}{t^2}$ (5)

$\frac{dy}{dx}$ in terms of t

$\therefore$ P இல் தொடலியின் படித்திறன் $= -\frac{1}{t^2}\Big|_{t=p} = -\frac{1}{p^2}$

$\therefore P$ இல் தொடலியின் சமன்பாடு

$$y - \frac{c}{p} = -\frac{1}{p^2}(x - cp)$$

Work leading to the answer

$\therefore x + p^2y = 2cp.$

P இல் செவ்வனின் படித்திறன் $= p^2$.

Equation of the normal

$\therefore P$ இல் செவ்வனின் சமன்பாடு $y - \frac{c}{p} = p^2(x - cp)$ (5)

$Q \equiv (cq, \frac{c}{q})$ இக்கோட்டில் இருக்கும்;

$\therefore \frac{c}{q} - \frac{c}{p} = p^2(cq - cp) \Rightarrow c(p - q) = -p^3qc(p - q)$ (5)

For the substitution

P, Q வேறுவேறான புள்ளிகள் என்பதால் $p \neq q$.

$p^3q = -1.$ (5)

Work leading to the answer

Aliter: (For the last part) (5)

For the condition

PQ இன் படித்திறன் = P இல் செவ்வனின் படித்திறன்

$\therefore \frac{\frac{c}{q} - \frac{c}{p}}{cq - cp} = p^2$ (5) $(\because p \neq q, c \neq o)$

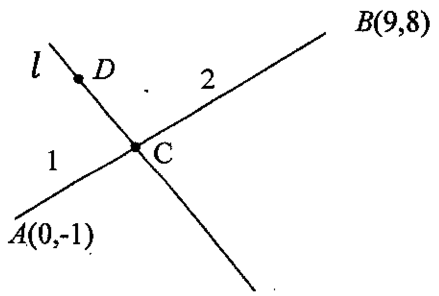
For the substitutions

$\therefore p^3q = -1$ (5)

Work leading to the answer

8. $A \equiv (0, -1)$ எனவும் $B \equiv (9, 8)$ எனவும் கொள்வோம். AB மீது புள்ளி C ஆனது $AC : CB = 1 : 2$ ஆக இருக்குமாறு உள்ளது. C இனூடாக AB இற்குச் செங்குத்தாக உள்ள நேர்கோடு l இன் சமன்பாடு $x + y - 5 = 0$ எனக் காட்டுக.

AD ஆனது நேர்கோடு $y = 5x + 1$ இற்குச் சமாந்தரமாக இருக்குமாறு l மீது உள்ள புள்ளி D எனக் கொள்வோம். D இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.



$$C \equiv \left(\frac{2(0)+1(9)}{2+1}, \frac{2(-1)+1(8)}{2+1} \right)$$ (5) — Coordinates of C

$\equiv (3,2)$

AB இன் படித்திறன் $=1$.

இன் படித்திறன் $l = -1$ (5) — For the gradient of l

$\therefore$ l: இன் சமன்பாடு

$y - 2 = -1(x - 3)$

i.e. $x + y - 5 = 0$. (5) — Work leading to the equation of l

D, l இல் இருப்பதால் D ஐ $(t, 5-t)$, $t \in \mathbb{R}$ என எடுக்குக,

AD இன் சமன்பாடு; $y - (-1) = 5(x - 0)$

D இக்கோட்டில் இருப்பதால்,

$5 - t + 1 = 5t$.

$\therefore t = 1$. (5) — Work leading to the coordinates of D

$\therefore D \equiv (1,4)$. (5) — $D \equiv (1,4)$ seen

9. நேர்கோடு $x + 2y = 3$ ஆனது வட்டம் $S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$ ஐ இரு வேறுவேறான புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றதெனக் காட்டுக.
இவ்விரு புள்ளிகளினூடாகவும் வட்டம் $S = 0$ இன் மையத்தினூடாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$

$\ell : x + 2y - 3 = 0.$ என்க

ℓ, இல் $x = 3 - 2y$;

$(3-2y)^2 + y^2 - 4(3-2y) + 1 = 0$

$\therefore 5y^2 - 4y - 2 = 0$ (5) | Forming a quadratic

பிரித்துக்கட்டி $\Delta = 16 + 4(5)(2)$ (5) | Writing the discriminant

$\therefore \Delta > 0$, ஆதலால் கோடு $x + 2y = 3$, (5) | For $\Delta > 0$

S உடன் இரண்டு வேறு வேறு புள்ளிகளில் இடைவெட்டும்.

தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 - 4x + 1 + \lambda(x + 2y - 3) = 0$, (5) | For the λ form

இங்கு $\lambda \in \mathbb{R}$

இவ்வட்டம் (2,0) ஊடாக செல்லும் ஆதலால்,

$4 - 8 + 1 + \lambda(2 - 3) = 0$

$\therefore \lambda = -3$ (5) | $\lambda = -3$ seen

$\therefore$ தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 - 4x + 1 + (-3)(x + 2y - 3) = 0$

i.e. $x^2 + y^2 - 7x - 6y + 10 = 0.$

10. $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 1$ ஐ வடிவம் $R\cos(2x-\alpha)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $R > 0$ உம் $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ உம் ஆகும்.
இதிலிருந்து, சமன்பாடு $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x = 1$ ஐத் தீர்க்க.

$2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 1$

$= 2\cos^2 x - 1 + \sqrt{3}(2\sin x\cos x)$

$= \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$ (5) — Writing the expression using $\cos 2x$ and $\sin 2x$

$= 2\left[\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right]$

$= 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

இங்கு $R = 2$ (5), $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (5)

$R = 2$ seen

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ seen

சமன்பாடு $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x = 1$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 1 = 1.$

$\therefore\ 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

ஆகவே $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ (5) — $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ seen

$\therefore\ 2x - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3};\ n \in \mathbb{Z}$

$\therefore\ x = n\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6}\ ;\ n \in \mathbb{Z}$ (5) — Correct solution seen

11. (*a*) $k > 1$ எனக் கொள்வோம். சமன்பாடு $x^2 - 2(k+1)x + (k-3)^2 = 0$ இற்கு வேறுவேறான மெய்ம் மூலங்கள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக.

α, β ஆகியன இம்மூலங்களெனக் கொள்வோம். $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ ஆகியவற்றை k இல் எழுதி, α, β ஆகிய இரண்டும் நேராக இருக்குமாறு k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இப்போது $1 < k < 3$ எனக் கொள்வோம். $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை k இல் காண்க.

(*b*) $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$ எனவும் $g(x) = x^3 + cx^2 + ax + 1$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $a, b, c \in \mathbb{R}$ ஆகும். $f(x)$ ஆனது $(x-1)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி 5 எனவும் $g(x)$ ஆனது $x^2 + x - 2$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி $x + 1$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. a, b, c ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

மேலும் a, b, c ஆகியவற்றுக்கான இப்பெறுமானங்களுடன் எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $f(x) - 2g(x) \leq \frac{13}{12}$ எனக் காட்டுக.

(a)

$x^2 - 2(k+1)x + (k-3)^2 = 0$. இன் பிரித்துக்காட்டி

$\Delta = 4(k+1)^2 - 4(k-3)^2$ (5)

$= 4(k+1+k-3)(k+1-k+3)$

$= 32(k-1)$. (5)

$k > 1$, ஆதலால் $\Delta > 0$. (5)

$\therefore$ மெய்யான வேறு வேறான மூலங்கள் உண்டு (5)

20

$\alpha + \beta = 2(k+1)$, $\alpha\beta = (k-3)^2 +$ (5) (5)

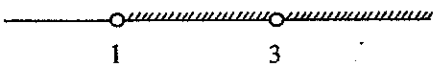
α, β இரண்டும் நேரானதாக இருக்க,

$\alpha + \beta > 0$, $\alpha\beta > 0$. (10)

$k > 1$, ஆதலால் $\alpha + \beta = 2(k+1) > 0$ (5)

அத்துடன் $\alpha\beta = (k-3)^2 > 0 \Leftrightarrow k \neq 3$. (10)

$\therefore k$ இன் தேவையான பெறுமானங்கள் $1 < k < 3$ or $k > 3$.



35

இப்போது $1<k<3$. என்க. $\alpha>0$, $\beta>0$. ஆதலால்

$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ இனை மூலங்களாக கொண்ட சமன்பாடு $\left(x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)=0$. (5)

i.e. $x^2-\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)x+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}=0$. (5)

i.e. $\sqrt{\alpha\beta}x^2-\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)x+1=0$. (5)

$\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{(k-3)^2}=|k-3|=3-k\ (\because 1<k<3)$ ஆகும் (5)

அத்துடன் $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$ (5)

$=2(k+1)+2(3-k)$ (5)

$=8.$ (5)

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2\sqrt{2}$ (5)

$\therefore$ சமன்பாடு $(3-k)x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ (5)

45

(b)

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$

$g(x)=x^3+cx^2+ax+1$

$f(x)$, $(x-1)$ இனால் வகுப்படும் போது மீதி 5 ஆதலால், மீதி தேற்றத்தின் படி,

$f(1)=5.$ (5)

$\therefore a+b+3=5$

$a+b=2.$ (5) -------------- (1)

$g(x)$ ஆனது x^2+x-2 இனால் வகுப்படும் போது மீதி $x+1$, ஆதலால்

$g(x)=x^3+cx^2+ax+1=(x^2+x-2)(x+\lambda)+x+1$ for $\lambda\in\mathbb{R}$. (5)

$\left((x^0)\right)$; $1=-2\lambda+1\Rightarrow\ \lambda=0.$

$\therefore g(x)=x(x^2+x-2)+x+1$ (5) (5)

$=x^3+x^2-x+1$. ஆகவே $c=1$, $a=-1$.

(1) $\Rightarrow\ b=3.$ (5)

30

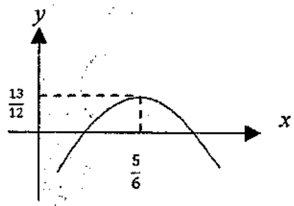
$$f(x)-2g(x)=2x^3-x^2+3x+1-2(x^3+x^2-x+1)$$

$$=-3x^2+5x-1 \quad (5)$$

$$=-3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\frac{1}{3}\right]$$

$$=-3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{36}\right] \quad (5)$$

$$\leq -3\times\left(\frac{-13}{36}\right), \text{since } \left(x-\frac{5}{6}\right)^2 \geq 0. \quad (5)$$



$$\therefore f(x)-2g(x)\leq\frac{13}{12}. \quad (5)$$

20

---

12. (*a*) கீழே தரப்பட்டுள்ள 10 இலக்கங்களிலிருந்தும் எடுக்கப்படும் 4 இலக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு 4 இலக்க எண்ணை அமைக்க வேண்டியுள்ளது :

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5

(i) தெரிந்தெடுக்கப்படும் எல்லா 4 இலக்கங்களும் வேறுபட்டனவாக இருப்பின்,

(ii) எந்த 4 இலக்கங்களும் தெரிந்தெடுக்கப்படலாமெனின்,

அமைக்கத்தக்க அத்தகைய வேறுபட்ட 4 இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \dfrac{-16r^3+12r^2+40r+9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$ எனக் கொள்வோம்.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \dfrac{A(r-1)}{(2r+1)^2} - \dfrac{(r-B)}{(2r-1)^2}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B ஆகிய மெய்ம் மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைத் துணிக.

இதிலிருந்து, $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\dfrac{1}{5^{r-1}}U_r = f(r) - f(r-1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $f(r)$ ஐக் கண்டு,

$n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{5^{r-1}} U_r = 1 + \frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{5^{r-1}} U_r$ ஒருங்குகின்றதென **உய்த்தறிந்து**, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(a)

1,1, 1, 2, 2, 3,3,4, 5, 5

(i) 1,2,3,4,5 இலிருந்து நான்கு வேறான இலக்கங்கள்

$= {}^5P_4$ (5)

$= 5!$ (5)

$= 120$ (5)

15

(ii) நான்கு இலக்க எண்கள் உருவாக்கப்படும் விதங்கள்

	ஏதாவது 4 இலக்கங்களுடன் வேறுவேறான 4 இலக்க எண்கள்
வேறான இலக்கங்கள்	${}^5P_4 = 120$
ஒரு இலக்கம் இருமுறை மீள்வர ஏனைய இரு இலக்கங்களும் வேறானவை	${}^4C_1 \times {}^4C_2 \times \frac{4!}{2!} = 288$ (10) (5)
இரு இலக்கங்கள் இருமுறை மீள்வரல்	${}^4C_2 \times \frac{4!}{2!2!} = 36$ (10) (5)
ஒரு இலக்கம் மும்முறை மீள்வரல்	$1C_1 \times 4C_1 \times \frac{4!}{3!}$ (10) (5)

தேவையான வழிகள் $= 120 + 288 + 36 + 16$ (5)

$= 460$ (5)

55

(b)

$r \in \mathbb{Z}$ இற்கு

$$U_r = \frac{-16r^3 + 12r^2 + 40r + 9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$$

$$U_r = \frac{A(r-1)}{(2r+1)^2} - \frac{(r-B)}{(2r-1)^2} = \frac{A(r-1)(2r-1)^2 - (r-B)(2r+1)^2}{(2r+1)^2(2r-1)^2}$$

$$\therefore -16r^3 + 12r^2 + 40r + 9 = 5A(r-1)(4r^2 - 4r + 1) - 5(r-B)(4r^2 + 4r + 1)$$

r இன் அடுக்குகளின் குணகங்களை ஒப்பிட:

$r^3 : -16 = 5A(4) - 20$

$r^2 : 12 = 5A(-8) - 5(-4B + 4)$

(10)

$r^1 : 40 = 25A - 5(1-4B)$

$r^0 : 9 = -5A + 5B$

இதிலிருந்து $A = \frac{1}{5}$, $B = 2$.

(5) (5)

20

$\therefore U_r = \frac{r-1}{5(2r+1)^2} - \frac{r-2}{(2r-1)^2}$ (5)

$\therefore \frac{1}{5^{r-1}} U_r = \frac{r-1}{5^r(2r+1)^2} - \frac{r-2}{5^{r-1}(2r-1)^2}$ (5)

எனவே,

$\frac{1}{5^{r-1}} U_r = f(r) - f(r-1)$, இங்கு $f(r) = \frac{r-1}{5^r(2r+1)^2}$. (10)

$r = 1;$ $\frac{1}{5^0} U_1 = f(1) - f(0)$

$r = 2;$ $\frac{1}{5} U_2 = f(2) - f(1)$ (5)

$\vdots$ $\vdots$

$r = n-1;$ $\frac{1}{5^{n-2}} U_{n-1} = f(n-1) - f(n-2)$

$r = n$ $\frac{1}{5^{n-1}} U_n = f(n) - f(n-1)$ (5)

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{5^{r-1}} U_r = f(n) - f(0)$$ (5)

$$= \frac{n-1}{5^n(2n+1)^2} - (-1)$$ (5)

$$= 1 + \frac{n-1}{5^n(2n+1)^2} \text{ for } n \in \mathbb{Z}^+$$ (5)

45

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{5^{r-1}} U_r = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{n-1}{5^n (2n+1)^2}\right)$$

(5)

$= 1$. (5)

$\therefore$ முடிவிலித்தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{5^{r-1}} U_r$ ஒருங்கும், கூட்டுத்தொகை 1. (5)

15

---

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ எனவும் $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $a \in \mathbb{R}$.

மேலும் $\mathbf{C} = \mathbf{AB}^{\mathrm{T}}$ எனவும் கொள்வோம். $\mathbf{C}$ ஐ a இற் கண்டு, எல்லா $a \neq 0$ இற்கும் $\mathbf{C}^{-1}$ இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

$\mathbf{C}^{-1}$ இருக்கும்போது அதனை a இல் எழுதுக.

$\mathbf{C}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}$ எனின், $a = 2$ எனக் காட்டுக.

a இற்கான இப்பெறுமானத்துடன் $\mathbf{DC} - \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C} = 8\mathbf{I}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாகத் தாயம் $\mathbf{D}$ ஐக் காண்க; இங்கு $\mathbf{I}$ ஆனது வரிசை 2 ஆகவுள்ள சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமாகும்.

(*b*) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ எனவும் $z_2 = 1 + i$ எனவும் கொள்வோம். $\frac{z_1}{z_2}$ ஐ வடிவம் $x + iy$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $x, y \in \mathbb{R}$.

மேலும் z_1, z_2 ஆகிய சிக்கலெண்கள் ஒவ்வொன்றையும் வடிவம் $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $r > 0$ உம் $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ உம் ஆகும். **இதிலிருந்து,** $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ எனக் காட்டுக.

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ என **உய்த்தறிக.**

(*c*) $n \in \mathbb{Z}^+$ எனவும் $k \in \mathbb{Z}$ இற்கு $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ எனவும் கொள்வோம்.

த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, $(1 + i\tan\theta)^n = \sec^n\theta(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $(1 - i\tan\theta)^n$ இற்கு ஓர் இயல்பொத்த கோவையைப் பெற்று,

$(1 + i\tan\theta)^n + (1 - i\tan\theta)^n = 2\sec^n\theta\cos n\theta$ எனக் காட்டுக.

$z = i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$ ஆனது $(1+z)^{25} + (1-z)^{25} = 0$ இன் ஒரு தீர்வென **உய்த்தறிக.**

(*a*) (5)

$$C = AB^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+3a+3 & \\ a+1 & 1 \end{pmatrix}$$ (10)

$|C| = (a^2+3) - (a+1)(a+3) = -4a$

$\neq 0 \ (\because a \neq 0)$ (5)

$\therefore$ எல்லா $a \neq 0$. கும் C^{-1} இருக்கும். (5)

25

For $a \neq 0, C^{-1} = -\frac{1}{4a}\begin{pmatrix} 1 & -(a+3) \\ -(a+1) & a^2+3 \end{pmatrix}$ (10)

10

$$C^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{4a}\begin{pmatrix}-1 & a+3\\ a+1 & -a^2-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{4a}\begin{pmatrix}2a+5\\-2a^2+a-5\end{pmatrix}$$ (10)

$$\therefore \frac{1}{4a}\begin{pmatrix}2a+5\\-2a^2+a-5\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}9\\-11\end{pmatrix}$$

$$\frac{2a+5}{4a}=\frac{9}{8},\quad \frac{-2a^2+a-5}{4a}=-\frac{11}{8}$$ (5)

இதிலிருந்து $a=2$. (5)

20

$a=2, C=\begin{pmatrix}7 & 5\\3 & 1\end{pmatrix}, C^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -5\\-3 & 7\end{pmatrix}$. ஆகும்போது (5)

$DC-C^TC=8I \Leftrightarrow D-C^T=8IC^{-1}$. (5)

(5)

$$\therefore D=C^T+8C^{-1}=\begin{pmatrix}7 & 3\\5 & 1\end{pmatrix}+8\left(-\frac{1}{8}\right)\begin{pmatrix}1 & -5\\-3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\8 & -6\end{pmatrix}.$$ (5)

20

(b)

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(1-i)=\underbrace{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}_{x}+i\underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}_{y}$$ (5)

(5)

10

$$z_1=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$ (5)

(5)

$$z_2=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$ (5)

(5)

$$\therefore \frac{z_1}{z_2}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

(10)

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$ **30**

மெய்பகுதிகளை சமப்படுத்த,

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$ (5) **05**

(c)

For $r \in \mathbb{Z}$ and $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ for $k \in \mathbb{Z}$,

$$(1+i\tan\theta)^n = \frac{1}{\cos^n\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$ (5)

$$= \sec^n\theta(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad \text{------------- (1)}$$ (5) **10**

$$(1-i\tan\theta)^n = \left(1+i\tan(-\theta)\right)^n$$

$$= \sec^n(-\theta)\left[\cos n(-\theta) + i\sin n(-\theta)\right]$$

$$= \sec^n\theta(\cos n\theta - i\sin n\theta) \quad \text{------------- (2)}$$ (5)

(1) , (2) $\Rightarrow (1+i\tan\theta)^n + (1-i\tan\theta)^n = 2\sec^n\theta\cos n\theta.$ (5) **10**

$z = i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right) \Rightarrow$

$$(1+z)^{25} + (1-z)^{25} = \left(1+i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)^{25} + \left(1-i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)^{25}$$

$$= 2\sec^{25}\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos 25\left(\frac{\pi}{10}\right)$$ (5)

$$= 0, \text{as} \cos 25\left(\frac{\pi}{10}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$ (5)

10

---

14. (*a*) $x \neq 0, 2$ இற்கு $f(x) = \dfrac{4x+1}{x(x-2)}$ எனக் கொள்வோம்.

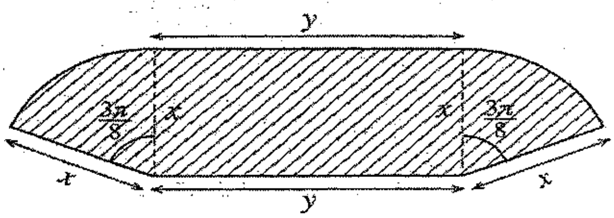
$x \neq 0, 2$ இற்கு $f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $f'(x) = -\dfrac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $f(x)$ அதிகரிக்கும் ஆயிடைகளையும் $f(x)$ குறையும் ஆயிடைகளையும் காண்க.

அணுகுகோடுகள், x-வெட்டுத்துண்டு, திரும்பற் புள்ளிகள் ஆகியவற்றைக் காட்டி $y = f(x)$ இன் வரைபைப் பருமட்டியாக வரைக.

இவ்வரைபைப் பயன்படுத்திச் சமனிலி $f(x) + |f(x)| > 0$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.

(*b*) இங்கு உள்ள உருவில் நிழற்றப்பட்டுள்ள பிரதேசம் S ஆனது ஒரு செவ்வகத்தையும் ஒவ்வொன்றும் மையத்தில் கோணம் $\frac{3\pi}{8}$ ஐ எதிரமைக்கும் ஒரு வட்டத்தின் இரு ஆரைச்சிறைகளையும் கொண்ட ஒரு தோட்டத்தைக் காட்டுகின்றது. அதன் பரிமாணங்கள் மீற்றரில் உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளன. S இன் பரப்பளவு $36\ \text{m}^2$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. S இன் சுற்றளவு p m ஆனது $x > 0$ இற்கு $p = 2x + \dfrac{72}{x}$ இனால் தரப்படுகின்றது எனவும் $x = 6$ ஆக இருக்கும்போது p இழிவு எனவும் காட்டுக.



(*a*)

$$x \neq 0, 2, \text{ இற்கு } f(x) = \frac{4x+1}{x(x-2)}$$

ஆகவே, $$f^1(x) = \frac{4x(x-2) - (4x+1)(x-2+x)}{x^2(x-2)^2}$$ (20)

$$= -\frac{2(2x^2+x-1)}{x^2(x-2)^2}$$

$$= -\frac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2} \text{ for } x \neq 0, 2.$$ (5)

25

திரும்பல் புள்ளிகள்:

$f^1(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$ அல்லது $x = \frac{1}{2}$ (5)

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 2$	$2 < x < \infty$
$f^1(x)$ இன் குறி	(−)	(+)	(+)	(−)	(−)
$f(x)$	↘ குறையும்	↗ அதிகரிக்கும்	↗ அதிகரிக்கும்	↘ குறையும்	↘ குறையும்

(5) (5) (5) (5) (5)

$\therefore f(x)$ ஆனது $[-1,0)$, $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ இல் அதிகரிக்கும் அத்துடன்

$\left[\frac{1}{2},2\right)$, $(-\infty,-1]$, $(2,\infty)$. இல் குறையும்.

30

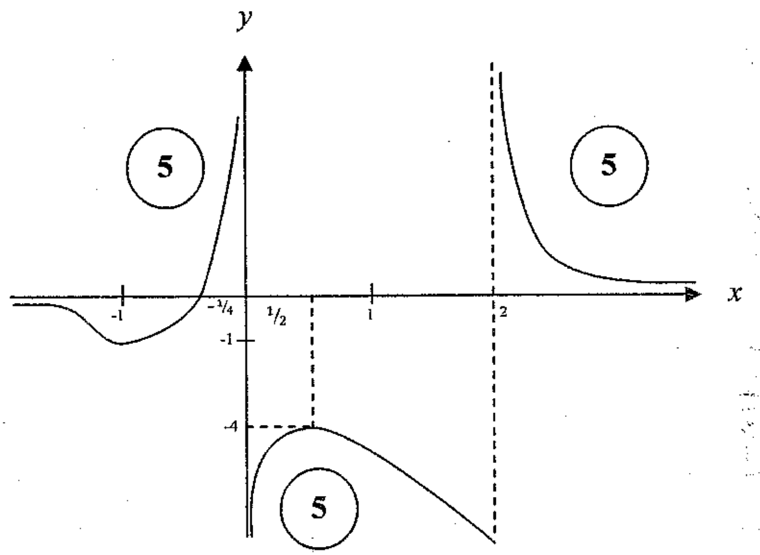
திரும்பல் புள்ளிகள்: $\left(\frac{1}{2},-4\right)$ ஓரிட உயர்வு ஆகும். (5)

$(-1,-1)$ ஓரிட இழிவு ஆகும் (5)

x- இடைவெட்டு: $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ (5)

கிடை அணுகுகோடு: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \therefore\ y=0$ (5)

நிலைக்குத்து அணுகுகோடு: $x=0$, $x=2$. (5)



40

$$f(x)+|f(x)|=\begin{cases}2f(x) & \text{if } f(x)\geq 0.\\ 0 & \text{if } f(x)<0.\end{cases}$$

$\therefore f(x)+|f(x)|>0 \Leftrightarrow f(x)>0.$ (5)

$\therefore\ f(x)+|f(x)|>0$ ஐ திருப்தி செய்யும் x இன்

(5)

மெய்ப்பெறுமானங்கள் $-\frac{1}{4}<x<0$ அல்லது $x>2$.

15

(*b*)

$x > 0$; இற்கு

$36 = xy + \frac{3}{8}\pi x^2$ எனதரப்படுள்ளது : (5)

$\therefore y = \frac{36}{x} - \frac{3}{8}\pi x$ for $x > 0$ (5)

$p = 2x + 2y + 2\left(\frac{3}{8}\pi x\right)$ (5)

$= 2x + 2\left(\frac{36}{x} - \frac{3}{8}\pi x\right) + \frac{3}{4}\pi x$ (5)

$= 2x + \frac{72}{x}$ (5) , $x > 0$. இற்கு

$\frac{dp}{dx} = 2 - \frac{72}{x^2}$; $x > 0$.

(5)

$\frac{dp}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = 6$. (5)

$0 < x < 6$, இற்கு $\frac{dp}{dx} < 0$ அத்துடன்

$x > 6$, இற்கு $\frac{dp}{dx} > 0$.

$\therefore x = 6$. ஆகும்போது p இழிவு ஆகும் (5)

40

---

15. (*a*) எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $x^4+3x^3+4x^2+3x+1 = A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1) + Cx^2$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B, C ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $\dfrac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களில் எழுதி,

$\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$ ஐக் காண்க.

(*b*) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right)dx$ எனக் கொள்வோம். $I = \dfrac{\pi}{24} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$ எனக் காட்டி, **இதிலிருந்து,** I இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(*c*) $\dfrac{d}{dx}\left(x\ln(x^2+1) + 2\tan^{-1}x - 2x\right) = \ln(x^2+1)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$ ஐக் கண்டு, $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}(\ln 4 + \pi - 4)$ எனக் காட்டுக.

a ஒரு மாறிலியாகவுள்ளபோது பேறு $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ஐப் பயன்படுத்தி

$\displaystyle\int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(*a*)

$$x^4+3x^3+4x^2+3x+1 = A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1) + Cx^2$$

$$= A(x^4+2x^2+1) + B(x^3+x) + Cx^2$$

x இன் அடுக்குகளின் குணக்கங்களை ஒப்பிட;

x^0 : 1 = A

x : 3 = B

x^2 : 4 = 2A+C (5) + (5)

$x^3 : 3 = B$

$x^4 : 1 = A$

$\therefore A = 1,\ B = 3,\ C = 2.$ (5)

15

$$\frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2+1}+\frac{2x}{(x^2+1)^2} \quad (5)$$

$$\int\frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}=\int\frac{1}{x}\,dx+3\int\frac{1}{x^2+1}\,dx+2\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx. \quad (5)$$

(5)

$= \ln|x|+3\tan^{-1}x-\dfrac{1}{x^2+1}+E,$ where E is an arbitrary constant.

(5) (5) (5) (5)

35

(*b*)

$$I=\int_0^{\frac{1}{4}}\sin^{-1}(\sqrt{x})dx$$

$$=x\sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right)\Big|_0^{\frac{1}{4}}-\int_0^{\frac{1}{4}}x\frac{1}{\sqrt{1-x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}}dx. \quad (10)$$

$$=\frac{1}{4}.\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$$

(10)

$$=\frac{\pi}{24}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$$

20

$\sqrt{x}=\sin\theta \Rightarrow dx=2\sin\theta\cos\theta d\theta$ என்க

(5)

$x=0$ ஆகும்போது $\theta=0$

$x=\frac{1}{4}$h ஆகும்போது $\theta=\frac{\pi}{6}$ (5)

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}2\sin\theta\cos\theta d\theta \quad (5)$$

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 2\theta)d\theta$ (5)

$= \left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$ (5)

$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (5)

$\therefore I = \frac{\pi}{24} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{24}.$

(5)

35

(c)

$\frac{d}{dx}(x\ln(x^2+1) + 2\tan^{-1}x - 2x)$

$= x\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(2x) + \ln(x^2+1) + \frac{2}{1+x^2} - 2$

$= \ln(x^2+1) + \underbrace{\frac{2x^2+2-2(1+x^2)}{1+x^2}}_{=0}$ (5) + (5)

$= \ln(x^2+1).$ (5)

15

$\int \ln(x^2+1)dx = x\ln(x^2+1) + 2\tan^{-1}x - 2x + C$, C இங்கு எதேச்சை மாறிலி (5)

$\therefore \int_0^1 \ln(x^2+1)dx = \ln 2 + 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2$ (5)

$= \frac{1}{2}(2\ln 2 + \pi - 4)$

$= \frac{1}{2}(\ln 4 + \pi - 4)$ (5)

15

$$\int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx$$

$$= \int_0^1 \ln(x^2+1) \ + \ \int_0^1 \ln(x^2-2x+2)dx$$ (5)

$$\int_0^1 \ln(x^2-2x+2)dx$$

$$= \int_0^1 \ln\left((1-x)^2-2(1-x)+2\right)dx$$

$$= \int_0^1 \ln(x^2+1)dx$$ (5)

$$\therefore \int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx = 2\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$$

$$= \ln 4 + \pi - 4$$ (5)

15

---

16. $P \equiv (x_1, y_1)$ எனவும் l ஆனது $ax+by+c=0$ இனால் தரப்படும் நேர்கோடு எனவும் கொள்வோம். புள்ளி P இனூடான l இற்குச் செங்குத்தான கோடு மீது உள்ள புள்ளி எதனதும் ஆள்கூறுகள் (x_1+at, y_1+bt) இனால் தரப்படுகின்றனவெனக் காட்டுக; இங்கு $t \in \mathbb{R}$.

P இலிருந்து l இற்குள்ள செங்குத்துத் தூரம் $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ என உய்த்தறிக.

l ஆனது நேர்கோடு $x+y-2=0$ எனக் கொள்வோம். $A \equiv (0,6)$, $B \equiv (3,-3)$ ஆகிய புள்ளிகள் l இன் இரு பக்கங்களிலும் இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக.

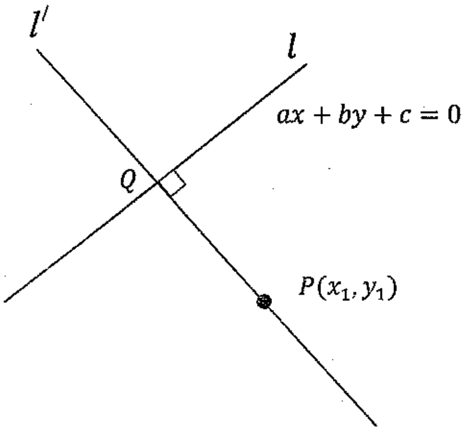
l இற்கும் கோடு AB இற்குமிடையே உள்ள கூர்ங்கோணத்தைக் காண்க.

l ஐத் தொடுவனவும் முறையே A, B ஆகிய மையங்களைக் கொண்டனவுமான S_1, S_2 என்னும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

l இனதும் கோடு AB இனதும் வெட்டுப் புள்ளி C எனக் கொள்வோம். புள்ளி C இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

S_1, S_2 ஆகியவற்றுக்கு C இனூடாக உள்ள மற்றைய பொதுத் தொடலியின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

உற்பத்தியினூடாகச் செல்வதும் S_1 இன் பரிதியை இருகூறிடுவதும் S_2 இற்கு நிமிர்கோணமானதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு $3x^2+3y^2-38x-22y=0$ எனக் காட்டுக.



$(a^2+b^2 \neq 0)$ ஆகும்

l' இன் சமன்பாடு: $y-y_1=\dfrac{b}{a}(x-x_1)$ (5)

$\therefore \dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{x-x_1}{a}=t$ (என்க) (5)

$x=x_1+at,\ y=y_1+bt$ (5)

$(a=0$ ம் $b\neq 0$ அல்லது $a\neq 0$ ம் $b=0$. ஆகும்போது இது வலிதாகும்) **15**

l, l^1. என்பன இடைவெட்டும் புள்ளி $Q \equiv (x_2, y_2) \equiv (x_1 + at_1, y_1 + bt_1)$ என்க

Q ஆனது l, இன் மீது உள்ளதால் $a(x_1 + at_1) + b(y_1 + bt_1) + c = 0.$

$$\therefore t_1 = -\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}.$$ (5)

P இலிருந்து l இற்கான செங்குத்து தூரம் $= PQ$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ (5)

$$= \sqrt{a^2 t_1^2 + b^2 t_1^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\, |t_1|.$$ (5)

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{(a^2 + b^2)}$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$ (5)

20

$\ell : x + y - 2 = 0$

$(0 + 6 - 2)(3 - 3 - 2) = -8 < 0$ (5)

$\therefore$ ∴ A, B என்பன ℓ இன் எதிரெதிர் பக்கங்களில் இருக்கும் (5)

10

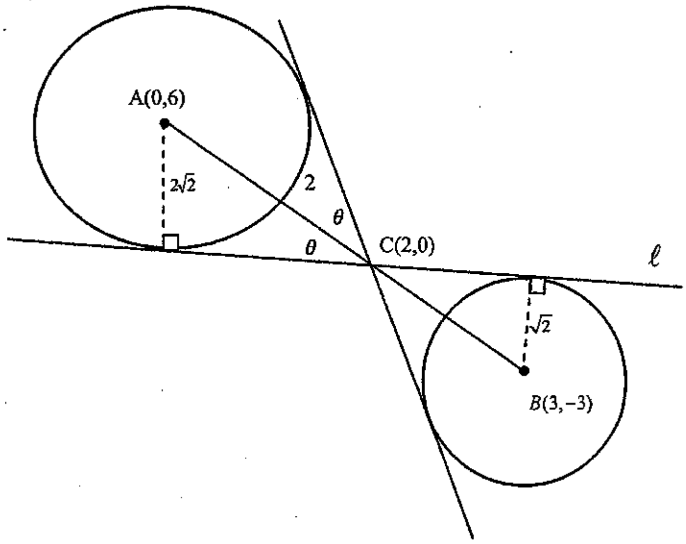
AB இன் படித்திறன் $= -3$ (5)

ℓ இற்கும் AB இற்கும் இடையிலான கூர்ங்கோணம்

$$\tan\theta = \left|\frac{-1 - (-3)}{1 + (-1)(-3)}\right|$$ (5)

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$ (5)

15



S_1 இன் ஆரை $= \dfrac{|0+6-2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ (5) (5), S_2 இன் ஆரை $= \dfrac{|3-3-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$ (5) (5)

$\therefore S_1 : x^2 + (y-6)^2 = 8$ (5)

i.e. $x^2 + y^2 - 12y + 28 = 0.$

$S_2 : (x-3)^2 + (y+3)^2 = 2$ (5)

i.e $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 16 = 0$

30

$AC : CB = 2\sqrt{2} : \sqrt{2} = 2:1$ (5)

$\therefore C \equiv \left(\dfrac{6+0}{3}, \dfrac{-6+6}{3}\right) = (2,0)$ (5)

C இனூடாக செல்லும் மற்றைய பொதுதொடலியின் படித்திறன் m என்க

$\therefore \tan\theta = \dfrac{1}{2} = \left|\dfrac{m-(-3)}{1+m(-3)}\right|$ (5)

$\Leftrightarrow \quad 1-3m = 2m+6 \text{ or } 3m-1 = 2m+6$

$\Leftrightarrow \quad m = -1 \text{ or } m = 7$

$\therefore m = 7.$ (5)

$\therefore$ தேவையான சமன்பாடு $y - 0 = 7(x-2).$ (5)

i.e. $\quad 7x - y - 14 = 0.$

25

$S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்பது வேண்டிய வட்டத்தின் சமன்பாடு என்க.

S ஆனது உற்பத்திக்கூடாக செல்வதால், $c=0$. (5)

S ஆனது S_1, இன்பரிதியை இருகூறிடுவதால் பொதுத்தொடுநாண் A

இற்கூடாக செல்லும்.

பொதுதொடுநாணின் சமன்பாடு $S-S_1 \equiv 2gx+(2f+12)y-28=0$ (5)

$A\equiv(0,6)$ ஆனது $S-S_1=0$, இன் மீதுள்ளதால்

$(2f+12)(6)-28=0.$ (5)

$(f+6)(3)-7=0$, இலிருந்து $f=-\dfrac{11}{3}$. (5)

S ஆனது S_2, இற்கு நிமிர்கோணம் ஆகையால் $2g(-3)+2f(3)=0+16$. (5)

$\therefore -3g+3\left(\dfrac{-11}{3}\right)=8, \Rightarrow g=-\dfrac{19}{3}$. (5)

$\therefore$ தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு

$x^2+y^2+2\left(\dfrac{-19}{3}\right)x+2\left(\dfrac{-11}{3}\right)y=0$ (5)

i.e. $3x^2+3y^2-38x-22y=0.$

35

17. (*a*) $\cos(A+B)$, $\cos(A-B)$ ஆகியவற்றை $\cos A$, $\cos B$, $\sin A$, $\sin B$ ஆகியவற்றில் எழுதுக.

இதிலிருந்து, $\cos C+\cos D=2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$ எனக் காட்டுக.

$\cos C-\cos D=-2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$ என **உய்த்தறிக.**

சமன்பாடு $\cos 9x+\cos 7x+\cot x(\cos 9x-\cos 7x)=0$ ஐத் தீர்க்க.

(*b*) வழக்கமான குறிப்பீட்டில், ஒரு முக்கோணி ABC இற்குக் **கோசைன் நெறியைக்** கூறி நிறுவுக.

$n\in\mathbb{Z}$ இற்கு $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ எனக் கொள்வோம். $\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ எனக் காட்டுக.

ஒரு முக்கோணி ABC இல் $AB=20$ cm, $BC=10$ cm, $\sin 2B=\frac{24}{25}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

அத்தகைய இரு வேறுவேறான முக்கோணிகள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டி, ஒவ்வொன்றுக்கும் AC இன் நீளத்தைக் காண்க.

(*c*) சமன்பாடு $\sin^{-1}\left[(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}\right]+\tan^{-1}(e^x)=\tan^{-1}(2)$ ஐத் தீர்க்க.

(*a*)

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B \longrightarrow$ (1) (5)

$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B \longrightarrow$ (2) (5)

10

---

(1) + (2) $\quad \cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$ (5)

$A+B=C$ எனவும் $A-B=D$, எனவும் கொள்வதால் $A=\frac{C+D}{2}, B=\frac{C-D}{2}$

$\therefore \cos C+\cos D=2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right).$ (5)

10

இப்பொழுது, $\cos C-\cos D=\cos C+\cos(\pi-D)$ (5)

$$=2\cos\left(\frac{C+(\pi-D)}{2}\right)\cos\left(\frac{C-(\pi-D)}{2}\right)$$

$$=2\sin\left(\frac{D-C}{2}\right)\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)$$

$$=-2\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)\sin\left(\frac{C+D}{2}\right).$$ (5)

10

$\cos 9x + \cos 7x + \cot x\ (\cos 9x - \cos 7x) = 0$ $(\sin x \neq 0)$

$\therefore 2\cos 8x \cos x + \dfrac{\cos x}{\sin x}(-2\sin 8x \sin x) = 0$ (5)

$\therefore \cos x = 0$ அல்லது $(\cos 8x - \sin 8$ (5)

$\therefore \cos x = 0$ அல்லது $\tan 8x = 1.$

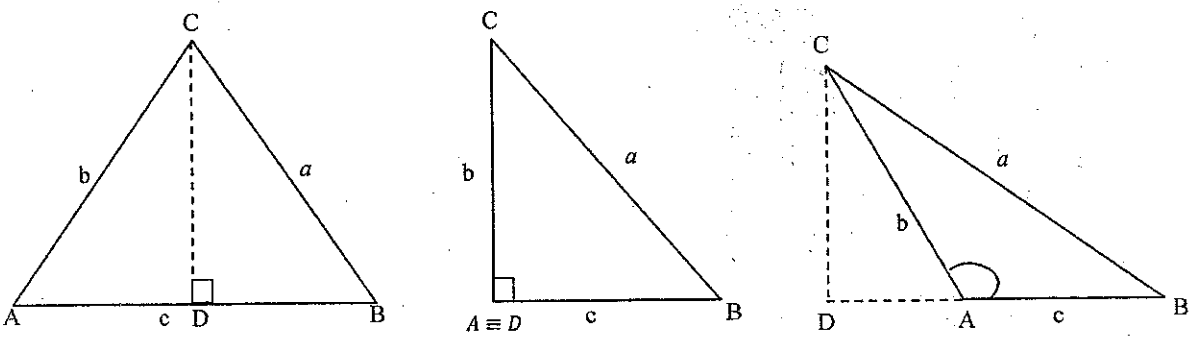
$m \in \mathbb{Z}$ இற்கு $x = 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$ அல்லது $n \in \mathbb{Z}$ இற்கு $8x = n\pi + \dfrac{\pi}{4}$

$m \in \mathbb{Z}$ இற்கு $x = 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$ அல்லது $n \in \mathbb{Z}$ இற்கு $x = \dfrac{n\pi}{8} + \dfrac{\pi}{32}$ (5) + (5) **20**

(b)

கோசைன் நெறி: யாதாயினுமொரு முக்கோணி ABC இற்கு (5)

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ஆகும்



நிறுவல் : C இலிருந்து AB மீதான செங்குத்தின் அடி D என்க . பைதகரஸ் தேற்றத்தின் படி $BC^2 = BD^2 + DC^2$ —— (1) (5)

வகை (i) A கூர்ங்கோணம் எனின்; வகை (ii) A விரிகோணம் எனின்

$DC = b\sin A$

$DB = c - b\cos A$ (5)

$DC = b\sin(\pi - A) = b\sin A$

$DB = c + b\cos(\pi - A) = c - b\cos A$ (5)

$\therefore$ இரு வகைகளிலும், (1) $\Rightarrow a^2 = b^2\sin^2 A + (c - b\cos A)^2$

$= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A$

$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A\ (\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1)$ (5)

$A = \dfrac{\pi}{2}$, ஆகும்போது $\cos A = 0$ மற்றைய வகைகளிலும் இது நிகழும். (5) **30**

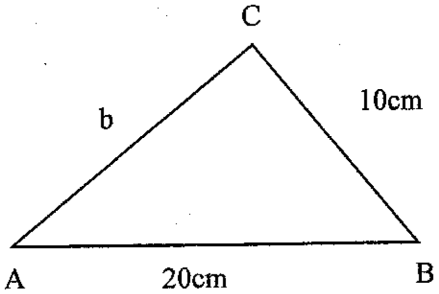
$x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$. என்க $(\cos x \neq 0)$

$\sin 2x = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x} \times \cos^2 x$ (5)

$= \frac{2\tan x}{\sec^2 x}$

$= \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ (5)

10



$\sin 2B = \frac{24}{25} \Rightarrow B$ கூர்ங்கோணம்

$\therefore \frac{2t}{1+t^2} = \frac{24}{25}$, இங்கு $t = \tan B$ (5)

$12t^2 - 25t + 12 = 0$

$(4t-3)(3t-4) = 0$

$t = \frac{3}{4}$ or $\frac{4}{3}$ (5) + (5)

$\therefore$ *B இற்கு இரு வேறு வேறான தீர்வுகள் உண்டு*

$\therefore$ *இரு வேறு வேறான முக்கோணிகள் உண்டு*

B கூர்ங்கோணம் $\cos B = \frac{3}{5}$ or $\cos B = \frac{4}{5}$

When $\cos B = \frac{3}{5}$; $AC^2 = (20)^2 + 10^2 - 2(20)(10)\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow AC = 2\sqrt{65}.$ (5)

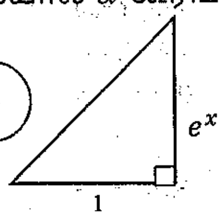
$\cos B = \frac{4}{5}$; ஆகையில் $AC^2 = (20)^2 + (10)^2 - 2(20)(10)\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow AC = 6\sqrt{5}.$ (5)

25

(c)

$\alpha = \sin^{-1}(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}$. என்க $(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}} > 0$, ஆகையால் α கூர்ங்கோணம்.

எனவே $\sin\alpha = \left(1+e^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^x}{\sqrt{1+(e^x)^2}}$ (5)



$\therefore \tan\alpha = e^x$. (5)

தரப்பட்ட சமன்பாட்டிலிருந்து $\alpha + \alpha = \lambda$.

$\therefore \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan\lambda$ (5)

$\Rightarrow \quad \dfrac{2e^x}{1-e^{2x}} = 2$ (5)

$\Rightarrow \quad e^x = 1 - e^{2x}$

$\Rightarrow \quad e^{2x} + e^x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad e^x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (5)

$e^x > 0$, ஆகையால் (–) குறி எடுக்கப்பட முடியாது.

$\therefore e^x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (5)

$\therefore \quad x = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. (5)

x இன் இப்பெறுமானமானது தரப்ட்ட சமன்பாட்டை திருப்தி செய்கின்றது.

35

க.பொ.த. (உயர்தர)ப் பரீட்சை - 2021 (2022)

10 - இணைந்த கணிதம்

புள்ளி வழங்கும் திட்டம்

பத்திரம் II

பகுதி A	$= 10\times 25$	$= 250$
பகுதி B	$= 05\times 150$	$= 750$

மொத்தம் $= \dfrac{1000}{10}$

இறுதி புள்ளி $= 100$

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடல் - பொது நுட்ப முறைகள்

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடும் போதும், புள்ளிப்பட்டியலில் புள்ளிகளைப் பதியும் போதும் ஓர் அங்கீகரிக்கப்பட்ட முறையைக் கடைப்பிடித்தல் கட்டாயமானதாகும். அதன்பொருட்டு பின்வரும் முறையில் செயற்படவும்.

1. விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடுவதற்கு சிவப்பு நிற குமிழ்முனை பேனாவை பயன்படுத்தவும்.
2. சகல விடைத்தாள்களினதும் முதற்பக்கத்தில் உதவிப் பரீட்சகரின் குறியீட்டெண்ணைக் குறிப்பிடவும். இலக்கங்கள் எழுதும்போது **தெளிவான இலக்கத்தில்** எழுதவும்.
3. இலக்கங்களை எழுதும்போது பிழைகள் ஏற்பட்டால் அவற்றைத் தனிக்கோட்டினால் கீறிவிட்டு, மீண்டும் பக்கத்தில் சரியாக எழுதி, சிற்றொப்பத்தை இடவும்.
4. ஒவ்வொரு வினாவினதும் உபபகுதிகளின் விடைகளுக்காக பெற்றுக்கொண்ட புள்ளியை பதியும் போது அந்த வினாப்பகுதிகளின் இறுதியில் △ இன் உள் பதியவும். இறுதிப் புள்ளியை வினா இலக்கத்துடன் □ இன் உள் பின்னமாகப் பதியவும். புள்ளிகளைப் பதிவதற்கு பரீட்சகர்களுக்காக ஒதுக்கப்பட்ட நிரலை உபயோகிக்கவும்.

உதாரணம் - வினா இல 03

(i) .... ✓ 4/5

(ii) .... ✓ 3/5

(iii) .... ✓ 3/5

(03) (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = $\boxed{\frac{10}{15}}$

பல்தேர்வு விடைத்தாள் (துளைத்தாள்)

1. க.பொ.த.(உ. தர) மற்றும் தகவல் தொழிநுட்பப் பரீட்சைக்கான துளைத்தாள் திணைக்களத்தால் வழங்கப்படும். சரியாக துளையிடபட்டு அத்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாள் தங்களுக்கு கிடைக்கப்பெறும். அத்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாளைப் பயன்படுத்துவது பரீட்சகரின் கடமையாகும்.
2. அதன் பின்னர் விடைத்தாளை நன்கு பரிசீலித்துப் பார்க்கவும். ஏதாவது வினாவுக்கு, ஒரு விடைக்கும் அதிகமாக குறியிட்டிருந்தாலோ, ஒரு விடைக்காவது குறியிடப்படாமலிருந்தாலோ தெரிவுகளை வெட்டிவிடக்கூடியதாக கோடொன்றைக் கீறவும். சில வேளைகளில் பரீட்சார்த்தி முன்னர் குறிப்பிட்ட விடையை அழித்துவிட்டு வேறு விடைக்குக் குறியிட்டிருக்க முடியும். அவ்வாறு அழித்துள்ள போது நன்கு அழிக்காது விட்டிருந்தால், அவ்வாறு அழிக்கப்பட்ட தெரிவின் மீதும் கோடிடவும்.
3. துளைத்தாளை விடைத்தாளின் மீது சரியாக வைக்கவும். சரியான விடையை ✓ அடையாளத்தாலும் பிழையான விடையை ○ அடையாளத்தாலும் இறுதி நிரலில் அடையாளமிடவும். சரியான விடைகளின் எண்ணிக்கையை அவ்வவ் தெரிவுகளின் இறுதி நிரையின் கீழ் அத்துடன் அவற்றை கூட்டி சரியான புள்ளியை உரிய கட்டத்தில் எழுதவும்.

கட்டமைப்பு கட்டுரை விடைத்தாள்கள்

1. பரீட்சார்த்திகளால் விடைத்தாளில் வெறுமையாக விடப்பட்டுள்ள இடங்களையும், பக்கங்களையும் குறுக்குக் கோடிட்டு வெட்டிவிடவும். பிழையான பொருத்தமற்ற விடைகளுக்குக் கீழ் கோடிடவும். புள்ளி வழங்கக்கூடிய இடங்களில் ✓ அடையாளமிட்டு அதனைக் காட்டவும்.
2. புள்ளிகளை ஓவலண்ட் கடதாசியின் இடது பக்கத்தில் குறிக்கவும்.
3. சகல வினாக்களுக்கும் கொடுத்த முழுப் புள்ளியை விடைத்தாளின் முன் பக்கத்திலுள்ள பொருத்தமான பெட்டியினுள் வினா இலக்கத்திற்கு நேராக 2 இலக்கங்களில் பதியவும். வினாத்தாளில் உள்ள அறிவுறுத்தலின் படி வினாக்கள் தெரிவு செய்யப்படல் வேண்டும். எல்லா வினாக்களினதும் புள்ளிகளும் முதல் பக்கத்தில் பதியப்பட்ட பின் விடைத்தாளில் மேலதிகமாக எழுதப்பட்டிருக்கும் விடைகளின் புள்ளிகளில் குறைவான புள்ளிகளை வெட்டி விடவும்.
4. மொத்த புள்ளிகளை கவனமாக கூட்டி முன் பக்கத்தில் உரிய கூட்டில் பதியவும். விடைத்தாளில் வழங்கப்பட்டுள்ள விடைகளுக்கான புள்ளியை மீண்டும் பரிசீலித்த பின் முன்னால் பதியவும். ஒவ்வொரு வினாக்களுக்கும் வழங்கப்படும் புள்ளிகளை உரிய விதத்தில் எழுதுவும்.

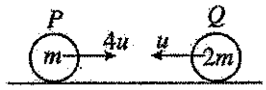
புள்ளிப்பட்டியல் தயாரித்தல்

இம்முறை சகல பாடங்களுக்குமான இறுதிப்புள்ளி குழுவினுள் கணிப்பிடப்படமாட்டாது. இது தவிர ஒவ்வொரு வினாப் பத்திரத்துக்குமான இறுதிப்புள்ளி தனித்தனியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதியப்பட வேண்டும். பத்திரம் I ற்கான பல்தேர்வு வினாப்பத்திரம் மட்டும் இருப்பின் புள்ளிகள் இலக்கத்திலும் எழுத்திலும் பதியப்பட வேண்டும்.

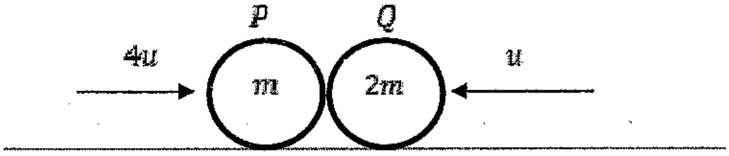
○○○

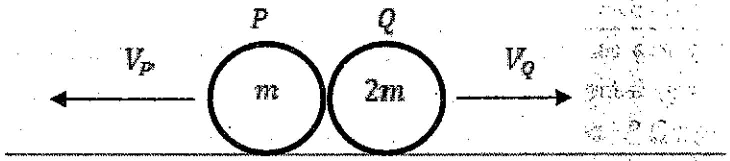
Part A

1. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உம் திணிவு $2m$ ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை Q உம் ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது ஒரே நேர்கோட்டின் வழியே ஒன்றையொன்று நோக்கி முறையே $4u$, u என்னும் கதிகளுடன் இயங்கி நேரடியாக மோதுகின்றன. P இற்கும் Q இற்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் $\frac{4}{5}$ ஆகும். மோதுகைக்குப் பின்னர் P உம் Q உம் ஒன்றிலிருந்தொன்று எதிர்த் திசைகளில் இயங்குகின்றனவெனக் காட்டுக.



மோதுகைக்குப் பின்னர் P உம் Q உம் ஒன்றுக்கொன்று இடைத்தூரம் a இல் இருப்பதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.





தொகுதிக்கு $\underline{I} = \Delta(m\underline{V})$: (5) — $I = \Delta(m\underline{v})$ for P and Q

$$0 = (2mV_Q - mV_p) - (4mu - 2mu)$$

$$\Rightarrow 2V_Q - V_p = 2u \quad \text{(1)}$$

நியூட்டனின் பரிசோதனை விதிப்படி — Newton's Experimental Law

$$V_Q + V_p = \frac{4}{5}(4u + u) \quad (5)$$

$$V_Q + V_p = 4u \quad \text{(2)}$$

$$\therefore V_Q = 2u \, , V_p = 2u. \quad (5)$$

For both V_p and V_Q

(1) + (2) : $V_Q > 0 \, , V_p > 0.$ (5)

$\therefore$ மொத்தலின்பின் P, Q ஒன்றையொன்று விலகிச்செல்லும்.

For both $V_p > 0$ and $V_Q > 0$ or equivalent

$$\underline{V}(P,Q) = \underline{V}(P,E) + \underline{V}(E,Q)$$

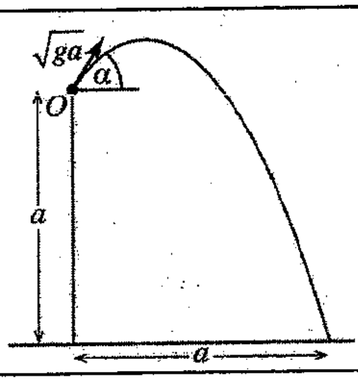
$$= \overleftarrow{2u} + \overleftarrow{2u}$$

$$= 4u \leftarrow$$

தேவையான நேரம் $= \frac{a}{4u}$. (5)

$\frac{a}{4u}$ seen.

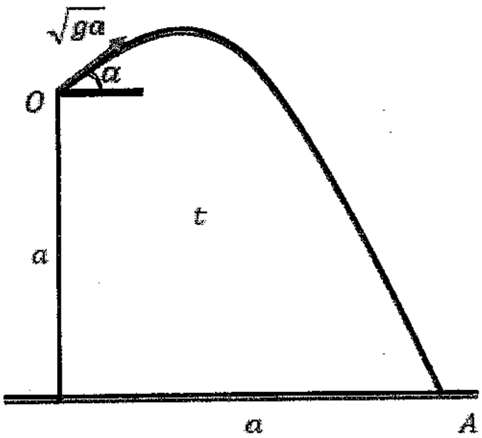
2. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஒரு கிடைத் தரைக்கு மேலே நிலைக்குத்துத் தூரம் a இல் உள்ள ஒரு புள்ளி O இலிருந்து ஒரு துணிக்கை கிடையுடன் கோணம் $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ இல் தொடக்க வேகம் $\sqrt{ga}$ உடன் எறியப்படுகின்றது. துணிக்கை புள்ளி O இலிருந்து கிடைத் தூரம் a இல் தரையில் அடிக்கின்றது. $\tan\alpha = 1+\sqrt{2}$ எனக் காட்டுக.



....

....

25



<u>O இலிருந்து A இற்கு</u> $s = ut + \frac{1}{2}at^2$:

$\rightarrow \quad a = \sqrt{ga}\cos\alpha \ t$ ------------------ (1) **5** | $\rightarrow s = u + \frac{1}{2}at^2$

$\uparrow \quad -a = \sqrt{ga}\ \sin\alpha\ t - \frac{1}{2}gt^2$ ------------------ (2) **5** | $\uparrow s = u + \frac{1}{2}at^2$

(1) இலிருந்து $t = \frac{a}{\sqrt{ga}\cos\alpha}$.

(2) இலிருந்து $-a = a\tan\alpha - \frac{1}{2}g\frac{a^2}{ga\cos^2(\alpha)}$.

$\therefore \quad -2 = 2\tan\alpha - (1+tan^2\alpha).$ **5** | For the quadratic in tan α

$\therefore \quad tan^2\alpha - 2\tan\alpha - 1 = 0.$

$$\therefore \tan\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$ (5)

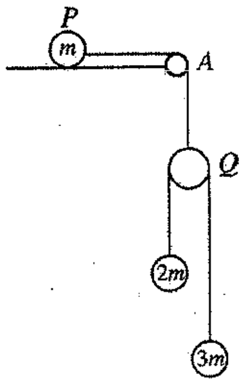
both ±

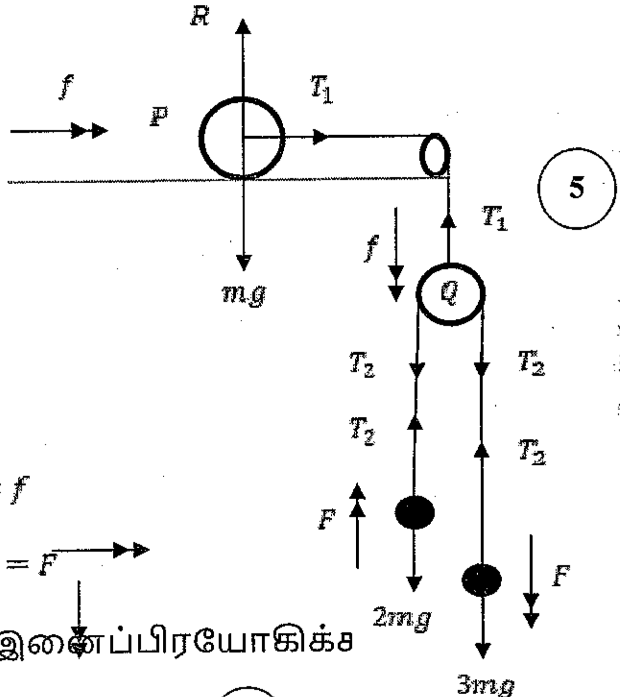
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ஆகையால் (-) சாத்தியமில்லை.

$$\therefore \tan\alpha = 1 + \sqrt{2}.$$ (5)

Selecting the correct sign

3. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது வைக்கப்பட்டு, மேசையின் ஓரத்தின் புள்ளி A இல் நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஒரு நிலைத்த சிறிய ஒப்பமான கப்பிக்கு மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் ஓர் இலேசான ஒப்பமான கப்பி Q உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு கப்பி Q இற்கு மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் $2m$, $3m$ என்னும் திணிவுகளை உடைய துணிக்கைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கைகளும் இழைகளும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இருக்கின்றன. இழைகள் இறுக்கமாக இருக்கத் தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. Q இன் ஆர்முடுகலைத் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக.





(5)

f ↠ ↓ f

$\underline{a}(P,E) = f$

$\underline{a}(3m,Q) = F$ ↠ ↓

$\underline{F} = m\underline{a}$ இனைப்பிரயோகிக்க

$\underline{F} = m\underline{a}$ for P

(P) → $T_1 = mf$ (5)

$\underline{F} = m\underline{a}$ for Q

(Q) ↓ $2T_2 - T_1 = 0$ (5)

$\underline{F} = m\underline{a}$ for $2m$

(2m) ↑ $T_2 - 2mg = 2m(F - f)$ (5)

$\underline{F} = m\underline{a}$ for $3m$

(3m) ↓ $3mg - T_2 = 3m(F + f)$ (5)

அல்லது

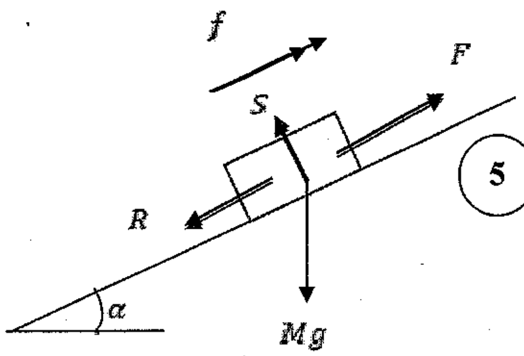
(Q) (2m) and (3m) ↓ $T_1 - 2mg - 3mg = 2mg(F - f) + 3m(f + F)$

$\underline{F} = m\underline{a}$ for Q, $2m$ and $3m$

எதாவது நான்கு சுயாதீனமான சமன்பாடுகள் (20)

25

4. M kg திணிவுள்ள ஒரு கார் கிடையுடன் சாய்வு $\sin^{-1}\left(\frac{1}{20}\right)$ ஐக் கொண்ட ஒரு நேர் வீதி வழியே ஒரு மாறா ஆர்முடுகலுடன் மேல்நோக்கி இயங்குகின்றது. அதன் இயக்கத்திற்கு ஒரு மாறாத் தடை R N உள்ளது. அது தன் கதியை 36 km h^{-1} இலிருந்து 72 km h^{-1} இற்கு அதிகரிக்கச் செய்வதற்குக் கார் சென்ற தூரம் 500 m ஆகும். அதன் கதி 54 km h^{-1} ஆக இருக்கும்போது கார் உஞற்றிய வலுவைத் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக.



(5)

For forces with or without S

$\sin\alpha = \frac{1}{20}$

$\frac{36 \times 1000}{3600} = 10\ ms^{-1}$

$\frac{72 \times 1000}{3600} = 20\ ms^{-1}$ (5)

$\frac{54 \times 1000}{3600} = 15\ ms^{-1}$

For all three conversions of speeds

$\nearrow$ $v^2 = u^2 + 2as$:

$20^2 = 10^2 + 2f(500)$ (5)

$f = \frac{150}{500} = \frac{3}{10} ms^{-2}$

Applying $v^2 = u^2 + 2as$ $\nearrow$

$\nearrow$ $\underline{F} = m\underline{a}$: (5)

$F - R - Mg\sin\alpha = Mf$

Applying $\underline{F} = m\underline{a}$ $\nearrow$

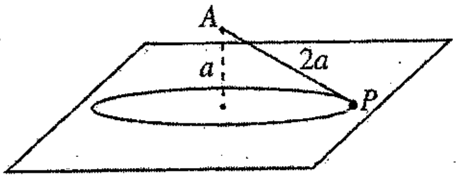
$P = F \cdot V$

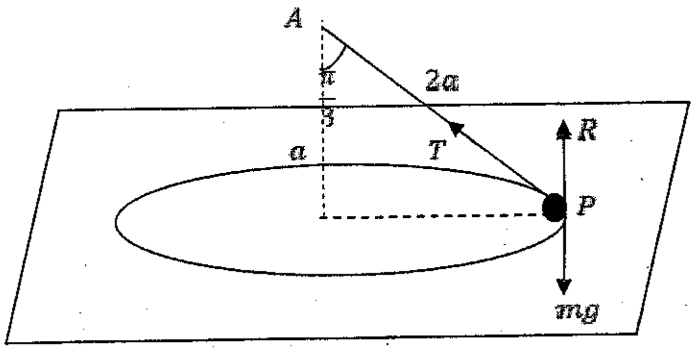
$= F \cdot 15$ (5)

$P = F \cdot 15$ seen

25

5. நீளம் $2a$ ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசைக்கு நிலைக்குத்தாக மேலே தூரம் a இல் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி A உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் மற்றைய நுனியுடன் இணைக்கப்பட்ட திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது இழை இறுக்கமாக இருக்க மேசை மீது ஒரு கிடை வட்டத்தில் சீரான கதி $\sqrt{\frac{ga}{2}}$ உடன் இயங்குகின்றது (உருவைப் பார்க்க). மேசையின் மூலம் துணிக்கை P மீது பிரயோகிக்கப்படும் செவ்வன் மறுதாக்கத்தின் பருமன் $\frac{5}{6}mg$ எனக் காட்டுக.





(5) For the forces

$\underline{F} = m\underline{a}$: இனை பிரயோகிக்க

$\leftarrow T\sin\frac{\pi}{3} = m.\frac{ga}{2(2a\sin\frac{\pi}{3})}$ (5) — $\underline{F} = m\underline{a}$ ←

$\therefore T = \frac{mg}{3}$. (5) — $T = \frac{mg}{3}$ seen or implied

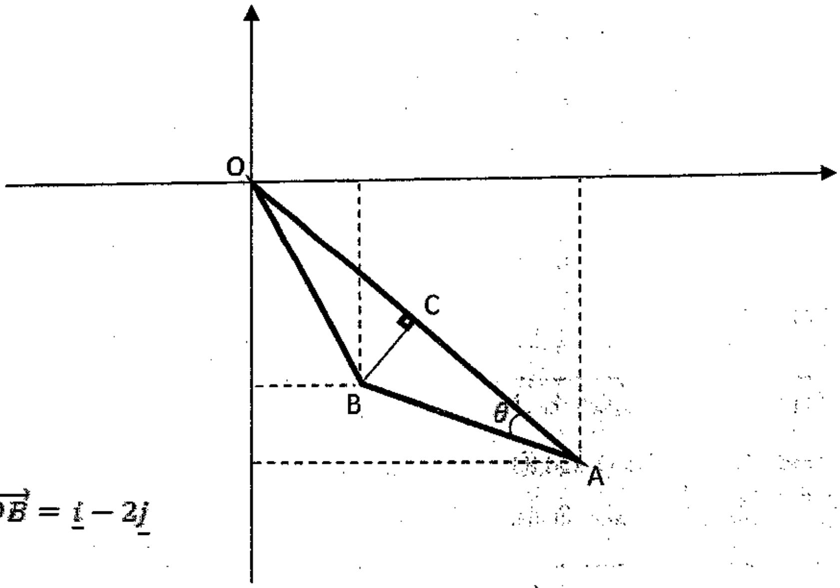
$\uparrow\ R - mg + T\cos\frac{\pi}{3} = 0$ (5) — $\underline{F} = m\underline{a}$ ↑

$\therefore R = mg - \frac{mg}{6}$

$= \frac{5}{6}mg$ (5) — Work leading to the answer

25

6. வழக்கமான குறிப்பீட்டில், ஒரு நிலைத்த உற்பத்தி O பற்றி A, B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$, $\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ ஆகும். $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$ ஐப் பயன்படுத்தி $O\hat{A}B$ ஐக் காண்க. C ஆனது OA மீது $O\hat{C}B=\frac{\pi}{2}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளி எனக் கொள்க. $\overrightarrow{OC}$ ஐக் காண்க.



$\overrightarrow{OA} = 2\underline{i} - 3\underline{j}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{i} - 2\underline{j}$

$\therefore \overrightarrow{AO} = -2\underline{i} + 3\underline{j}$,

$\overrightarrow{AB} = (\underline{i} - 2\underline{j}) - (2\underline{i} - 3\underline{j})$ (5)

$= -\underline{i} + \underline{j}$

$\overrightarrow{AB}$ is terms of $\underline{i}$ and $\underline{j}$

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta$ (5)

$2 + 3 = \sqrt{13}\sqrt{2}\cos\theta$

Definition of $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$ or equivalent

$\therefore \quad \cos\theta = \frac{5}{\sqrt{26}}$ (5)

$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{26}}$ seen

$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)$

$\overrightarrow{OC} = \lambda\,\overrightarrow{OA}$, இங்கு $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{CB} = (\underline{i} - 2\underline{j}) - \lambda(2\underline{i} - 3\underline{j})$ (5)

condition for $O\hat{C}B = \frac{\pi}{2}$ using dot product

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$ இலிருந்து $2(1-2\lambda) - 3(-2+3\lambda) = 0$

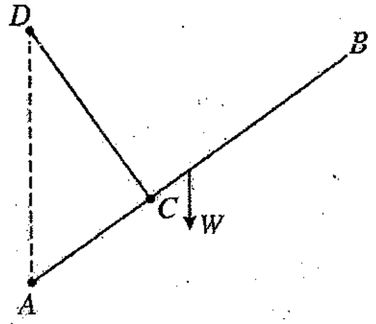
$\therefore \quad \lambda = \frac{8}{13}$ (5)

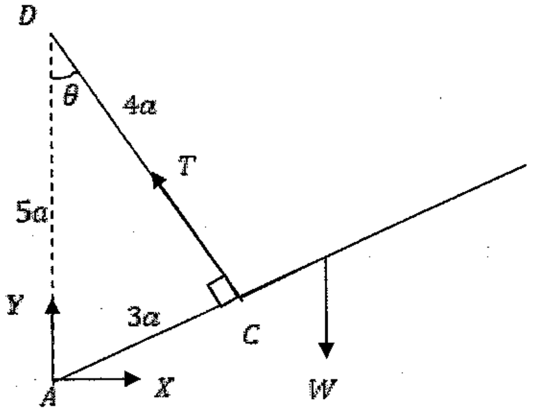
value of λ or equivalent

$\overrightarrow{OC} = \frac{8}{13}(2\underline{i} - 3\underline{j})$

25

7. நீளம் $8a$ ஐயும் நிறை W ஐயும் உடைய ஒரு சீரான கோல் AB இன் முனை A ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. நீளம் $4a$ ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி கோல் மீது $AC = 3a$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளி C உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை மற்றைய நுனி A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே $AD = 5a$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி D உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் நாப்பத்தில் இருக்கின்றது. இழையின் இழுவை $\frac{16}{15}W$ எனக் காட்டுக. A இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடைக் கூறையும் காண்க.





(5) For the forces

$A\hat{C}D = \frac{\pi}{2}$ (5) — $A\hat{C}D = \frac{\pi}{2}$ seen

கோலின் சமநிலைக்கு:

$\curvearrowright A \quad W \times 4a\cos\theta - T \times 3a = 0$ (5) — An equation sufficient to find T.

$\therefore T = \frac{4W}{3}\cos\theta$

$= \frac{4W}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{16W}{15}$ (5) — work leading to the answer

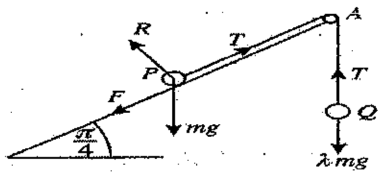
$\rightarrow X = T\sin\theta$

$= \frac{16W}{15} \times \frac{3}{5}$

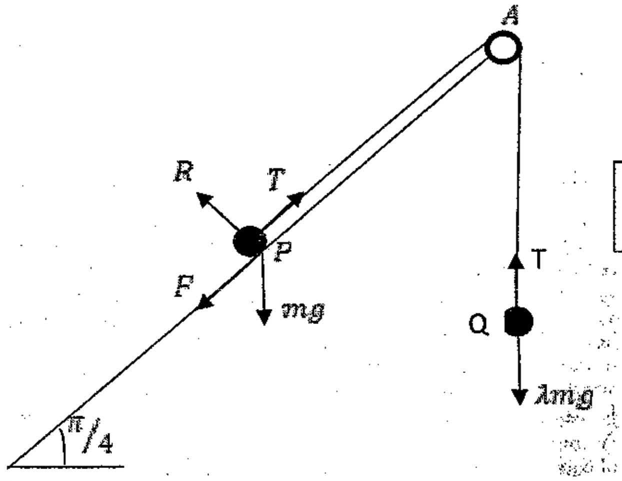
$= \frac{16W}{25}$ (5) — $\frac{16W}{25}$ seen.

25

8. கிடையுடன் கோணம் $\frac{\pi}{4}$ இற் சாய்ந்த ஒரு கரடான தளத்தின் மீது திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P வைக்கப்பட்டுள்ளது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு சாய்தளத்தின் ஓரத்திலே A இல் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான சிறிய கப்பிக்கு மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி துணிக்கை P உடனும் மற்றைய நுனி திணிவு λmg ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை Q உடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை P இற்கும் சாய்தளத்திற்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ ஆகும். கோடு PA ஆனது சாய்தளத்தின் ஓர் அதியுயர் சரிவுக்கோடாக இருக்கும் அதே வேளை இழை இறுக்கமாக இருக்க P, Q ஆகிய இரு துணிக்கைகளும் நாப்பத்தில் இருக்கின்றன.



$\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \lambda \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}$ எனக் காட்டுக. (உரிய விசைகள் உருவிற் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.)



For the forces.

சமநிலைக்கு

(P) $\nwarrow$ $R - mg\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ (5)

$\therefore \quad R = \frac{mg}{\sqrt{2}}$

An equation leading to the value of R

(Q) $\uparrow$ $T - \lambda mg = 0$ (5)

$\therefore \quad T = \lambda mg$

An equation leading to the value of T.

(P) $\nearrow$ $T - F - mg\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ (5)

$\therefore \quad F = \lambda mg - \frac{mg}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\lambda - 1)$

An equation leading to the value of F.

P இன் சமநிலைக்கு

$\frac{1}{2} \geq \frac{|F|}{R}$ (5)

$\therefore \quad |\sqrt{2}\lambda - 1| \leq \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \lambda \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}$ (5)

work leading to the answer

25

9. A, B ஆகியன ஒரு மாதிரி வெளி Ω இன் இரு சாரா நிகழ்வுகளெனக் கொள்வோம். வழக்கமான குறிப்பீட்டில், $P(A)=\frac{1}{5}$ எனவும் $P(B)=\frac{3}{4}$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. $P(A\cup B)$, $P(A|A\cup B)$, $P(B|A')$ ஆகியவற்றைக் காண்க; இங்கு A' ஆனது A இன் நிரப்பு நிகழ்வைக் குறிக்கின்றது.

$$P(A)=\frac{1}{5}, P(B)=\frac{3}{4}$$

A, B என்பன சாரதாவை ஆகையால்,

For the condition for independence

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \quad (5)$$

$$=\frac{3}{20} \quad (5)$$

Formula a for $P(A\cup B)$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{3}{4}-\frac{3}{20}=\frac{4}{5} \quad (5)$$

$\frac{1}{4}$ or equivalent seen.

$$P(A|A\cup B)=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{1/5}{4/5}=\frac{1}{4}$$

$$P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')} \quad (5)$$

$\frac{3}{5}$ or equivalent seen.

$$P(B\cap A')=P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{4}-\frac{3}{20}=\frac{3}{5}$$

அல்லது

$$\left(P(B\cap A')=P(B)\cdot P(A')=\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{5}\right)$$

$$P(B|A')=\frac{3/5}{4/5}=\frac{3}{4} \quad (5)$$

$\frac{3}{4}$ or equivalent seen.

25

10.	நேர் நிறைவெண்களின் ஐந்து நோக்கல்களின் ஒரு தொடையின் இடை 6 உம் வீச்சு 10 உம் ஆகும். அதற்கு இரு ஆகாரங்கள் உள்ளன. இடையம் ஆகாரங்களிலிருந்து வேறுபடுமெனின், ஐந்து நோக்கல்களையும் காண்க.

a, a, b, c, c அதிகரிக்கும் ஒழுங்கிலுள்ள இலக்கங்கள் என்க

வீச்சு 10, ஆகையால் $c - a = 10$. (5) — Condition for the range

$\therefore c = a + 10$ ————(1)

இடை 6, ஆகையால் $\frac{2a+b+2c}{5} = 6$. ————(2) (5) — For this or an equation

(1), (2) இலிருந்து $4a + b + 20 = 30$

$i.e.$ $4a + b = 10$ ————(3) (5) — An equation sufficient to determine the observations

a, b என்பன நேர் நிறை எண்கள் ஆகையால்,

(3) இலிருந்து $4a \leq 9$ a கு சாத்தியமான பெறுமானங்கள் 1,2 மட்டும்

$a = 1$, எனின் $b = 6$.

$a = 2$, எனின் $b = 2$, இடையமும் ஆகாரமும் வேறு வேறு ஆனவை என்பதால்

இது பொருந்தாது (5) — Mean ≠ mode used.

$\therefore$ எனவே இலக்கங்கள் ஆவன

$1, 1, 6, 11, 11$. (5) — 1, 1, 6, 11, 11 seen.

25

11. (*a*) ஒரு புள்ளி O இலிருந்து நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி வேகம் $u\text{ m s}^{-1}$ உடன் எறியப்படும் ஒரு துணிக்கை P ஆனது 4 செக்கன்களுக்குப் பின்னர் ஒரு புள்ளி A ஐ அடையும் அதே வேளை மேலும் 2 செக்கன்களுக்குப் பின்னர் மறுபடியும் A இற்கு வருகின்றது. துணிக்கை P இரண்டாம் தடவை A இல் இருக்கும் கணத்தில் வேறொரு துணிக்கை Q ஆனது O இலிருந்து நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி அதே வேகம் $u\text{ m s}^{-1}$ உடன் எறியப்படுகின்றது. P, Q ஆகியவற்றின் இயக்கங்களுக்கான வேக-நேர வரைபை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக.

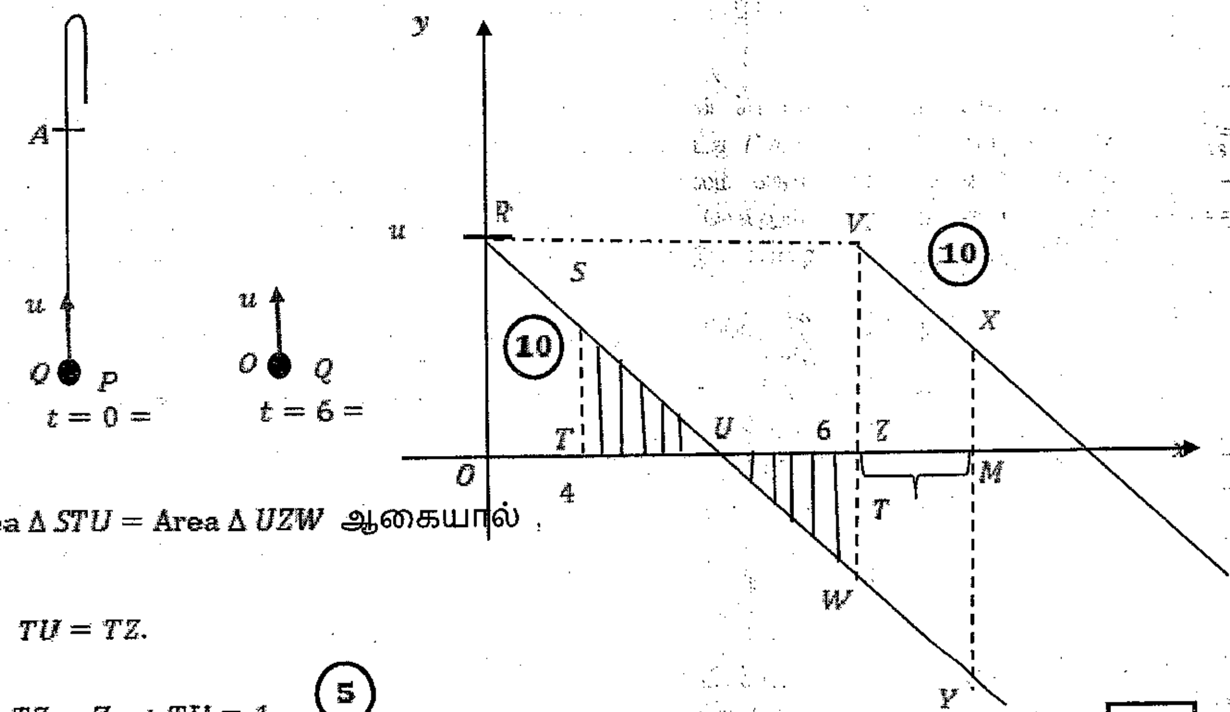
இதிலிருந்து, g இல் u இன் பெறுமானத்தையும் OA இன் உயரத்தையும் P உடன் மோதுவதற்கு Q எடுக்கும் நேரத்தையும் காண்க.

(*b*) ஒரு கப்பல் S நிலம் தொடர்பாகச் சீரான கதி $u\text{ km h}^{-1}$ உடன் வடக்கு நோக்கிச் செல்கின்றது. ஒரு குறித்த கணத்தில் S இலிருந்து கிழக்கே d km தூரத்தில் ஒரு படகு P உம் S இலிருந்து தெற்கே $\sqrt{3}\,d$ km தூரத்தில் வேறொரு படகு Q உம் இருக்கின்றன. படகு P நிலம் தொடர்பாகச் சீரான கதி $2u\text{ km h}^{-1}$ உடன் ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையில் S ஐ இடைமறிப்பதற்குச் செல்லும் அதே வேளை படகு Q நிலம் தொடர்பாகச் சீரான கதி $3u\text{ km h}^{-1}$ உடன் ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையில் P ஐ இடைமறிப்பதற்குச் செல்கின்றது.

(i) படகு P ஆனது கப்பல் S ஐ இடைமறிப்பதற்கு எடுக்கும் நேரம் $\dfrac{d}{\sqrt{3}u}$ h எனவும்

(ii) படகு Q ஆனது படகு P ஐ இடைமறிப்பதற்கு முன்பாகப் படகு P கப்பல் S ஐ இடைமறிக்கும் எனவும் காட்டுக.

(a)



Area $\Delta\, STU$ = Area $\Delta\, UZW$ ஆகையால்,

$TU = TZ.$

$TZ = Z \Rightarrow TU = 1.$ (5)

$\therefore OU = 5.$ (5)

$\Delta\, ROU$, இலிருந்து $g = \frac{u}{5}.$

20

$\therefore u = 5g.$ (5)

$\Delta\, STU$, இலிருந்து $g = \frac{ST}{1} = ST.$ (5)

உயரம் OA = Area of $ORST$.

$= \frac{1}{2}(OR + ST) \times OT$ (5)

$= \frac{1}{2}(u + g) \times 4$ (5)

$= \frac{1}{2} \times 6g \times 4$

$= 12g$ (5)

P உடன் Q மோதுவதற்கு எடுத்த நேரம் T என்க

OA = Area $VZMX$ + Area $WZMY$

= Area $VWYX$ (10)

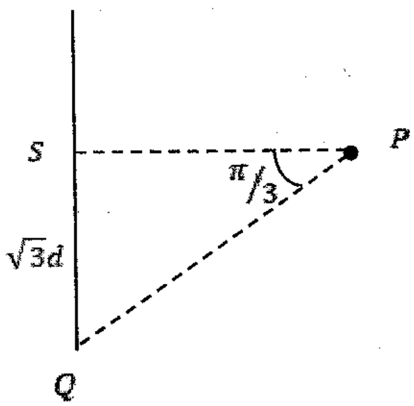
$= \frac{1}{2}(VW + XT) \times ZM$

$\therefore 12g = \frac{1}{2}(6g + 6g) \times T$ (10)

$\therefore T = 2$ sec. (5)

60

(b)



$\underline{V}(S,E) = \uparrow u$

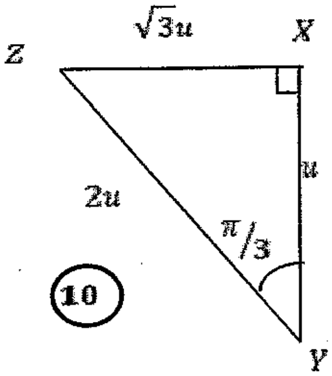
$\underline{V}(P,E) = 2u$

$\underline{V}(Q,E) = 3u$

$\underline{V}(P,S) = \leftarrow$

$\underline{V}(Q,P) =$

(i)



(10)

$\underline{V}(P,S) = \underline{V}(P,E) + \underline{V}(E,S)$ (5)

$= \underline{V}(E,S) + \underline{V}(P,E)$ (5)

$= \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}$

$= \overrightarrow{XZ}$ (5)

தேவையான நேரம் $= \frac{d}{XZ} = \frac{d}{\sqrt{3}u} h.$

25

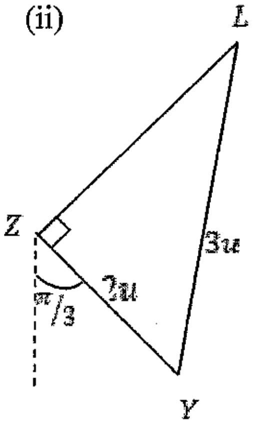
$\underline{V}(Q,P) = \underline{V}(Q,E) + \underline{V}(E,P)$ (5)

$= \underline{V}(E,P) + \underline{V}(Q,E)$ (5)

$= \overrightarrow{ZY} + \overrightarrow{YL}$

$= \overrightarrow{ZL}$

(ii)



(10)

$ZL = \sqrt{(3u)^2 - (2u)^2} = \sqrt{5}u$ (5)

P இனை Qஇடைமறிக்க எடுத்த நேரம் t_2 என்க

$t_2 = \frac{\sqrt{3}\, d \sec(\pi/6)}{\sqrt{5}\, u}$

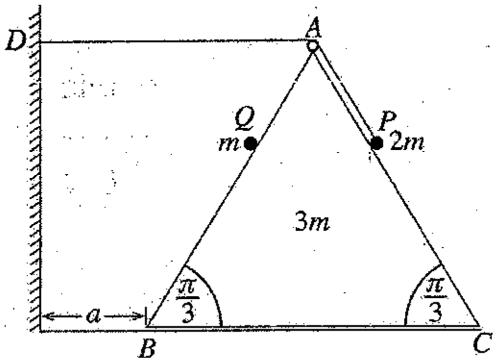
(10)

$= \frac{2d}{\sqrt{5}\, u} h.$ (10)

$\therefore\ t_1 < t_2.$

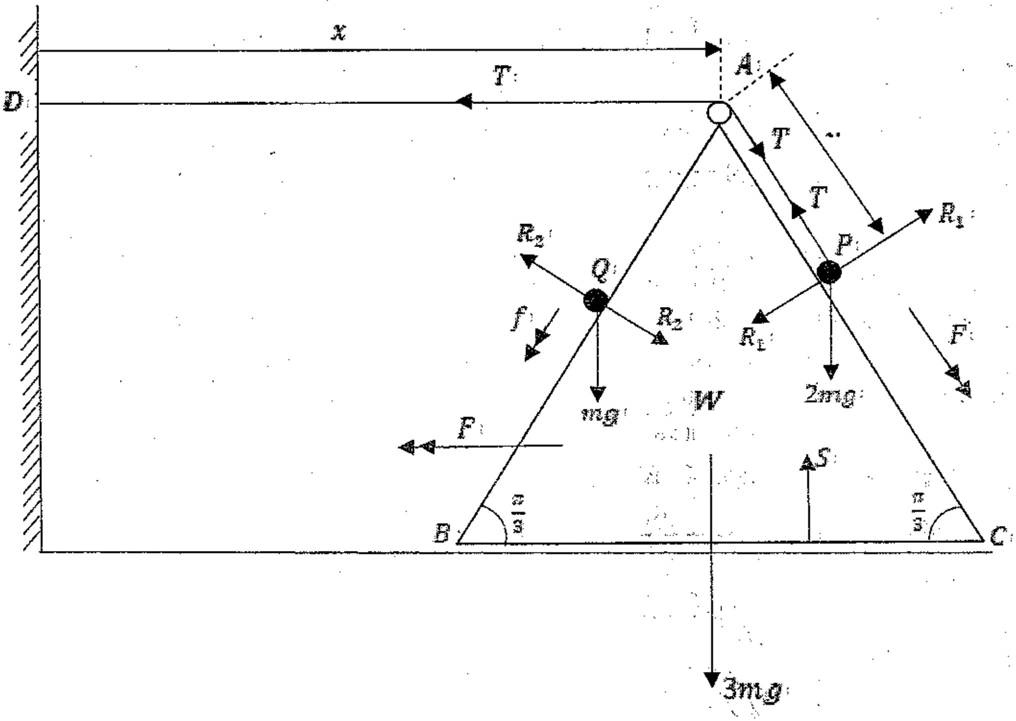
45

12.(a) உருவில் சமபக்க முக்கோணி ABC ஆனது $AB = BC = AC = 6a$ ஆகவும் BC ஐக் கொண்டுள்ள முகம் ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்தின் மீதும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்ட திணிவு $3m$ ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான சீரான ஆப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடான நிலைக்குத்துக் குறுக்குவெட்டாகும். AB, AC ஆகிய கோடுகள் அவற்றைக் கொண்டுள்ள முகங்களின் அதியுயர் சரிவுக் கோடுகளாகும். புள்ளி D ஆனது AD கிடையாக இருக்குமாறு ABC இன் தளத்தில் ஆப்பின் புள்ளி B இலிருந்து தூரம் a இல் உள்ள நிலைக்குத்துச் சுவர் மீதான ஒரு நிலைத்த புள்ளியாகும். A இல் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு சிறிய ஒப்பமான கப்பிக்கு மேலாகச் செல்லும் நீளம் $5a$ ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி AC மீது வைக்கப்பட்டுள்ள திணிவு $2m$ ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை மற்றைய நுனி சுவர் மீது உள்ள நிலைத்த புள்ளி D உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை Q ஆனது AB மீது தாங்கப்பட்டுள்ளது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு $AP = AQ = a$ ஆக இருக்கத் தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது.



ஆப்பு சுவரில் அடிக்கும் கணத்தில் ஆப்புத் தொடர்பாக Q இன் வேகத்தைத் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

a)



$x + y = cons$ (5).

$\therefore \ddot{x} + \ddot{y} = 0$ ________________(1) (5)

$\underline{a}(W, E) = F \leftarrow$ என்க

$\therefore \underline{a}(P, W) = F$ ↘ (by (1)) (5)

அத்துடன் $\underline{a}(Q,W) = f \swarrow$ என்க

$\underline{F} = m\underline{a}$ இனை பிரயோகிக்க

: (P) $\searrow$ $2mg\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - T = 2m\left(F - F\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (15)

(Q) $\swarrow$ $mg\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = m\left(f + F\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (15)

தொகுதிக்கு $(P, Q, and\ W)$ $\longleftarrow$

$T = 3mF + 2m\left(F - F\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + m\left(F + f\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (25)

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ இனை பிரயோகிக்க:

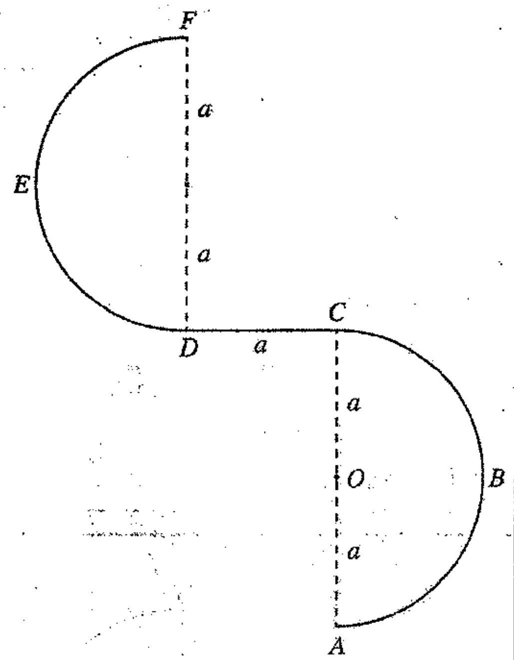
$\longleftarrow$ (W) $a = \frac{1}{2}Ft^2$ (5)

$v = u + at$ இனை பிரயோகிக்க:

$v = Ft$ (5)

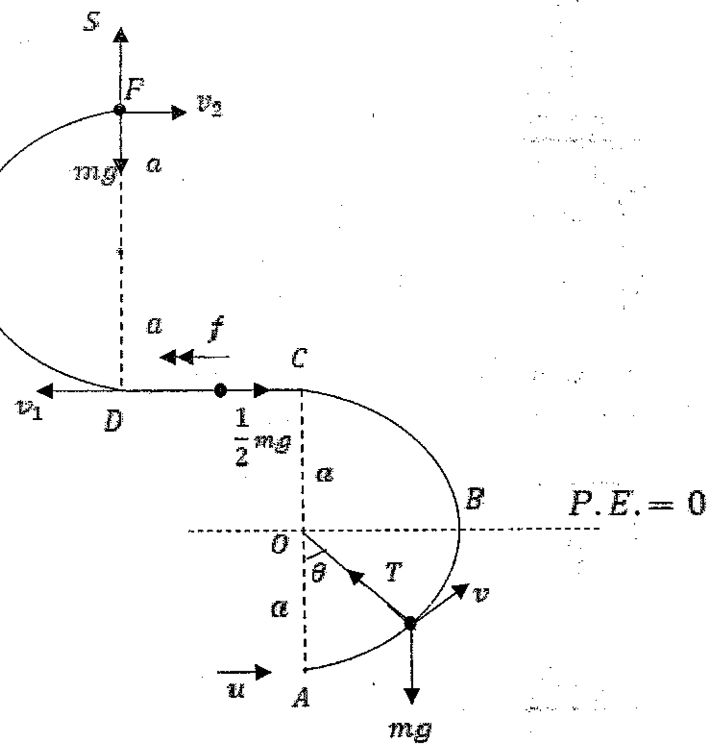
80

(*b*) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஒரு மெல்லிய கம்பி $ABCDEF$ ஆனது நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. பகுதி ABC ஆனது மையம் O ஐயும் ஆரை a ஐயும் கொண்ட ஒரு மெல்லிய **ஒப்பமான** அரைவட்டக் கம்பியாகும். பகுதி CD ஆனது நீளம் a ஐ உடைய ஒரு மெல்லிய **கரடான** கிடைக் கம்பியாகும். பகுதி DEF உம் ஆரை a ஐ உடைய ஒரு மெல்லிய **ஒப்பமான** அரைவட்டக் கம்பியாகும். AC, DF ஆகிய விட்டங்கள் நிலைக்குத்தானவை. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு சிறிய ஒப்பமான மணி P ஆனது A இல் வைக்கப்பட்டுக் கிடையாக ஒரு வேகம் $u\left(>3\sqrt{ag}\right)$ கொடுக்கப்படும் அதே வேளை அது கம்பி வழியே இயங்கத் தொடங்குகின்றது. மணியின் C இலிருந்து D வரையுள்ள இயக்கத்தில் மணி மீது கம்பியின் மூலம் பிரயோகிக்கப்படும் உராய்வு விசையின் பருமன் $\frac{1}{2}mg$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. மணி P இன் A இலிருந்து C வரையுள்ள இயக்கத்தில் $\overrightarrow{OP}$ ஆனது $\overrightarrow{OA}$ உடன் கோணம் θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ ஐ ஆக்கும்போது அதன் கதி v ஆனது $v^2 = u^2 - 2ag(1 - \cos\theta)$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.



F இல் கம்பியைப் பிரிந்து செல்வதற்குச் சற்று முன்னர் மணி P இன் கதி w ஆனது $w^2 = u^2 - 9ag$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டி, அக்கணத்தில் கம்பியின் மூலம் மணி P மீது பிரயோகிக்கப்படும் மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

b)



சக்திக்காப்பின் படி,

$\frac{1}{2}mv^2 - ma\cos\theta = \frac{1}{2}mu^2 - mga$ (15)

PE (5)+KE (5)+Equation (5)

$\therefore\ v^2 = u^2 - 2ga(1-\cos\theta)$ (5)

$\theta = \pi$, ஆகையில் $v^2 = u^2 - 4ga$ ______ (1) (5)

C இலிருந்து D இற்கு, $\leftarrow \underline{F} = m\underline{a}$:

$-\frac{1}{2}mg = mf$

$\therefore\quad f = -\frac{g}{2}$ (10)

$\leftarrow\ v^2 = u^2 + 2as:\ {v_1}^2 = (u^2 - 4ga) - 2\cdot\frac{g}{2}a$ (10)

$= u^2 - 5ga.$ (10)

(1) இலிருந்து $\omega^2 = {v_1}^2 - 4ga$

$= u^2 - 9ga.$ (5)

$\underline{F} = m\underline{a} \downarrow$ at F:

$mg - S = m\frac{\omega^2}{a}$ (5)

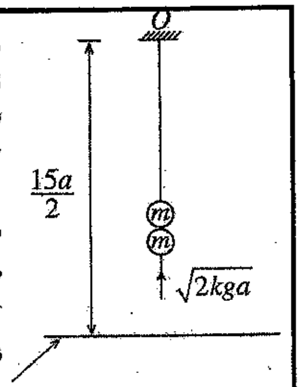
$\therefore\ S = mg - \frac{m}{a}(u^2 - 9ga)$

$= \frac{m}{a}(10ag - u^2)$ (5)

70

---

13. இயற்கை நீளம் $4a$ ஐ உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடனும் மற்றைய நுனி திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை O இற்குக் கீழே தூரம் $5a$ இல் நாப்பத்தில் தொங்குகின்றது. இழையின் மீள்தன்மை மட்டு $4mg$ எனக் காட்டுக.



இப்போது திணிவு m ஐ உடைய வேறொரு துணிக்கை Q நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி இயங்கி P உடன் மோதி ஒன்றிணைந்து ஒரு சேர்த்தித் துணிக்கை R ஐ ஆக்குகின்றது. துணிக்கை P உடன் மோதுவதற்குச் சற்று முன்னர் துணிக்கை Q இன் கதி $\sqrt{2kga}$ ஆகும். R இயங்கத் தொடங்கும் வேகத்தைக் காண்க.

இழை தளர்வுறாமல் இருந்து பின்னர் நடைபெறும் இயக்கத்தில் சேர்த்தித் துணிக்கை R இற்கு O இலிருந்து உள்ள தூரம் x ஆனது சமன்பாடு $\ddot{x}+\frac{g}{2a}(x-6a)=0$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றதெனக் காட்டுக.

$X = x - 6a$ என எழுதி, $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ எனக் காட்டுக; இங்கு $\omega = \sqrt{\frac{g}{2a}}$.

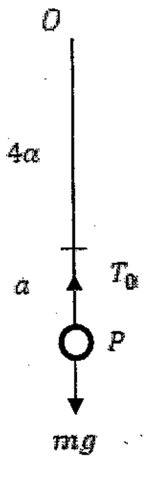
மேற்குறித்த எளிய இசை இயக்கத்தின் மையத்தையும் சூத்திரம் $\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ ஐப் பயன்படுத்தி வீச்சம் c ஐயும் காண்க.

$k > 3$ எனின், இழை தளர்வுறுமெனக் காட்டுக.

இப்போது, $k = 8$ எனக் கொள்வோம். P, Q ஆகிய துணிக்கைகள் ஒன்றிணையும் கணத்திலிருந்து புள்ளி O இற்குக் கீழே தூரம் $\frac{15}{2}a$ இல் ஒரு மீள்தன்மையின்றிய கிடை நிலத்தில் அடிப்பதற்குச் சேர்த்தித் துணிக்கை R எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

மேலும், சேர்த்தித் துணிக்கை R நிலத்தில் அடித்த பின்னர் அடையும் உயர்ந்தபட்ச உயரத்தையும் காண்க.

P இன் சமநிலைக்கு



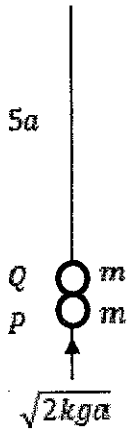
↑ For the equilibrium of ,

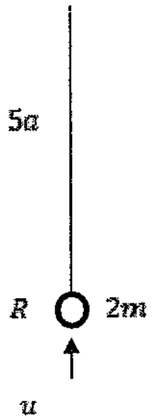
$T_0 = mg$ (5)

$$T_0 = \frac{\lambda a}{4a} = \frac{\lambda}{4} \quad (5)$$

$\therefore \lambda = 4mg$ (5)

15



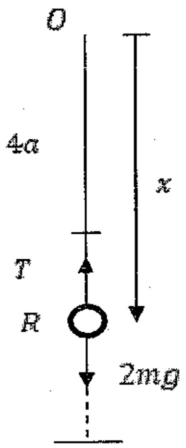


Applying $\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ for $P\,Q$:

$$\uparrow \; 0 = 2mu - m\sqrt{2kga} \quad (5)$$

$$\therefore u = \sqrt{\frac{kga}{2}} \quad (5)$$

[10]



Rஇற்கு $\underline{F} = m\underline{a}$இனை பிரயோகிக்க :

$$\uparrow \quad T - 2mg = -2m\ddot{x} \quad (10)$$

$$T = 4mg\frac{(x-4a)}{4a} \quad (5)$$

$$\therefore \frac{mg}{a}(x-4a) - 2mg = -2m\ddot{x} \quad (5)$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{2a}(x-6a) = 0 \;_______ (1)$$

[20]

$X = x - 6a$

$\therefore \dot{X} = \dot{x}$

$\therefore \ddot{X} = \ddot{x}$ (5)

$(1) \Rightarrow \quad \ddot{X} + \omega^2 X = 0$, இங்கு $\omega = \sqrt{\frac{g}{2a}}$. (5)

[10]

மையம் $X = 0$ இனால் தரப்படும்

i.e. $x = 6a$. (5)

$\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ ________ (2)

$x = 5a$, ஆகையில் $X = -a$, $\dot{X} = -\frac{1}{2}\sqrt{2kga}$. (5)

$(2) \Rightarrow \frac{kga}{2} = \frac{g}{2a}(c^2 - a^2)$.

$\Rightarrow ka^2 = c^2 - a^2$.

$\Rightarrow c = \sqrt{k+1}\, a$. (5)

15

$k > 3$. என்க , எனவே $c > 2a$.

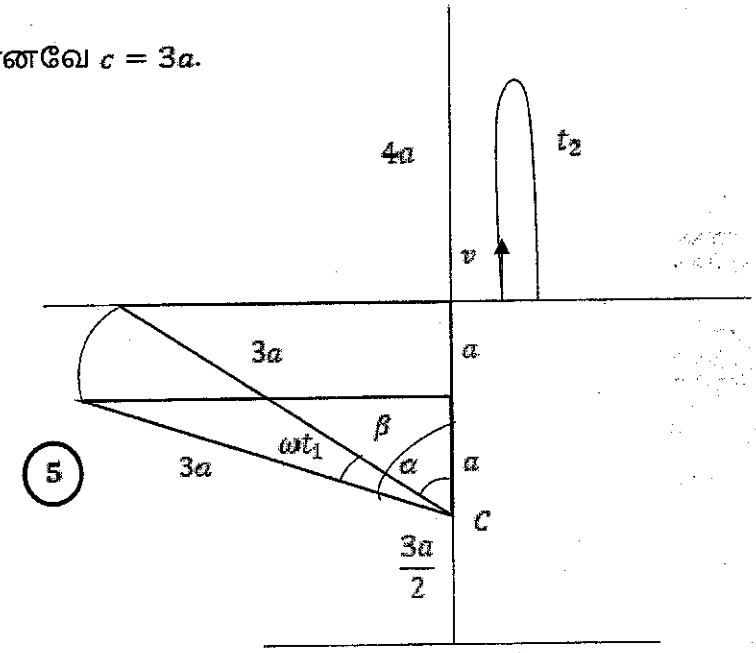
$\therefore$ வீச்சம் $> 2a$. (5)

$\therefore$ எனவே இழை தளர்வுறும் (5)

10

$\boxed{k=8}$

எனவே $c = 3a$.



$\cos\beta = \frac{1}{3}$ (5)

$\cos\alpha = \frac{2}{3}$ (5)

$\omega t_1 = \beta - \alpha$ (5)

$\therefore\ t_1 = \frac{1}{\omega}(\beta - \alpha)$

இப்பொழுது $v^2 = \frac{g}{2a}(9a^2 - 4a^2)$

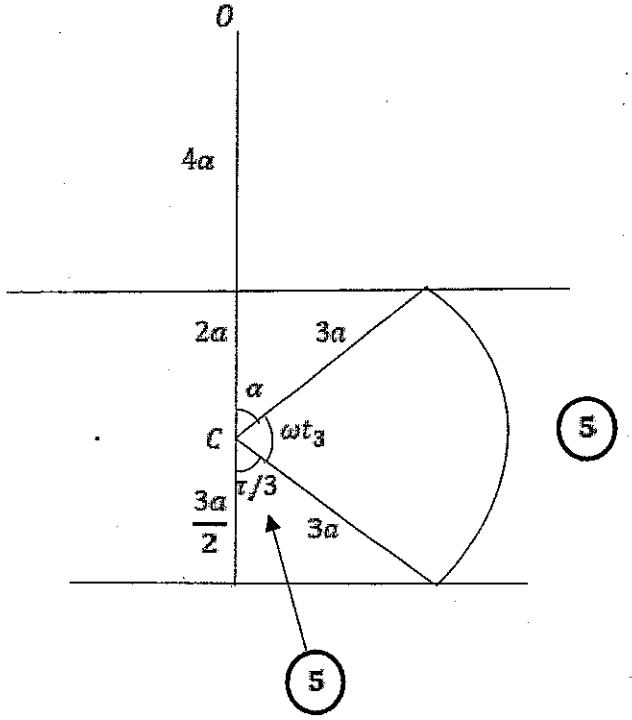
,

$\therefore\ v = \sqrt{\frac{5}{2}ga}$ (5)

Under gravity: $\uparrow$ $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ (5)

$0 = vt_2 - \frac{1}{2}g{t_2}^2.$ (5)

$\therefore\ t_2 = \frac{2v}{g} = \frac{2}{g}\sqrt{\frac{5}{2}ga} = \sqrt{\frac{10a}{g}}$



$\omega t_3 = \frac{2\pi}{3} - \alpha$ (5)

$\therefore\ t_3 = \frac{1}{\omega}\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$

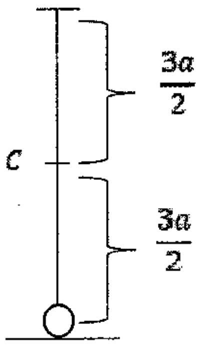
∴ தேவையான நேரம் $= t_1 + t_2 + t_3$

$$= \frac{1}{\omega}(\beta - \alpha) + \sqrt{\frac{10a}{g}} + \frac{1}{\omega}\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$$

$$= \sqrt{\frac{10a}{g}} + \sqrt{\frac{2a}{g}}\left\{\frac{2\pi}{3} + \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) - 2\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$$ (10)

60

தரையை அடித்த பின் R எழிமைஇசை இயக்கத்தை மட்டும் ஆற்றும் (5)



எனவே அதியுயர் உயரம்

After hitting the floor, performs only simple harmonic motion.

$\therefore$ The maximum height $= \frac{3a}{2} + \frac{3a}{2}$

$= 3a$ (5)

10

4. (*a*) **a, b** ஆகியன பூச்சியமல்லாதனவும் சமாந்தரமல்லாதனவுமான காவிகள் எனவும் $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ எனவும் கொள்வோம்.
$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0}$ எனின், $\lambda = 0$ எனவும் $\mu = 0$ எனவும் காட்டுக.
ABC ஒரு முக்கோணியெனக் கொள்வோம். AB இன் நடுப் புள்ளி D உம் CD இன் நடுப் புள்ளி E உம் ஆகும். BC, (நீட்டப்பட்ட) AE ஆகிய கோடுகள் F இற் சந்திக்கின்றன. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ எனவும் $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ எனவும் கொள்வோம். முக்கோணிக் கூட்டல் விதியைப் பயன்படுத்தி $\overrightarrow{AE} = \dfrac{\mathbf{a}+2\mathbf{b}}{4}$ எனக் காட்டுக.
$\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AE}$ ஆகவும் $\overrightarrow{CF} = \beta\overrightarrow{CB}$ ஆகவும் இருப்பது ஏனென விளக்குக; இங்கு $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
முக்கோணி ACF ஐக் கருதுவதன் மூலம் $(\alpha - 4\beta)\mathbf{a} + 2(\alpha + 2\beta - 2)\mathbf{b} = \mathbf{0}$ எனக் காட்டுக.
இதிலிருந்து, α , β ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(*b*) ABC ஆனது ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $2a$ ஆகவுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணி எனவும் D, E, F ஆகியன முறையே AB, BC, AC ஆகியவற்றின் நடுப் புள்ளிகள் எனவும் கொள்வோம். $2P, \sqrt{3}P, 2\sqrt{3}P, \alpha P$ என்னும் பருமன்களை உடைய விசைகள் முறையே $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}$ வழியே தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதியின் விளையுள் $\overrightarrow{AC}$ இற்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்குகின்றதெனத் தரப்பட்டுள்ளது. α இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
விசைத் தொகுதி A இனூடாகத் தாக்கும் பருமன் R ஐ உடைய ஒரு தனி விசையுடன் பருமன் G ஐ உடைய ஓர் இணைக்குச் சமவலுவுள்ளது. R, G ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.
இவ்விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் எழுதி, AB ஐ விளையுளின் தாக்கக் கோடு சந்திக்கும் புள்ளிக்கு A இலிருந்து உள்ள தூரத்தைக் காண்க.
இப்போது பருமன் H ஐ உடைய ஓர் இணை தொகுதியுடன் சேர்க்கப்படுகின்றது. இப்புதிய தொகுதியின் விளையுள் புள்ளி B இனூடாகத் தாக்குகின்றது. H இன் பெறுமானத்தையும் இவ்விணையின் போக்கையும் காண்க.

(a)

$\underline{a}, \underline{b} \neq \underline{0}, \underline{a} \nparallel \underline{b}$

$\lambda\underline{a} + \mu\underline{b} = \underline{0}$ ________ (1) **(5)**

If $\lambda \neq 0$, எனின் $\underline{a} = -\dfrac{\mu}{\lambda}\underline{b}$.

இது தரப்பட்ட நிபந்தனையுடன் முரண்படுகின்றது.

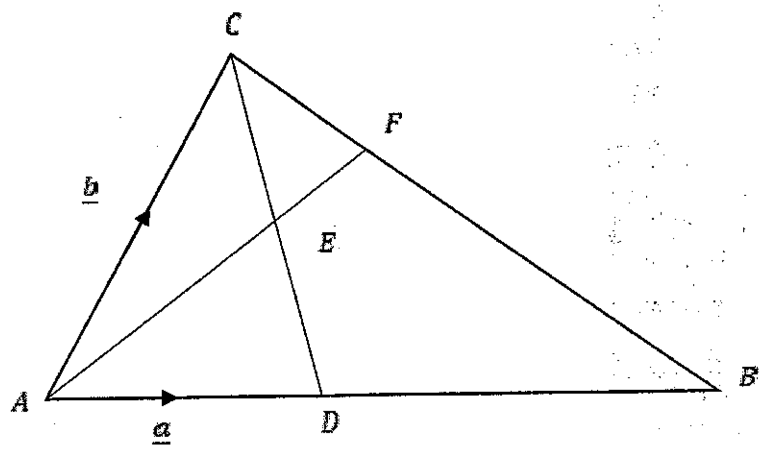
$\therefore\ \lambda = 0.$ **(5)**

இப்பொழுது (1) இலிருந்து $\mu\underline{b} = \underline{0}$

$\underline{b} \neq \underline{0}$, ஆகையால் $\mu = 0$ **(5)**

$\therefore\ \lambda = 0,\ \mu = 0$

15



$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$

$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ (5)

(5)

$= \frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC})$ (5)

$= \frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\underline{a} + \underline{b}\right)$

$= \frac{\underline{a} + 2\underline{b}}{4}$ (5)

20

$AF \parallel AE$ (or A, E, F ஒரே நேர்கோட்டில் உள்ளவை) (5)

$CF \parallel CB$ (or C, F, B ஒரே நேர்கோட்டில் உள்ளவை) (5)

10

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$ (5)

$\therefore \alpha\overrightarrow{AE} = \underline{b} + \beta\overrightarrow{CB}$

$\therefore \alpha\left(\frac{\underline{a}+2\underline{b}}{4}\right) = \underline{b} + \beta\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right)$ (5)

$\therefore \alpha\underline{a} + 2\alpha\underline{b} = 4\underline{b} + 4\beta(-\underline{b} + \underline{a})$

$\therefore (\alpha - 4\beta)\underline{a} + (2\alpha + 4\beta - 4)\underline{b} = 0$ (5)

$\underline{a}, \underline{b} \neq 0, \underline{a} \nparallel \underline{b}$ இலிருந்து

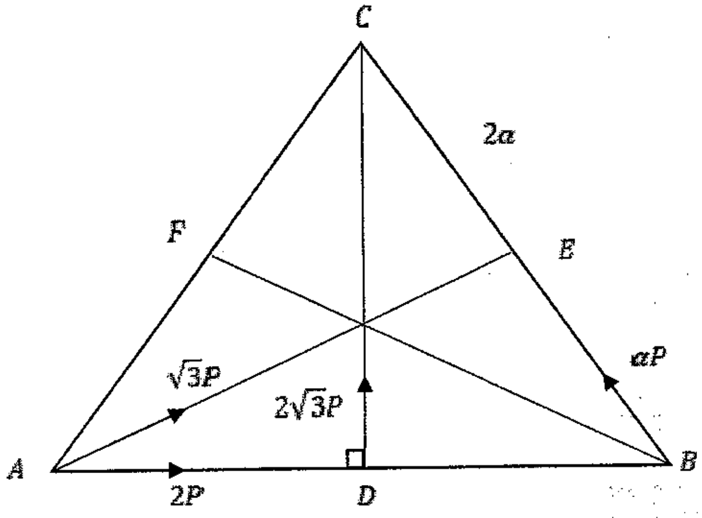
$\alpha - 4\beta = 0$ or $2\alpha + 4\beta - 4 = 0$

$\therefore \alpha = \frac{4}{3}$ and $\beta = \frac{1}{3}$

(5) (5)

25

(b)



$\rightarrow X = 2P + \sqrt{3}P\cos\frac{\pi}{6} - \alpha P\cos\frac{\pi}{3}$ (5)

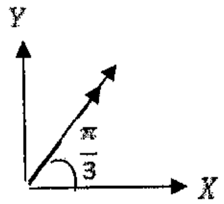
$= 2P + \frac{3P}{2} - \frac{\alpha P}{2}$

$= \frac{1}{2}(7-\alpha)P$

$\uparrow Y = \sqrt{3}P\sin\frac{\pi}{6} + 2\sqrt{3}P + \alpha P\sin\frac{\pi}{3}$ (5)

$= \frac{\sqrt{3}}{2}P + 2\sqrt{3}P + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha P$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}(5+\alpha)P$



$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{Y}{X}$ (5)

$\therefore Y = \sqrt{3}X$

i.e. $\frac{\sqrt{3}}{2}(5+\alpha)P = \sqrt{3}.\frac{1}{2}(7-\alpha)P$

$\therefore \alpha = 1$ (5)

20

OR

$$\alpha P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\sqrt{3}P\left(\frac{1}{2}\right)-\sqrt{3}P\left(\frac{1}{2}\right)-2P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0.$$ (15)

$\Rightarrow \alpha = 1+2-2.$

$\Rightarrow \alpha = 1.$ (5)

20

$$R=\sqrt{3}P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2P\left(\frac{1}{2}\right)+2\sqrt{3}P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+P\left(\frac{1}{2}\right)$$ (10)

$$=\frac{3P}{2}+\frac{2P}{2}+\frac{6P}{2}+\frac{P}{2}$$

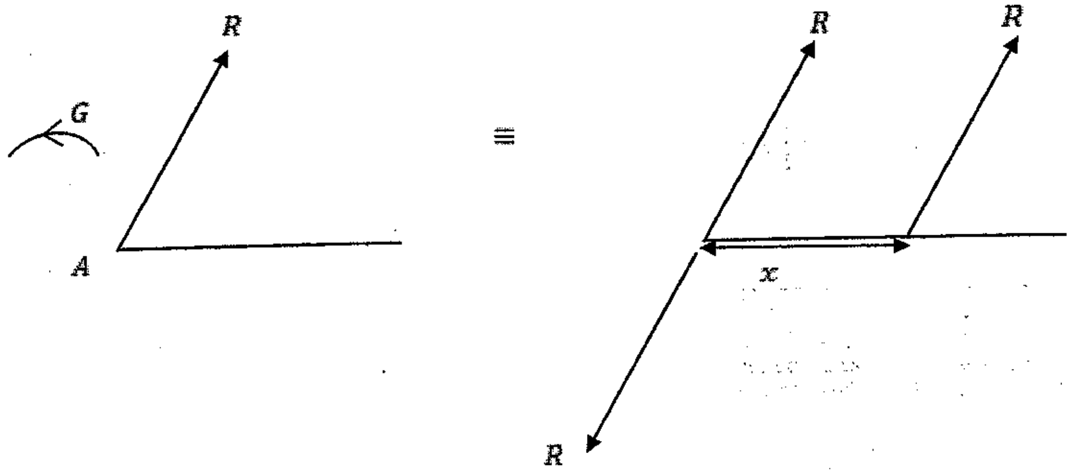
$= 6P.$ (5)

$\overset{\curvearrowleft}{A}\ ;\ G = 2\sqrt{3}P.a + P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).2a$ (5)

$$G = 2\sqrt{3}Pa\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

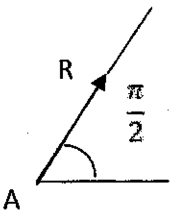
$G = 3\sqrt{3}Pa$ (5)

25



விளையுளின் பருமன்= $R = 6P$ (5)

திசை:

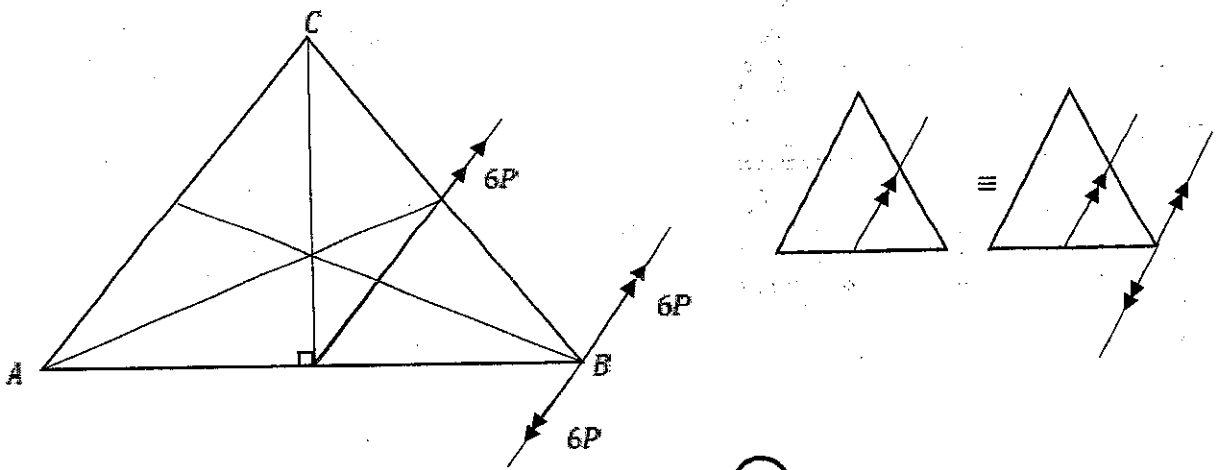


(5)

A ; $3\sqrt{3}Pa = 6P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x$ (5)

$\therefore x = a$ (5)

20



(5)

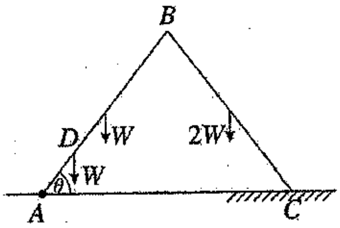
$$H = 6P.a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 3\sqrt{3}Pa \quad (5)$$

மணிக்கூட்டு திசைக்கு எதிர் திசையின் படி (5)

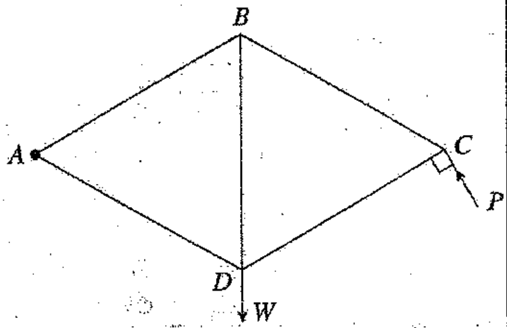
15

15.(*a*) ஒவ்வொன்றும் நீளம் $2a$ ஐ உடைய AB , BC என்னும் இரு சீரான கோல்கள் முனை B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. AB, BC ஆகிய கோல்களின் நிறைகள் முறையே W, $2W$ ஆகும். முனை A ஒரு கிடை நிலத்தின் மீதுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் AB மீது, $AD = \frac{a}{2}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக, உள்ள புள்ளி D இல் நிறை W ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு தொகுதி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே, $B\hat{A}C = \theta$ ஆகவும் கோல் BC இன் முனைப் புள்ளி C மேற்குறித்த கிடை நிலத்தின் ஒரு கரடான பகுதி மீதும் இருக்குமாறு நாப்பத்தில் உள்ளது. கோல் BC இற்கும் நிலத்திற்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும். $\cot\theta \leq \frac{15}{7}\mu$ எனக் காட்டுக.



CB இன் மூலம் AB மீது மூட்டு B இல் உஞற்றப்படும் மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

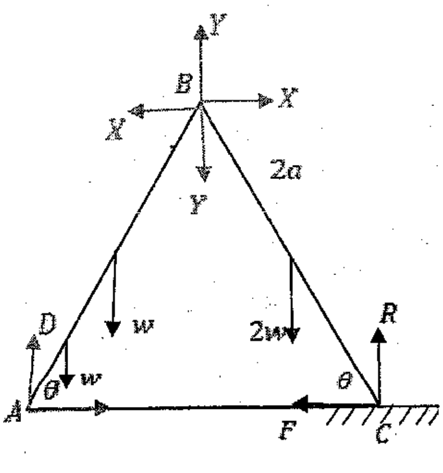
(*b*) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டப்படல், அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட சம நீளமுள்ள AB, BC, CD, DA, DB என்னும் ஐந்து இலேசான கோல்களைக் கொண்டுள்ளது. ஒரு சுமை W ஆனது மூட்டு D இல் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை சட்டப்படல் A இல் ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டு, ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில், BD நிலைக்குத்தாக இருக்க அதற்கு மூட்டு C இல் கோல் CD இற்குச் செங்குத்தாக உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ள திசையில் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு விசை P இன் மூலம், நாப்பத்தில் வைக்கப்படுகின்றது.



(i) P இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி, C, B, D ஆகிய மூட்டுகளுக்கு ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக. இதிலிருந்து, கோல்களில் உள்ள தகைப்புகளை அவை இழுவைகளா, உதைப்புகளா எனக் குறிப்பிட்டுக், காண்க.

(a)



தொகுதிக்கு;

A ↻

$$R.4a\cos\theta - w\left(\frac{a}{2}\cos\theta + a\cos\theta\right) - 2w(2a\cos\theta - a\cos\theta) = 0$$ (15)

$$\therefore 4R = \frac{3}{2}w + 6w$$

$$R = \frac{15}{8}w.$$ (5)

BC: இற்கு

B ↻ $2wa\cos\theta + Fa\sin\theta - R.2a\cos\theta = 0$ (10)

$$\therefore w + F\tan\theta = R$$

$\therefore F \tan\theta = \frac{15}{8}w - w.$

$\therefore F = \frac{7}{8}w\cot\theta.$ (5)

சமநிலைக்கு,

$\mu \geq \frac{F}{R}.$

$\frac{7}{8}w\cot\theta \leq \mu\frac{15}{8}w$

$\cot\theta \leq \frac{15}{7}\mu.$ (5)

45

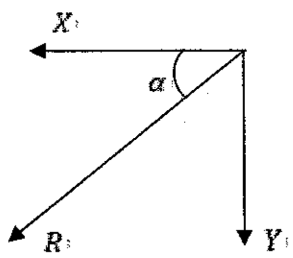
$BC: \quad X = F = \frac{7}{8}w\cot\theta$ (5)

$\uparrow R + Y = 2w$ (5)

$Y = 2w - R$

$= 2w - \frac{15}{8}$

$= \frac{w}{8}$ (5)



$R^2 = X^2 + Y^2$

$= \frac{49}{64}w^2\cot^2\theta + \frac{w^2}{64}$ (5)

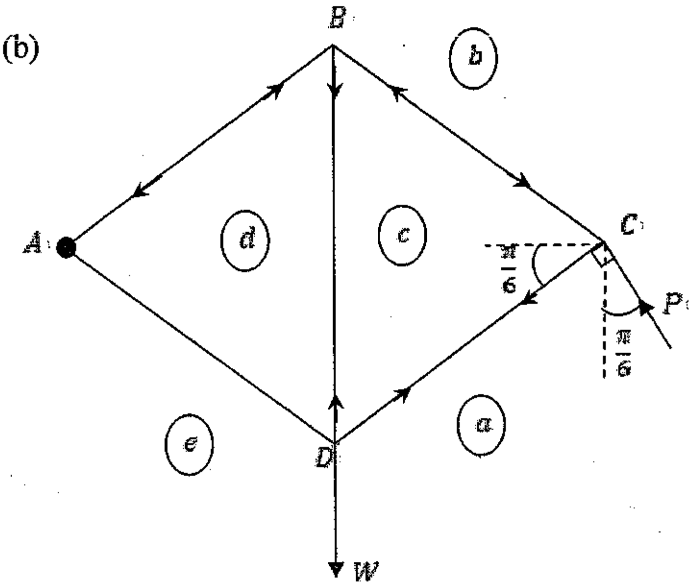
$R = \frac{w}{8}\sqrt{1 + 49\cot^2\theta}$

$\tan\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{w/8}{7w/8\cot\theta} = \frac{\tan\theta}{7}$ (5)

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{7}\right)$

25

(b)

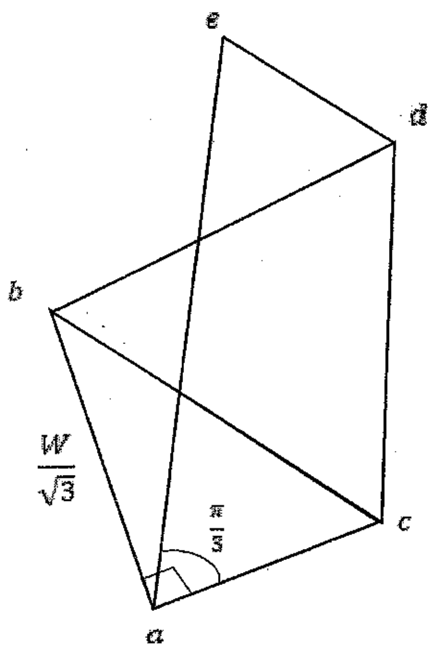


A↺ $P\cos\frac{\pi}{6}.2x - Wx = 0$ (5)

(Here $AC = 2x$)

$\therefore P = \frac{W}{\sqrt{3}}$ (5)

10



(10) + (10) + (10)

Each Joint (10)

30

கோல்	இழுவை	தகைப்பு
AB		$\frac{2W}{3}$
BC		$\frac{2W}{3}$
CD	$\frac{W}{3}$	
DA	$\frac{W}{3}$	
BD	$\frac{2W}{3}$	

(15) + (25)

40

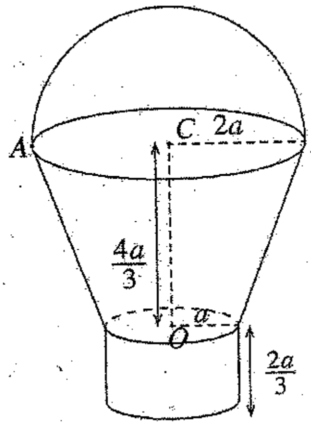
---

16. (i) ஆரை a ஐ உடைய ஓர் அரைவட்ட வில்லின் வடிவமுள்ள ஒரு மெல்லிய சீரான கம்பியின் திணிவு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து தூரம் $\frac{2a}{\pi}$ இலும்

(ii) உயரம் h ஐ உடைய ஒரு சீரான பொட் செவ்வட்டக் கூம்பின் திணிவு மையம் அதன் அடியின் மையத்திலிருந்து தூரம் $\frac{1}{3}h$ இலும்

உள்ளனவெனக் காட்டுக.

உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு மேல் வட்ட விளிம்பினதும் கீழ் வட்ட விளிம்பினதும் ஆரைகள் முறையே $2a$, a ஆகவும் உயரம் $\frac{4a}{3}$ ஆகவும் உள்ள ஒரு பொட் செவ்வட்டக கூம்பின் அடித்துண்டின் வடிவமுள்ள ஒரு சீரான மெல்லிய ஓட்டுடன் பின்வரும் பகுதிகளை ஒவ்வொன்றும் ஓட்டினைச் சந்திக்கும் இடங்களில் விறைப்பாகப் பொருத்துவதன் மூலம் ஒரு வாளி செய்யப்பட்டுள்ளது.

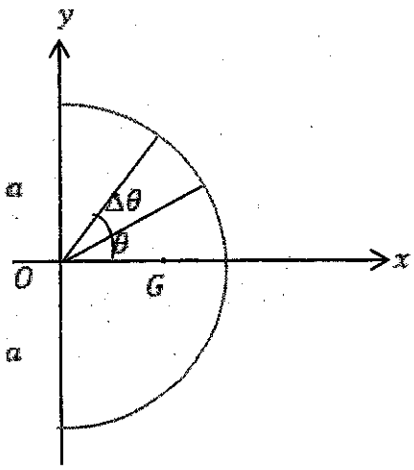


- ஆரை a ஐயும் மையம் O ஐயும் கொண்ட ஒரு சீரான மெல்லிய வட்டத் தகடு
- ஆரை a ஐயும் உயரம் $\frac{2a}{3}$ ஐயும் கொண்ட பொட் செவ்வட்ட உருளையின் வடிவமுள்ள ஒரு சீரான மெல்லிய ஓடு
- ஆரை $2a$ ஐயும் மையம் C ஐயும் கொண்ட ஓர் அரைவட்டத்தின் வடிவமுள்ள ஒரு சீரான மெல்லிய கம்பி

அடித்துண்டு, தகடு, உருளை ஆகியவற்றின் அலகுப் பரப்பளவிற்கான திணிவு σ உம் கம்பியின் அலகு நீளத்திற்கான திணிவு $11a\sigma$ உம் ஆகும்.
வாளியின் திணிவு மையத்திற்கு O இலிருந்து உள்ள தூரம் $(10\pi+27)\frac{a}{9\pi}$ எனக் காட்டுக.
கம்பி அடித்துண்டின் மேல் விளிம்பைச் சந்திக்கும் புள்ளி A இலிருந்து வாளி ஒரு நிலைக்குத்து இழையினால் சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்படும்போது நாப்பத் தானத்தில் OC கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணத்தைக் காண்க.

(i)

அரைவட்ட வடிவான கம்பி



(5)

சமசீரின் படி திணிவு மையம் x –அச்சில் கிடக்கும்

$\Delta m = a\Delta\theta\rho$, இங்கு ρ என்பது ஓரலகிற்கான திணிவு ஆகும்.

Let $OG = \bar{x}$. என்க

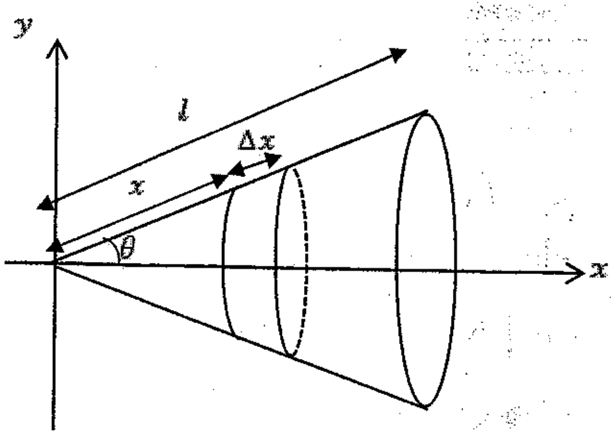
எனவே

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\rho \, a\cos\theta \, d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\rho \, d\theta} = \frac{a\sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}{\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}} = \frac{2a}{\pi}$$

(5) (5) (5) (5) (5)

30

(ii)



(5)

சமசீரின் படி திணிவு மையம் x –அச்சில் கிடக்கும் s.

$h = l\cos\theta$

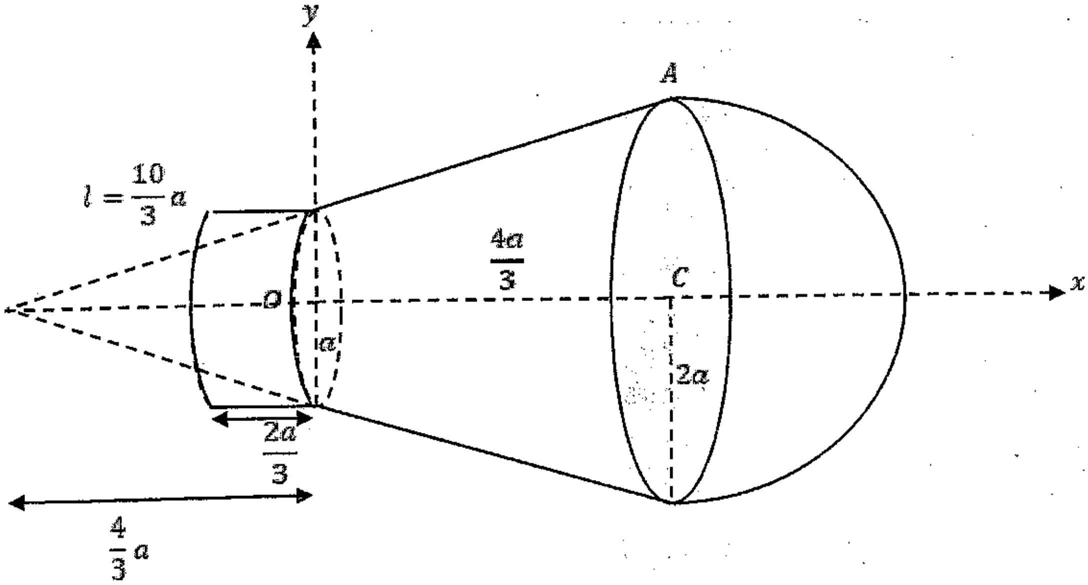
$\Delta m = 2\pi(x\sin\theta)\Delta x\sigma$, இங்கு σ என்பது ஓரலகிற்கான திணிவு ஆகும்

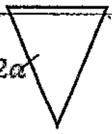
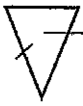
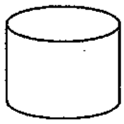
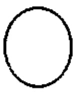
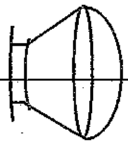
$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_0^l x\cos\theta \, 2\pi\sigma x \sin\theta \, dx}{\int_0^l 2\pi\sigma x\sin\theta \, dx} = \frac{\cos\theta \int_o^l x^2 dx}{\int_o^l x \, dx} = \frac{h/_2 \frac{x^3}{3}\Big|_0^l}{\frac{x^2}{2}\Big|_0^l} = \frac{2h}{3}$$

(5) (5) (5) (5) (5)

$\therefore$ தேவையான தூரம் $= \frac{h}{3}$.

30


y
A
$l = \frac{10}{3}a$
$\frac{4a}{3}$
C
x
O
a
2a
$\frac{2a}{3}$
$\frac{4}{3}a$

Object	Mass	Distance from O
	$\pi(2a)(11a\sigma)$ $= 22\pi a^2\sigma$ (5)	$\frac{4}{3}a + 2\frac{(2a)}{\pi} = \frac{4}{3}a + \frac{4a}{\pi}$ (5)
	$\pi(2a)\left(\frac{10}{3}a\right)\sigma$ (5) $= \frac{20}{3}\pi a^2\sigma$	$\left[\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}a\right) - \frac{4}{3}a\right] = \frac{4}{9}a$ (5)
	$\pi(a)\left(\frac{5}{3}a\right)\sigma$ (5) $= \frac{5}{3}\pi a^2\sigma$	(5) $-\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}a\right) = -\frac{4}{9}a$
 	(5) $2\pi a\left(\frac{2}{3}a\right)\sigma$ $= \frac{4}{3}\pi a^2\sigma$	(5) $-\frac{1}{3}a$ (5)
	$\pi a^2\sigma$	0
	$22\pi a^2\sigma + \frac{20}{3}\pi a^2\sigma + \frac{5}{3}\pi a^2\sigma + \frac{4}{3}\pi a^2\sigma$ $= \frac{88}{3}\pi a^2 6$ (5)	$\bar{x}$

சமச் சீரின்படி திணிவு மையம் x – அச்சில் இருக்கும்.

(5)

$$\frac{88}{3}\pi a^2\sigma\bar{x} = 22\pi a^2\sigma\left(\frac{4}{3}a + \frac{4a}{\pi}\right) + \frac{20}{3}\pi a^2\sigma\left(\frac{4}{9}a\right) - \frac{5}{3}\pi a^2\sigma\left(-\frac{4}{9}a\right) + \frac{4}{3}\pi a^2\sigma\left(-\frac{1}{3}a\right)$$

$$\frac{88}{3}\bar{x} = 4a\left(\frac{22}{3} + \frac{22}{\pi} + \underbrace{\frac{20}{27} + \frac{5}{27}}_{} - \frac{1}{9}\right)$$ (15)

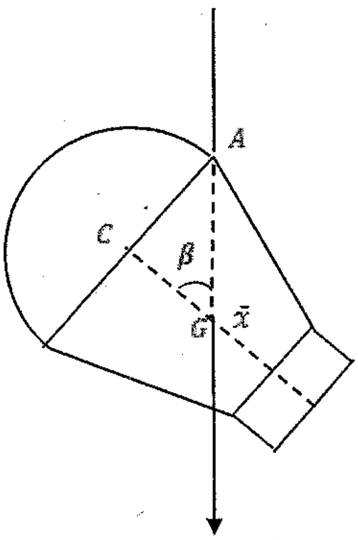
$\frac{22}{27}$

$$\frac{88}{3}\bar{x} = 22 \times 4a\left(\frac{10}{27} + \frac{22}{\pi}\right)$$

$$\frac{88}{3}\bar{x} = 88a\left(\frac{(10\pi + 27)}{27\pi}\right)$$

$$\bar{x} = \frac{a}{9\pi}(10\pi + 27) \quad (5)$$

75



(5)

$$\tan\beta = \frac{AC}{CG} = \frac{2a}{\frac{4}{3}a - \bar{x}} \quad (5)$$

$$= \frac{18\pi}{27 - 2\pi} \quad (5)$$

$$\therefore \beta = \tan^{-1}\left(\frac{18\pi}{27 - 2\pi}\right)$$

15

---

17. (a) A, B என்னும் இரு சர்வசமப் பெட்டிகள் ஒவ்வொன்றிலும் அவற்றின் நிறங்களைத் தவிர எல்லா அம்சங்களிலும் சர்வசமமான 10 பந்துகள் உள்ளன. பெட்டி A இல் 6 வெள்ளைப் பந்துகளும் 4 சிவப்புப் பந்துகளும் பெட்டி B இல் 8 வெள்ளைப் பந்துகளும் 2 சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. ஒரு பெட்டியை எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்து, அப்பெட்டியிலிருந்து ஒன்றின்பின் மற்றதாகப் பிரதிவைப்பு இல்லாமல் எழுமாற்றாக 3 பந்துகள் வெளியே எடுக்கப்படுகின்றன.

(i) இரு சிவப்புப் பந்துகளும் ஒரு வெள்ளைப் பந்தும் வெளியே எடுக்கப்படுவதற்கான,

(ii) இரு சிவப்புப் பந்துகளும் ஒரு வெள்ளைப் பந்தும் வெளியே எடுக்கப்படுகின்றனவெனத் தரப்படும்போது பெட்டி A தெரிந்தெடுக்கப்பட்டமைக்கான

நிகழ்தகவைக் காண்க.

(b) தரவுத் தொடை $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ இன் இடையும் நியம விலகலும் முறையே $\overline{x}$, σ_x எனவும் $i = 1, 2, \ldots, n$ இற்கு $y_i = \dfrac{x_i - \alpha}{\beta}$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு α , $\beta\,(>0)$ ஆகியன மெய்ம் மாறிலிகளாகும். $\overline{y} = \dfrac{\overline{x} - \alpha}{\beta}$ எனவும் $\sigma_y = \dfrac{\sigma_x}{\beta}$ எனவும் காட்டுக; இங்கு $\overline{y}$, σ_y ஆகியன முறையே தரவுத் தொடை $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ இன் இடையும் நியம விலகலும் ஆகும்.

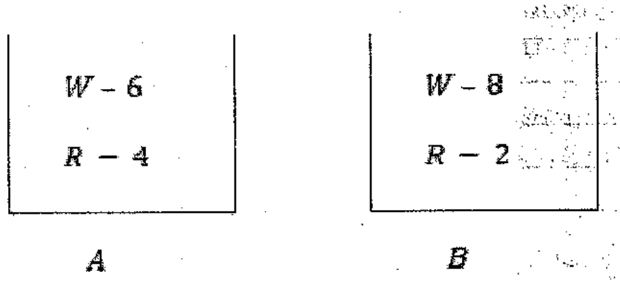
ஒரு கம்பனியின் 100 சேவையாளர்களின் ஒரு காப்புறுதித் திட்டத்திற்கான மாதத் தவணைக் கட்டணங்கள் பின்வரும் மீடிறன் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

மாதத் தவணைக் கட்டணம் (ரூபாய்) x	சேவையாளர்களின் எண்ணிக்கை
1500 – 3500	30
3500 – 5500	40
5500 – 7500	20
7500 – 9500	10

உருமாற்றம் $y = \dfrac{x - 500}{1000}$ ஐப் பயன்படுத்தி y இன் இடையையும் நியம விலகலையும் $\dfrac{3(\text{இடை} - \text{இடையம்})}{\text{நியம விலகல்}}$ இனால் வரையறுக்கப்படும் y இன் ஓராயக் குணகத்தையும் மதிப்பிடுக.

இதிலிருந்து, x இன் இடை, நியம விலகல், ஓராயக் குணகம் ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக.

(a)



X என்பது இரண்டு சிவப்பு பந்துகளும் ஒரு வெள்ளை பந்தும் எடுப்பதற்கான நிகழ்வு என்க. (5)

(i) $P(X) = P(X|A)P(A) + P(X|B)P(B)$ ________ (1)

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}.$$ (5)

(5) (5) (5)

$$P(X|A) = \frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{8} + \frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8} + \frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}$$

$$= \frac{3}{10}.$$ (5)

(5) (5) (5)

$$P(X|B) = \frac{2}{10}\times\frac{1}{9}\times\frac{8}{8} + \frac{2}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8} + \frac{8}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{15}.$$ (5)

(1) இலிருந்து,

$$P(X) = \frac{3}{10}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{15}\times\frac{1}{2} = \frac{11}{60}$$ (5)

55

(ii)

$$P(A|X) = \frac{P(X|A)P(A)}{P(X)}$$ (5) [or Bayes' theor பேயரின் தேற்றம்

$$= \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{2}}{\frac{11}{60}}$$

$$= \frac{9}{11}$$ (5)

10

(b)

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$ (5) $$y_i = \frac{x_i - \alpha}{\beta}$$

$$= \frac{1}{n\beta} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha)$$

$$= \frac{1}{n\beta} \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i - n\alpha \right\}$$

$$= \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - \alpha \right\}$$

$$= \frac{\bar{x} - \alpha}{\beta}.$$ (5)

(5)

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \alpha}{\beta} - \frac{\overline{x} - \alpha}{\beta}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n\beta}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{\beta^2} \quad (5)$$

$$6y = \frac{6x}{\beta}$$

20

Class Interval x	f	Class Interval	Mid-point y (5)	fy (5)	fy^2 (5)
1500-3500	30	1-3	2	60	120
3500-5500	40	3-5	4	160	640
5500-7500	20	5-7	6	120	720
7500-9500	10	7-9	8	80	640
				$\sum f_y = 420$ (5)	$\sum f_{y^2} = 2120$ (5)

(5)

(5)

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum f_{y^2}}{\sum f} - \overline{y}^2} = \sqrt{\frac{2120}{100} - 4.2^2}$$

$$= \sqrt{21.2 - 17.64}$$

$$= \sqrt{3.56} \approx 1.887$$ (5)

Let M_y = Median of $y = 50^{th}$ data

எனவே

$$M_y = 3 + \frac{(50-30)}{40}(5-3) = 4$$ (5)

∴ ஓரயாக்குணகம் of $y \approx \frac{3(4.2-4)}{\sqrt{3.56}} \approx 0.317$ (5)

50

$$\overline{x} = 1000\overline{y} + 500$$

$$= 1000 \times 4.2 + 500$$

$$= 4700$$ (5)

$$\sigma_x = 1000\,\sigma_y$$

$$\approx 1000 \times 1.887$$

$$= 1887$$ (5)

ஓரயாக்குணகம் மாறவில்லை

$S_x = S_y \approx 0.317$ (5)

15

Past Papers Wiki - Download More Past Papers and Study Well!

WWW.PastPapers.WIKI
Past Papers Wiki - Download More Past Papers and Study Well!