4827

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

නව නිර්දේශය/புதிய பாடத்திட்டம்/New Syllabus

NEW

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2019 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2019 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2019

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 T I

05.08.2019 / 0830 – 1140

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

வினாத்தாளை வாசித்து, வினாக்களைத் தெரிவுசெய்வதற்கும் விடை எழுதும்போது முன்னுரிமை வழங்கும் வினாக்களை ஒழுங்கமைத்துக் கொள்வதற்கும் மேலதிக வாசிப்பு நேரத்தைப் பயன்படுத்துக.

சுட்டெண்							

அறிவுறுத்தல்கள் :

※ இவ்வினாத்தாள் பகுதி **A** (வினாக்கள் 1 - 10), பகுதி **B** (வினாக்கள் 11 - 17) என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டது.

※ பகுதி **A** :
எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்குமுரிய உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.

※ பகுதி **B** :
ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக. உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள தாள்களில் எழுதுக.

※ ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் முடிவடைந்ததும் **பகுதி A** இன் விடைத்தாளானது **பகுதி B** இன் விடைத்தாள்களுக்கு மேலே இருக்கத்தக்கதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.

※ வினாத்தாளின் **பகுதி B ஐ மாத்திரம்** பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்கு மாத்திரம்

(10) இணைந்த கணிதம் I

பகுதி	வினா எண்	புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

மொத்தம்

இலக்கத்தில்	
எழுத்தில்	

குறியீட்டெண்கள்

விடைத்தாள் பரீட்சகர்	
பரிசீலித்தவர்: 1	
2	
மேற்பார்வை செய்தவர்:	

[பக். 2 ஐப் பார்க்க

பகுதி A

1. **கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப்** பயன்படுத்தி, எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $\sum_{r=1}^{n}(2r-1) = n^2$ என நிறுவுக.

2. ஒரே வரிப்படத்தில் $y=|4x-3|$, $y=3-2|x|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளைப் பரும்படியாக வரைக. **இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக,** சமனிலி $|2x-3|+|x|<3$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.

[பக். 3 ஐப் பார்க்க

சுட்டெண் | | | | | | | |

3. ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில், $\mathrm{Arg}(z-2-2i)=-\frac{3\pi}{4}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z ஐ வகை குறிக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கைப் பருமட்டியாக வரைக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $\mathrm{Arg}(z-2-2i)=-\frac{3\pi}{4}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $|i\bar{z}+1|$ இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

4. $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^7$ இன் ஈருறுப்பு விரியில் உள்ள x^6 இன் குணகம் 35 எனக் காட்டுக.

மேற்குறித்த ஈருறுப்பு விரியில் x ஐச் சாராத உறுப்பு **இல்லை** எனவும் காட்டுக.

5. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{\sin\left(\pi(x-3)\right)}=\frac{1}{2\pi}$ எனக் காட்டுக.

6. $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+1}}$, $x=0,\ x=1,\ y=0$ என்னும் வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசம் x - அச்சைப் பற்றி 2π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றப்படுகின்றது. இவ்வாறு பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\dfrac{\pi}{4}(\pi+\ln 4)$ எனக் காட்டுக.

7. C ஆனது $t \in \mathbb{R}$ இற்கு $x = at^2$, $y = 2at$ ஆகியவற்றினால் பரமானமுறையாகத் தரப்படும் பரவளைவெனக் கொள்வோம்; இங்கு $a \neq 0$. பரவளைவு C இற்குப் புள்ளி $\left(at^2, 2at\right)$ இல் உள்ள செவ்வன் கோட்டின் சமன்பாடு $y + tx = 2at + at^3$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.
பரவளைவு C மீது புள்ளி $P \equiv (4a, 4a)$ இல் உள்ள செவ்வன் கோடு இப்பரவளைவை மறுபடியும் புள்ளி $Q \equiv (aT^2, 2aT)$ இற் சந்திக்கின்றது. $T = -3$ எனக் காட்டுக.

8. l_1 , l_2 ஆகியன முறையே $x + y = 4$, $4x + 3y = 10$ ஆகியவற்றினால் தரப்படும் நேர்கோடுகளெனக் கொள்வோம். கோடு l_1 மீது P, Q என்னும் இரு வேறுவேறான புள்ளிகள், அப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலும் இருந்து கோடு l_2 இற்கான செங்குத்துத் தூரம் 1 அலகாக இருக்கத்தக்கதாக, உள்ளன. P, Q ஆகியவற்றின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

[பக். 6 ஐப் பார்க்க

9. புள்ளி $A \equiv (-7, 9)$ ஆனது வட்டம் $S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ இற்கு வெளியே இருக்கின்றதெனக் காட்டுக. வட்டம் $S = 0$ மீது உள்ள, புள்ளி A இற்கு மிக அண்மையில் இருக்கும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

10. $\theta \neq (2n+1)\pi$ இற்கு $t = \tan\frac{\theta}{2}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $n \in \mathbb{Z}$ ஆகும். $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ எனக் காட்டுக. $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ என உய்த்தறிக.

[பக். 7 ஐப் பார்க்க

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]
නව නිර්දේශය/புதிய பாடத்திட்டம்/New Syllabus

NEW

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2019 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2019 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2019

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 T I

பகுதி B

※ **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (a) $p \in \mathbb{R}$ எனவும் $0 < p \leq 1$ எனவும் கொள்வோம். 1 ஆனது சமன்பாடு $p^2x^2 + 2x + p = 0$ இன் ஒரு மூலம் **அன்று** எனக் காட்டுக.

α, β ஆகியன இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களெனக் கொள்வோம். α, β ஆகிய இரண்டும் மெய்யெனக் காட்டுக.

$\alpha + \beta, \alpha\beta$ ஆகியவற்றை p இல் எழுதி

$$\frac{1}{(\alpha-1)} \cdot \frac{1}{(\beta-1)} = \frac{p^2}{p^2+p+2}$$

எனக் காட்டுக.

$\dfrac{\alpha}{\alpha-1}, \dfrac{\beta}{\beta-1}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு

$(p^2+p+2)x^2 - 2(p+1)x + p = 0$ எனவும் இம்மூலங்கள் இரண்டும் நேர் எனவும் காட்டுக.

(b) c, d ஆகியன இரு **பூச்சியமல்லாத** மெய்யெண்கள் எனவும் $f(x) = x^3 + 2x^2 - dx + cd$ எனவும் கொள்வோம்.

$(x-c)$ ஆனது $f(x)$ இன் ஒரு காரணி எனவும் $f(x)$ ஆனது $(x-d)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி cd எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. c, d ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

c, d ஆகியவற்றின் இப்பெறுமானங்களுக்கு, $f(x)$ ஆனது $(x+2)^2$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதியைக் காண்க.

12. (a) P_1, P_2 ஆகியன முறையே $\{A, B, C, D, E, 1, 2, 3, 4\}$, $\{F, G, H, I, J, 5, 6, 7, 8\}$ ஆகியவற்றினால் தரப்படும் இரு தொடைகளெனக் கொள்வோம். $P_1 \cup P_2$ இலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 3 வெவ்வேறு எழுத்துகளையும் 3 வெவ்வேறு இலக்கங்களையும் கொண்டு 6 மூலகங்களைக் கொண்ட ஒரு கடவுச்சொல்லை உருவாக்க வேண்டியுள்ளது. பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் அமைக்கத்தக்க அத்தகைய வெவ்வேறு கடவுச்சொற்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க:

(i) எல்லா 6 மூலகங்களும் P_1 இலிருந்து மாத்திரம் தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றன.

(ii) 3 மூலகங்கள் P_1 இலிருந்தும் ஏனைய 3 மூலகங்கள் P_2 இலிருந்தும் தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றன.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+3)(r+4)}$ எனவும் $V_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+2)}$ எனவும் கொள்வோம்.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $V_r - V_{r+2} = 6U_r$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{5}{144} - \frac{(2n+5)}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$ எனக் காட்டுக.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $W_r = U_{2r-1} + U_{2r}$ எனக் கொள்வோம்.

$n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} W_r = \frac{5}{144} - \frac{(4n+5)}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}$ என **உய்த்தறிக.**

இதிலிருந்து, முடிவில் தொடர் $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ ஒருங்குகின்றதெனக் காட்டி, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

[பக். 8 ஐப் பார்க்க

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -a & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} b & -2 \\ -1 & b+1 \end{pmatrix}$ ஆகியன $\mathbf{AB}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாகத் தாயங்களெனக் கொள்வோம்; இங்கு $a, b \in \mathbb{R}$.

$a = 2,\ b = 1$ எனக் காட்டுக.

அத்துடன் $\mathbf{C}^{-1}$ **இருப்பதில்லை** எனவும் காட்டுக.

$\mathbf{P} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - 2\mathbf{I})$ எனக் கொள்வோம். $\mathbf{P}^{-1}$ ஐ எழுதி, $2\mathbf{P}(\mathbf{Q} + 3\mathbf{I}) = \mathbf{P} - \mathbf{I}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாகத் தாயம் $\mathbf{Q}$ ஐக் காண்க; இங்கு $\mathbf{I}$ ஆனது வரிசை 2 இன் சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமாகும்.

(*b*) $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ எனக் கொள்வோம்.

(i) $\mathrm{Re}\, z \le |z|$ எனவும்

(ii) $z_2 \neq 0$ இற்கு $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ எனவும்

காட்டுக.

$z_1 + z_2 \neq 0$ இற்கு $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) \le \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|}$ என **உய்த்தறிக.**

$z_1 + z_2 \neq 0$ இற்கு $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) = 1$ ஐ வாய்ப்புப் பார்த்து,

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ இற்கு $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ எனக் காட்டுக.

(*c*) $\omega = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\, i\right)$ எனக் கொள்வோம்.

$1 + \omega$ ஐ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க; இங்கு $r(>0)$, $\theta\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ ஆகியன துணியப்பட வேண்டிய மாறிலிகள்.

த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $(1+\omega)^{10} + (1+\bar{\omega})^{10} = 243$ எனக் காட்டுக.

14. (*a*) $x \neq 3$ இற்கு $f(x) = \frac{9(x^2 - 4x - 1)}{(x-3)^3}$ எனக் கொள்வோம்.

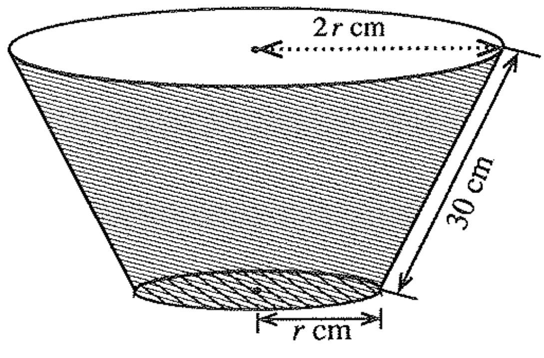
$x \neq 3$ இற்கு $f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $f'(x) = -\frac{9(x+3)(x-5)}{(x-3)^4}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

$y = f(x)$ இன் வரைபை அணுகுகோடுகள், $y-$ வெட்டுத்துண்டு, திரும்பற் புள்ளிகள் ஆகியவற்றைக் காட்டிப் பரும்படியாக வரைக.

$x \neq 3$ இற்கு $f''(x) = \frac{18(x^2 - 33)}{(x-3)^5}$ **எனத் தரப்பட்டுள்ளது.** $y = f(x)$ இன் வரைபின் விபத்திப் புள்ளிகளின் $x-$ ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

(*b*) அருகே உள்ள உருவில் அடியைக் கொண்ட ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் அடித்துண்டின் வடிவத்தில் உள்ள ஒரு பேசின் காட்டப்பட்டுள்ளது. அதன் சாய்ந்த நீளம் 30 cm உம் மேல் வட்ட விளிம்பின் ஆரை அடியின் ஆரையின் இரு மடங்கும் ஆகும். அடியின் ஆரை r cm எனக் கொள்வோம். பேசினின் கனவளவு $V\,\mathrm{cm}^3$ ஆனது $0 < r < 30$ இற்கு $V = \frac{7}{3}\pi r^2 \sqrt{900 - r^2}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

பேசினின் கனவளவு உயர்ந்தபட்சமாக இருக்கத்தக்கதாக r இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



[பக். 9 ஐப் பார்க்க

15. (*a*) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ இற்குப் பிரதியீடு $x = 2\sin^2\theta + 3$ ஐப் பயன்படுத்தி, $\int_3^4 \sqrt{\frac{x-3}{5-x}}\,\mathrm{d}x$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(*b*) பகுதிப் பின்னங்களைப் பயன்படுத்தி, $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$ ஐக் காண்க.

$t > 2$ இற்கு $f(t) = \int_3^t \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$ எனக் கொள்வோம்.

$t > 2$ இற்கு $f(t) = \ln(t-2) - \ln(t-1) + \ln 2$ என **உய்த்தறிக.**

பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி, $\int \ln(x-k)\,\mathrm{d}x$ ஐக் காண்க; இங்கு k ஒரு மெய்ம் மாறிலி.

இதிலிருந்து, $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ ஐக் காண்க.

(*c*) a, b ஆகியன மாறிலிகளாக இருக்கும் சூத்திரம் $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$ ஐப் பயன்படுத்தி

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x\cos^2 x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

16. $12x - 5y - 7 = 0$, $y = 1$ என்னும் நேர்கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளி A இன் ஆள்கூறுகளை எழுதுக. இக்கோடுகளினால் ஆக்கப்படும் கூர்ங்கோணத்தின் இருகூறாக்கி l எனக் கொள்வோம். நேர்கோடு l இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

P ஆனது l மீது உள்ள ஒரு புள்ளியெனக் கொள்வோம். P இன் ஆள்கூறுகளை $(3\lambda+1, 2\lambda+1)$ என எழுதலாமெனக் காட்டுக; இங்கு $\lambda \in \mathbb{R}$.

$B \equiv (6, 0)$ எனக் கொள்வோம். B, P ஆகிய புள்ளிகளை ஒரு விட்டத்தின் முனைகளாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டை $S + \lambda U = 0$ என எழுதலாமெனக் காட்டுக; இங்கு $S \equiv x^2 + y^2 - 7x - y + 6$, $U \equiv -3x - 2y + 18$.

AB ஐ ஒரு விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு $S = 0$ என **உய்த்தறிக.**

B இனூடாக, l இற்குச் செங்குத்தாக உள்ள நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $U = 0$ எனக் காட்டுக.

எல்லா $\lambda \in \mathbb{R}$ இற்கும் சமன்பாடு $S + \lambda U = 0$ ஐக் கொண்ட வட்டங்களின் மீது இருப்பதுவும் B இலிருந்து வேறுபட்டதுமான நிலைத்த புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$S = 0$ இனால் தரப்படும் வட்டம் $S + \lambda U = 0$ இனால் தரப்படும் வட்டத்திற்கு நிமிர்கோணமாக இருக்கத்தக்கதாக λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

[பக். 10 ஐப் பார்க்க

17. (*a*) $\sin(A+B)$ ஐ $\sin A, \cos A, \sin B, \cos B$ ஆகியவற்றில் எழுதி, $\sin(A-B)$ இற்கு ஓர் இயல்பொத்த கோவையைப் பெறுக.

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B) \text{ எனவும்}$$

$$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B) \text{ எனவும்}$$

உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ இற்கு $2\sin 3\theta\cos 2\theta = \sin 7\theta$ ஐத் தீர்க்க.

(*b*) ஒரு முக்கோணி ABC இல் AC மீது புள்ளி D ஆனது $BD = DC$ ஆகவும் $AD = BC$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக உள்ளது. $B\hat{A}C = \alpha$ எனவும் $A\hat{C}B = \beta$ எனவும் கொள்வோம். உகந்த முக்கோணிகளுக்குச் சைன் நெறியைப் பயன்படுத்தி $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + 2\beta)$ எனக் காட்டுக.

$\alpha : \beta = 3 : 2$ எனின், மேலே (*a*) இல் உள்ள இறுதிப் பேறைப் பயன்படுத்தி $\alpha = \frac{\pi}{6}$ எனக் காட்டுக.

(*c*) $2\tan^{-1}x + \tan^{-1}(x+1) = \frac{\pi}{2}$ ஐத் தீர்க்க. **இதிலிருந்து,** $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$ எனக் காட்டுக.

※ ※ ※

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

නව නිර්දේශය/புதிய பாடத்திட்டம்/New Syllabus

NEW

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2019 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2019 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2019

සංයුක්ත ගණිතය	II
இணைந்த கணிதம்	II
Combined Mathematics	II

10 T II

07.08.2019 / 0830 – 1140

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය	-	මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம்	-	10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time	-	10 minutes

வினாத்தாளை வாசித்து, வினாக்களைத் தெரிவுசெய்வதற்கும் விடை எழுதும்போது முன்னுரிமை வழங்கும் வினாக்களை ஒழுங்கமைத்துக் கொள்வதற்கும் மேலதிக வாசிப்பு நேரத்தைப் பயன்படுத்துக.

சுட்டெண்							

அறிவுறுத்தல்கள் :

* இவ்வினாத்தாள் **பகுதி A** (வினாக்கள் 1 - 10), **பகுதி B** (வினாக்கள் 11 - 17) என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டது.
* **பகுதி A :**
  எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்குமுரிய உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
* **பகுதி B :**
  ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக. உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள தாள்களில் எழுதுக.
* ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் முடிவடைந்ததும் **பகுதி A** இன் விடைத்தாளானது **பகுதி B** இன் விடைத்தாள்களுக்கு மேலே இருக்கத்தக்கதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
* வினாத்தாளின் **பகுதி B ஐ மாத்திரம்** பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

* இவ்வினாத்தாளில் g ஆனது புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகலைக் குறிக்கின்றது.

பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்கு மாத்திரம்

(10) இணைந்த கணிதம் II		
பகுதி	**வினா எண்**	**புள்ளிகள்**
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

மொத்தம்

இலக்கத்தில்	
எழுத்தில்	

குறியீட்டெண்கள்

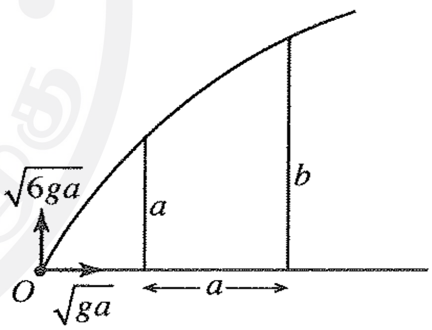
விடைத்தாள் பரீட்சகர்	
பரிசீலித்தவர்: 1	
2	
மேற்பார்வை செய்தவர்:	

பகுதி A

1. ஒவ்வொன்றினதும் திணிவு m ஆகவுள்ள A, B, C என்னும் மூன்று துணிக்கைகள் அதே வரிசையில் ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது ஒரு நேர்கோட்டில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை B உடன் நேரடியாக மோதுமாறு துணிக்கை A இற்கு வேகம் u தரப்படுகிறது. துணிக்கை A உடன் மோதிய பின்னர் துணிக்கை B இயங்கித் துணிக்கை C உடன் நேரடியாக மோதுகின்றது. A இற்கும் B இற்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும். முதலாம் மோதுகைக்குப் பின்னர் B இன் வேகத்தைக் காண்க.

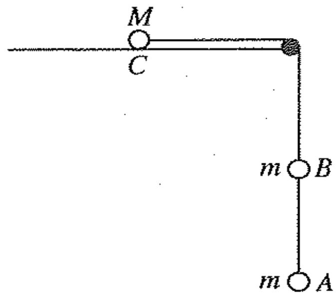
B இற்கும் C இற்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகமும் e ஆகும். B உடன் மோதிய பின்னர் C இன் வேகத்தை எழுதுக.

2. கிடைக் கூறும் நிலைக்குத்துக் கூறும் முறையே $\sqrt{ga}$, $\sqrt{6ga}$ ஆகவுள்ள ஒரு வேகத்துடன் கிடை நிலத்தின் மீது உள்ள ஒரு புள்ளி O இலிருந்து ஒரு துணிக்கை எறியப்படுகின்றது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஒன்றிலிருந்தொன்று கிடைத் தூரம் a இல் இருக்கும் a, b ஆகிய உயரங்கள் உள்ள இரு நிலைக்குத்துச் சுவர்களுக்கு மட்டுமட்டாக மேலாகத் துணிக்கை செல்கின்றது. உயரம் a ஐ உடைய சுவரைக் கடந்து செல்லும்போது துணிக்கையின் வேகத்தின் நிலைக்குத்துக் கூறு $2\sqrt{ga}$ எனக் காட்டுக.



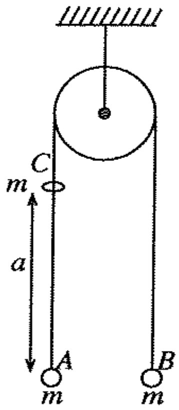
$b = \dfrac{5a}{2}$ எனவும் காட்டுக.

3. உருவில் A, B, C ஆகியன முறையே m, m, M திணிவுகள் உள்ள துணிக்கைகளாகும். A, B ஆகிய துணிக்கைகள் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது உள்ள துணிக்கை C ஆனது மேசையின் விளிம்பில் நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஓர் ஒப்பமான சிறிய கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் வேறோர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் B உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. எல்லாத் துணிக்கைகளும் இழைகளும் ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உள்ளன. இழைகள் இறுக்கமாக இருக்கத்தக்கதாகத் தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. A ஐயும் B ஐயும் தொடுக்கும் இழையின் இழுவையைத் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளை எழுதுக.



4. திணிவு M kg ஐயும் மாறா வலு P kW ஐயும் கொண்ட ஒரு கார் கிடையுடன் கோணம் α இற் சாய்ந்த ஒரு நேர் வீதி வழியே கீழ்நோக்கி இயங்குகின்றது. அதன் இயக்கத்திற்கு ஒரு மாறாத் தடை $R\,(> Mg\sin\alpha)$ N உள்ளது. ஒரு குறித்த கணத்தில் காரின் ஆர்முடுகல் a m s^{-2} ஆகும். இக்கணத்தில் காரின் வேகத்தைக் காண்க.
வீதி வழியே கார் கீழ்நோக்கி இயங்கத்தக்க மாறாக் கதி $\dfrac{1000P}{R - Mg\sin\alpha}$ m s^{-1} என உய்த்தறிக.

5. ஒவ்வொன்றும் திணிவு m ஐ உடைய A, B என்னும் இரு துணிக்கைகள் ஓர் ஒப்பமான நிலைத்த கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் இரு நுனிகளுடனும் இணைக்கப்பட்டு நாப்பத்தில் தொங்குகின்றன. A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே தூரம் a இல் உள்ள ஒரு புள்ளியில் ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படும் அதே திணிவு m ஐ உடைய ஒரு சிறிய மணி C புவியீர்ப்பின் கீழ்ச் சுயாதீனமாக இயங்கி A உடன் மோதி இணைகின்றது (உருவைப் பார்க்க). A இற்கும் C இற்குமிடையே மோதுகை நடைபெறும் கணத்தில் இழையின் கணத்தாக்கையும் மேற்குறித்த மோதுகைக்குச் சற்றுப் பின்னர் B பெறும் வேகத்தையும் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளை எழுதுக.



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. வழக்கமான குறிப்பீட்டில், ஒரு நிலைத்த உற்பத்தி O பற்றி A, B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $2\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $3\mathbf{i}-\mathbf{j}$ எனக் கொள்வோம். $A\hat{O}C = A\hat{O}D = \frac{\pi}{2}$ ஆகவும் $OC = OD = \frac{1}{3}AB$ ஆகவும் இருக்குமாறு C, D ஆகிய இரு வேறுவேறான புள்ளிகளின் தானக் காவிகளைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

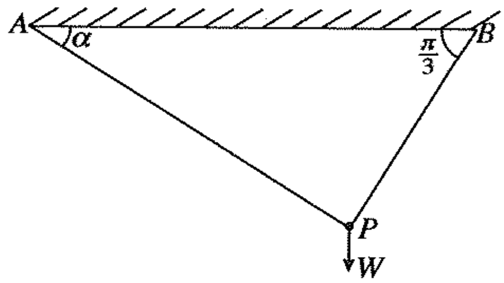
....

....

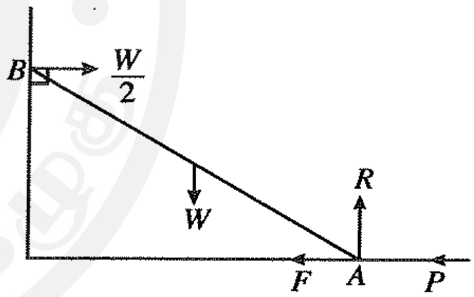
....

[பக். 5 ஐப் பார்க்க

7. கிடையுடன் முறையே α , $\frac{\pi}{3}$ ஆகிய கோணங்களை ஆக்கும் AP, BP என்னும் இரு இலேசான நீட்டமுடியாத இழைகளினால் ஒரு கிடைச் சீலிங்கிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ள நிறை W ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளாறு நாப்பத்தில் உள்ளது. இழை AP இல் உள்ள இழுவையை W, α ஆகியவற்றிற் காண்க.
இதிலிருந்து, இவ்விழுவையின் இழிவுப் பெறுமானத்தையும் அதனை ஒத்த α இன் பெறுமானத்தையும் காண்க.



8. நீளம் $2a$ ஐயும் நிறை W ஐயும் உடைய ஒரு சீரான கோல் AB அதன் முனை A ஒரு கரடான கிடை நிலத்தின் மீதும் முனை B ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கு எதிரேயும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. சுவருக்குச் செங்குத்தாக ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் கோல் நாப்பத்தில், முனை A இல் சுவரை நோக்கிப் பிரயோகிக்கப்படும் பருமன் P ஐ உடைய ஒரு கிடை விசையினால் பேணப்படுகின்றது. உருவில் F உம் R உம் முறையே A இல் உள்ள உராய்வு விசையையும் செவ்வன் மறுத்தாக்கத்தையும் குறிக்கின்றன. B இல் சுவரின் மூலம் உண்டாக்கப்படும் மறுதாக்கம் உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு $\frac{W}{2}$ அத்துடன் கோலிற்கும் நிலத்திற்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{4}$ எனின், $\frac{W}{4} \leq P \leq \frac{3W}{4}$ எனக் காட்டுக.



[பக். 6 ஐப் பார்க்க

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

නව නිර්දේශය/புதிய பாடத்திட்டம்/New Syllabus

NEW

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2019 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2019 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2019

සංයුක්ත ගණිතය II
இணைந்த கணிதம் II
Combined Mathematics II

10 T II

பகுதி B

※ **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

(இவ்வினாத்தாளில் g ஆனது புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகலைக் குறிக்கின்றது.)

11. (*a*) P, Q என்னும் இரு கார்கள் ஒரு நேர் வீதி வழியே மாறா ஆர்முடுகல்களுடன் ஒரே திசையில் இயங்குகின்றன. நேரம் $t = 0$ இல் P இன் வேகம் $u \text{ m s}^{-1}$ உம் Q இன் வேகம் $(u+9) \text{ m s}^{-1}$ உம் ஆகும். P இன் மாறா ஆர்முடுகல் $f \text{ m s}^{-2}$ உம் Q இன் மாறா ஆர்முடுகல் $\left(f + \frac{1}{10}\right) \text{ m s}^{-2}$ உம் ஆகும்.

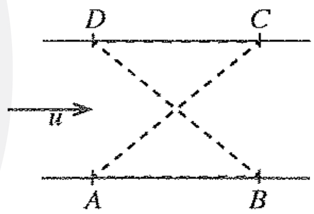
(i) $t \geq 0$ இற்கு P, Q ஆகியவற்றின் இயக்கங்களுக்கு ஒரே வரிப்படத்திலும்

(ii) $t \geq 0$ இற்கு P தொடர்பாக Q இன் இயக்கத்திற்கு வேறொரு வரிப்படத்திலும்

வேக - நேர வரைபுகளைப் பரும்படியாக வரைக.

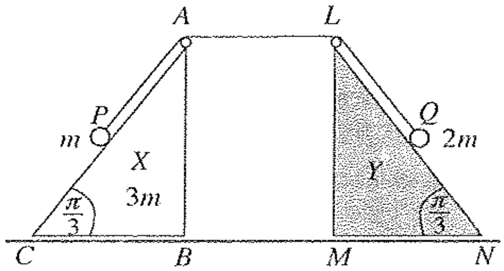
நேரம் $t = 0$ இல் கார் P ஆனது கார் Q இலும் பார்க்க 200 மீற்றர் முன்னால் இருக்கின்றதென மேலும் தரப்பட்டுள்ளது. Q ஆனது P ஐக் கடந்து செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

(*b*) சமாந்தரமான நேர்க் கரைகள் உள்ள அகலம் a ஐ உடைய ஓர் ஆறு சீரான வேகம் u உடன் பாய்கின்றது. உருவில் கரைகளின் மீது உள்ள A, B, C, D என்னும் புள்ளிகள் ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகளாகும். நீர் தொடர்பாக மாறாக் கதி $v\ (> u)$ உடன் இயங்கும் B_1, B_2 என்னும் இரு படகுகள் ஒரே கணத்தில் A இலிருந்து அவற்றின் பயணங்களை ஆரம்பிக்கின்றன. படகு B_1 முதலில் $\overrightarrow{AC}$ வழியே C இற்குச் சென்று பின்னர் திசை $\overrightarrow{CD}$ இல் ஆறு வழியே எதிர்ப்போக்கில் D இற்குச் செல்கின்றது. படகு B_2 முதலில் திசை $\overrightarrow{AB}$ இல் ஆறு வழியே அதன் போக்கில் B இற்குச் சென்று பின்னர் $\overrightarrow{BD}$ வழியே D இற்குச் செல்கின்றது. ஒரே உருவில் B_1 இன் A இலிருந்து C வரைக்கும் B_2 இன் B இலிருந்து D வரைக்குமான இயக்கங்களுக்கு வேக முக்கோணிகளைப் பரும்படியாக வரைக.



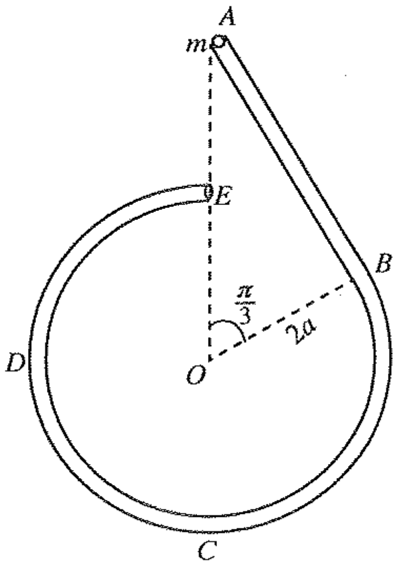
இதிலிருந்து, A இலிருந்து C இற்கான இயக்கத்தில் படகு B_1 இன் கதி $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2v^2 - u^2} + u\right)$ எனக் காட்டி, B இலிருந்து D இற்கான இயக்கத்தில் படகு B_2 இன் கதியைக் காண்க.
B_1, B_2 ஆகிய இரு படகுகளும் ஒரே கணத்தில் D ஐ அடையுமென மேலும் காட்டுக.

12. (*a*) உருவில் ABC, LMN ஆகிய முக்கோணிகள் $A\hat{C}B = L\hat{N}M = \frac{\pi}{3}$, $A\hat{B}C = L\hat{M}N = \frac{\pi}{2}$ ஆகவுள்ள BC, MN ஆகியவற்றைக் கொண்ட முகங்கள் ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்தின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ள முறையே X, Y என்னும் இரு ஒப்பமான சீரான சர்வசம ஆப்புகளின் புவியீர்ப்பு மையங்களினூடாக உள்ள நிலைக்குத்துக் குறுக்கு வெட்டுகளாகும். திணிவு $3m$ ஐ உடைய ஆப்பு X ஆனது நிலத்தின் மீது சுயாதீனமாக இயங்கத்தக்கதாக இருக்கும் அதே வேளை ஆப்பு Y **நிலைப்படுத்தி** வைக்கப்பட்டுள்ளது. AC, LN ஆகிய கோடுகள் உரிய முகங்களின் அதியுயர் சரிவுக் கோடுகளாகும். A, L ஆகியவற்றில் நிலைப்படுத்தப்பட்ட இரு ஒப்பமான சிறிய கப்பிகளுக்கு மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்ட முடியாத இழையின் இரு நுனிகளுடன் முறையே $m, 2m$ என்னும் திணிவுகளை உடைய P, Q என்னும் துணிக்கைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு தொடக்க அமைவில் இழை இறுக்கமாக இருக்க $AP = AL = LQ = a$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக P, Q ஆகிய துணிக்கைகள் முறையே AC, LN ஆகியவற்றின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளன. தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. X ஆனது Y ஐ அடைய எடுக்கும் நேரத்தை a, g ஆகியவற்றில் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக.



[பக். 8 ஐப் பார்க்க

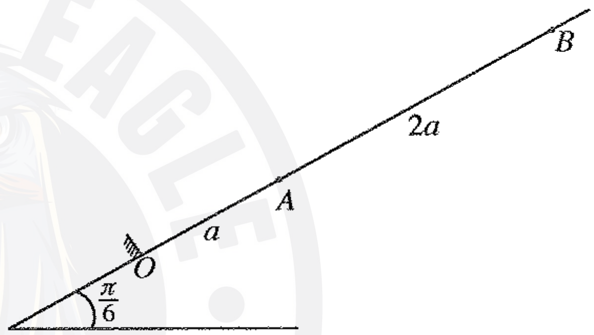
(*b*) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஓர் ஒடுங்கிய ஒப்பமான குழாய் $ABCDE$ ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. நீளம் $2\sqrt{3}a$ ஐ உடைய பகுதி AB நேராக இருக்கும் அதே வேளை அது B இல் ஆரை $2a$ ஐ உடைய வட்டப் பகுதி $BCDE$ இற்குத் தொடலியாக இருக்கின்றது. A, E ஆகிய முனைகள் மையம் O இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே உள்ளன. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது A இல் குழாயினுள்ளே வைக்கப்பட்டு ஓய்விலிருந்து மெதுவாக விடுவிக்கப்படுகின்றது. $\overrightarrow{OA}$ உடன் கோணம் $\theta\left(\frac{\pi}{3} < \theta < 2\pi\right)$ ஐ $\overrightarrow{OP}$ ஆக்கும்போது துணிக்கை P இன் கதி v ஆனது $v^2 = 4ga(2-\cos\theta)$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டி, அக்கணத்தில் துணிக்கை P மீது குழாயினால் ஆக்கப்படும் மறுதாக்கத்தைக் காண்க.



துணிக்கை P இன் A இலிருந்து B இற்கான இயக்கத்தில் அதன் மீது குழாயினால் ஆக்கப்படும் மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

துணிக்கை P ஆனது B ஐக் கடக்கும்போது துணிக்கை P மீது குழாயினால் ஆக்கப்படும் மறுதாக்கம் சடுதியாக மாறுகின்றதெனக் காட்டுக.

13. கிடையுடன் கோணம் $\frac{\pi}{6}$ இற் சாய்ந்த ஓர் ஒப்பமான நிலைத்த தளத்தின் ஓர் அதியுயர் சரிவுக் கோட்டின் மீது O ஆனது ஆகவும் கீழே உள்ள புள்ளியாக இருக்க O, A, B ஆகிய புள்ளிகள் அதே வரிசையில் $OA = a$ ஆகவும் $AB = 2a$ ஆகவும் இருக்குமாறு உள்ளன. இயற்கை நீளம் a ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு mg ஐயும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி புள்ளி O உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை மற்றைய நுனி திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை P ஆனது புள்ளி B ஐ அடையும் வரைக்கும் இழை கோடு OAB வழியே இழுக்கப்படுகின்றது. அதன் பின்னர் துணிக்கை P ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. B இலிருந்து A வரைக்கும் P இன் இயக்கச் சமன்பாடானது $0 \le x \le 2a$ இற்கு $\ddot{x} + \frac{g}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right) = 0$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக; இங்கு $AP = x$ ஆகும்.



$y = x + \frac{a}{2}$ எனக் கொண்டு மேற்குறித்த இயக்கச் சமன்பாட்டினை $\frac{a}{2} \le y \le \frac{5a}{2}$ இற்கு வடிவம் $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ இல் மறுபடியும் எழுதுக; இங்கு $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$.

மேற்குறித்த எளிய இசை இயக்கத்தின் மையத்தைக் கண்டு சூத்திரம் $\dot{y}^2 = \omega^2(c^2 - y^2)$ ஐப் பயன்படுத்தி வீச்சம் c ஐயும் A ஐ அடையும்போது P இன் வேகத்தையும் காண்க.

O ஐ அடையும்போது P இன் வேகம் $\sqrt{7ga}$ எனக் காட்டுக.

B இலிருந்து O இற்கு இயங்குவதற்கு P எடுக்கும் நேரம் $\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + 2k\right\}$ எனவும் காட்டுக; இங்கு $k = \sqrt{7} - \sqrt{6}$.

துணிக்கை P ஆனது O ஐ அடையும்போது அது தளத்திற்குச் செங்குத்தாக O இல் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஓர் ஒப்பமான தடுப்புடன் மோதுகின்றது. P இற்கும் தடுப்புக்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும். $0 < e \le \frac{1}{\sqrt{7}}$ எனின், பின்னர் நிகழும் P இன் இயக்கம் எளிய இசை **இயக்கமன்று** எனக் காட்டுக.

14. (*a*) $OACB$ ஓர் இணைகரம் எனவும் D ஆனது AC மீது $AD : DC = 2 : 1$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளி எனவும் கொள்வோம். O பற்றி A, B ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ஆகும்; இங்கு $\lambda > 0$ ஆகும். $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{BD}$ ஆகிய காவிகளை $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda$ ஆகியவற்றில் எடுத்துரைக்க.

இப்போது $\overrightarrow{OC}$ ஆனது $\overrightarrow{BD}$ இற்குச் செங்குத்தானதெனக் கொள்வோம். $3|\mathbf{a}|^2\lambda^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\lambda - |\mathbf{b}|^2 = 0$ எனக் காட்டி, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ ஆகவும் $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ ஆகவும் இருப்பின், λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

[பக். 9 ஐப் பார்க்க

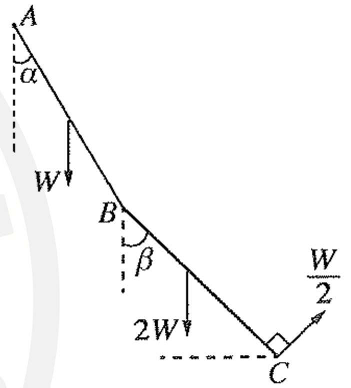
(*b*) மையம் O ஆகவும் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $2a$ ஆகவும் உள்ள ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி $ABCDEF$ இன் தளத்தில் உள்ள மூன்று விசைகளை ஒரு தொகுதி கொண்டுள்ளது. உற்பத்தி O இலும் Ox-அச்சு $\overrightarrow{OB}$ வழியேயும் Oy-அச்சு $\overrightarrow{OH}$ வழியேயும் இருக்க விசைகளும் அவற்றின் தாக்கப் புள்ளிகளும் வழக்கமான குறிப்பீட்டில் கீழேயுள்ள அட்டவணையிற் காட்டப்பட்டுள்ளன; இங்கு H ஆனது CD இன் நடுப்புள்ளியாகும். (P நியூற்றனிலும் a மீற்றரிலும் அளக்கப்படுகின்றன.)

தாக்கப் புள்ளி	தானக் காவி	விசை
A	$a\mathbf{i}-\sqrt{3}a\mathbf{j}$	$3P\mathbf{i}+\sqrt{3}P\mathbf{j}$
C	$a\mathbf{i}+\sqrt{3}a\mathbf{j}$	$-3P\mathbf{i}+\sqrt{3}P\mathbf{j}$
E	$-2a\mathbf{i}$	$-2\sqrt{3}P\mathbf{j}$

தொகுதி ஓர் இணைக்குச் சமவலுவுள்ளதெனக் காட்டி, இணையின் திருப்பத்தைக் காண்க.

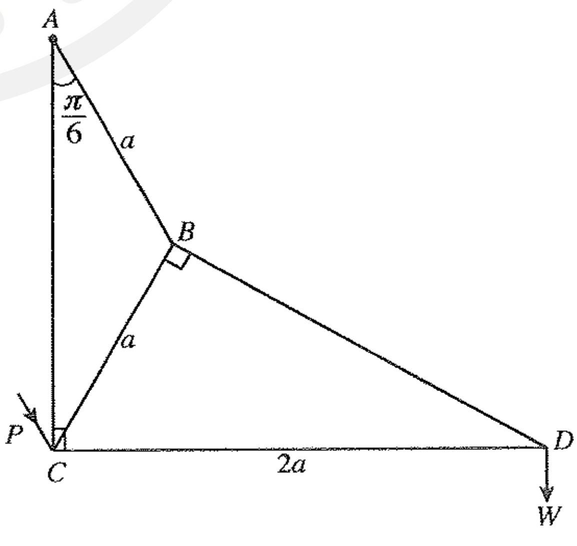
இப்போது $\overrightarrow{FE}$ வழியே தாக்கும் பருமன் $6P$ N ஐ உடைய ஒரு மேலதிக விசை இத்தொகுதியில் புகுத்தப்படுகின்றது. புதிய தொகுதி ஒடுங்கும் தனி விசையின் பருமன், திசை, தாக்கக் கோடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

15.(*a*) ஒவ்வொன்றும் நீளம் $2a$ ஐ உடைய AB, BC என்னும் இரு சீரான கோல்கள் B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. கோல் AB இன் நிறை W உம் கோல் BC இன் நிறை $2W$ உம் ஆகும். முனை A ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. AB, BC ஆகிய கோல்கள் கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் முறையே α, β என்னும் கோணங்களை ஆக்கிக்கொண்டிருக்க இத்தொகுதி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு C இல் BC இற்குச் செங்குத்தான ஒரு திசையில் பிரயோகிக்கும் ஒரு விசை $\dfrac{W}{2}$ இனால் நாப்பத்தில் வைத்திருக்கப்படுகின்றது. $\beta = \dfrac{\pi}{6}$ எனக் காட்டி, மூட்டு B இல் கோல் AB ஆனது கோல் BC மீது உஞற்றும் மறுதாக்கத்தின் கிடைக் கூறையும் நிலைக்குத்துக் கூறையும் காண்க.



$\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$ எனவும் காட்டுக.

(*b*) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டப்படல் அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட AB, BC, BD, DC, AC என்னும் ஐந்து இலேசான கோல்களைக் கொண்டுள்ளது. இங்கு $AB = CB = a$, $CD = 2a$, $B\hat{A}C = \dfrac{\pi}{6}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. சட்டப்படல் A இல் ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. மூட்டு D இல் ஒரு சுமை W தொங்கவிடப்பட்டு, AC நிலைக்குத்தாகவும் CD கிடையாகவும் இருக்க மூட்டு C இல் கோல் AB இற்குச் சமாந்தரமாக உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ள திசையில் பிரயோகிக்கும் ஒரு விசை P இனால் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சட்டப்படல் நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி D, B, C ஆகிய மூட்டுகளுக்கு ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக.



இதிலிருந்து

(i) இழுவைகளா, உதைப்புகளா என எடுத்துரைத்து ஐந்து கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புகளையும்

(ii) P இன் பெறுமானத்தையும்

காண்க.

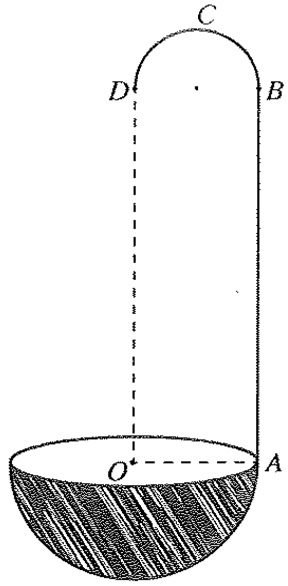
[பக். 10 ஐப் பார்க்க

16. (i) ஆரை a ஐ உடைய ஒரு சீரான மெல்லிய அரைவட்டக் கம்பியின் திணிவு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து $\dfrac{2a}{\pi}$ தூரத்திலும்

(ii) ஆரை a ஐ உடைய ஒரு சீரான மெல்லிய அரைக்கோள ஓட்டின் திணிவு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து $\dfrac{a}{2}$ தூரத்திலும்

இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

மையம் O ஐயும் ஆரை $2a$ ஐயும் உடைய ஒரு சீரான மெல்லிய அரைக்கோள ஓட்டுடன் உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு நீளம் $2\pi a$ ஐ உடைய ஒரு நேர்ப் பகுதி AB ஐயும் விட்டம் BD ஆனது AB இற்குச் செங்குத்தாக இருக்குமாறு ஆரை a ஐ உடைய ஓர் அரைவட்டப் பகுதி BCD ஐயும் கொண்ட ஒரு சீரான கம்பியினால் செய்யப்படும் ஒரு மெல்லிய கைப்பிடி $ABCD$ ஐ விறைப்பாகப் பொருத்துவதன் மூலம் ஒரு கரண்டி செய்யப்பட்டுள்ளது. புள்ளி A ஆனது அரைக்கோளத்தின் விளிம்பு மீது இருக்கும் அதே வேளை OA ஆனது AB இற்குச் செங்குத்தாகவும் OD ஆனது AB இற்குச் சமாந்தரமாகவும் உள்ளன. மேலும் BCD ஆனது $OABD$ இன் தளத்தில் அமைந்துள்ளது. அரைக்கோளத்தின் அலகுப் பரப்பளவின் திணிவு σ உம் கைப்பிடியின் அலகு நீளத்தின் திணிவு $\dfrac{a\sigma}{2}$ உம் ஆகும். கரண்டியின் திணிவு மையம் OA இற்குக் கீழே தூரம் $\dfrac{2}{19\pi}\left(8\pi - 2\pi^2 - 1\right)a$ இலும் O இனூடாகவும் D இனூடாகவும் செல்லும் கோட்டிலிருந்து தூரம் $\dfrac{5}{19}a$ இலும் உள்ளதெனக் காட்டுக.



கரண்டி ஒரு கரடான கிடை மேசை மீது அரைக்கோள மேற்பரப்பு அதனுடன் தொடுகையுறுமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. அரைக்கோள மேற்பரப்புக்கும் மேசைக்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் $\dfrac{1}{7}$ ஆகும். $\overrightarrow{AO}$ இன் திசையிலே A இற் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு கிடை விசையினால் OD நிலைக்குத்தாக இருக்கக் கரண்டி நாப்பத்தில் வைத்திருக்கப்படலாமெனக் காட்டுக.

17. (*a*) தொடக்கத்தில் ஒவ்வொன்றும் வெள்ளை நிறமாக அல்லது கறுப்பு நிறமாக உள்ள, நிறங்களில் தவிர எல்லா விதத்திலும் சர்வசமனான 3 பந்துகள் ஒரு பெட்டியில் உள்ளன. இப்போது நிறத்தைத் தவிர பெட்டியில் உள்ள பந்துகளுக்கு எல்லா விதத்திலும் சர்வசமனான ஒரு வெள்ளை நிறப் பந்து பெட்டியில் இடப்பட்டுப் பின்னர் பெட்டியிலிருந்து ஒரு பந்து எழுமாற்றாக வெளியே எடுக்கப்படுகின்றது. பெட்டியில் உள்ள பந்துகளின் தொடக்கச் சேர்க்கைகளின் நான்கு இயல்தகவுகளும் சம சந்தர்ப்பமானவை என எடுத்துக்கொண்டு,

(i) வெளியே எடுத்த பந்து வெள்ளைப் பந்தாக,

(ii) வெளியே எடுத்த பந்து வெள்ளைப் பந்தெனத் தரப்படும்போது தொடக்கத்தில் பெட்டியில் செப்பமாக 2 கறுப்பு நிறப் பந்துகள் இருப்பதற்கான

நிகழ்தகவைக் காண்க.

(*b*) μ, σ ஆகியன முறையே பெறுமானத் தொடை $\{x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ இன் இடையும் நியம விலகலும் ஆகுமெனக் கொள்வோம். பெறுமானத் தொடை $\{\alpha x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ இன் இடையையும் நியம விலகலையும் காண்க; இங்கு α ஒரு மாறிலி.

ஒரு குறித்த கம்பனியின் 50 தொழிலாளர்களின் மாதச் சம்பளங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் பொழிப்பாக்கப்பட்டுள்ளன:

மாதச் சம்பளம் (ஆயிரம் ரூபாயில்)	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
5 – 15	9
15 – 25	11
25 – 35	14
35 – 45	10
45 – 55	6

50 தொழிலாளர்களினதும் மாதச் சம்பளங்களின் இடையையும் நியம விலகளையும் மதிப்பிடுக.

ஓர் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் ஒவ்வொரு தொழிலாளரினதும் மாதச் சம்பளம் $p\%$ இனால் அதிகரிக்கப்படுகின்றது. மேற்குறித்த 50 தொழிலாளர்களினதும் புதிய மாதச் சம்பளங்களின் இடை ரூ. 29 172 எனத் தரப்பட்டுள்ளது. p இன் பெறுமானத்தையும் 50 தொழிலாளர்களினதும் புதிய மாதச் சம்பளங்களின் நியம விலகலையும் மதிப்பிடுக.

***

அந்தரங்கமானது

NEW

இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்

க.பொ.த (உயர் தர)ப் பரீட்சை - 2019

10-இணைந்த கணிதம்-I

புதிய பாடத்திட்டம்

புள்ளியிடும் திட்டம்

இந்த புள்ளியிடும் திட்டம் பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்காக தயாரிக்கப்பட்டது. பிரதம பரீட்சகர்களின் கலந்துரையாடல் நடைபெறும் சந்தர்ப்பத்தில் பரிமாறிக்கொள்ளும் கருத்துக்களுக்கிணங்க, இதில் உள்ள சில விடயங்கள் மாற்றம் பெறலாம்

இறுதித் திருத்தங்கள் உள்ளடக்கப்படவுள்ளன

முழுப்பதிப்புரிமையுடையது

க.பொ.த(உ.த) பரீட்சை - 2019

10 - இணைந்த கணிதம் I

புள்ளி வழங்கும் திட்டம்

பத்திரம் I

பகுதி : A = $10 \times 25 = 250$

பகுதி : B = $05 \times 150 = 100$

மொத்தம் $= 1000 / 10$

பத்திரம் I இறுதிப் புள்ளி $= 100$

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடல் - பொது நுட்ப முறைகள்

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடும் போதும், புள்ளிப்பட்டியலில் புள்ளிகளைப் பதியும் போதும் ஓர் அங்கீகரிக்கப்பட்ட முறையைக் கடைப்பிடித்தல் கட்டாயமானதாகும். அதன்பொருட்டு பின்வரும் முறையில் செயற்படவும்.

1. விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடுவதற்கு சிவப்பு நிற குமிழ்முனை பேனாவை பயன்படுத்தவும்.
2. சகல விடைத்தாள்களினதும் முதற்பக்கத்தில் உதவிப் பரீட்சகரின் குறியீட்டெண்ணைக் குறிப்பிடவும். இலக்கங்கள் எழுதும்போது தெளிவான இலக்கத்தில் எழுதவும்.
3. இலக்கங்களை எழுதும்போது பிழைகள் ஏற்பட்டால் அவற்றைத் தனிக்கோட்டினால் கீறிவிட்டு, மீண்டும் பக்கத்தில் சரியாக எழுதி, சிற்றொப்பத்தை இடவும்.
4. ஒவ்வொரு வினாவினதும் உபபகுதிகளின் விடைகளுக்காக பெற்றுக்கொண்ட புள்ளியை பதியும் போது அந்த வினாப்பகுதிகளின் இறுதியில் △ இன் உள் பதியவும். இறுதிப் புள்ளியை வினா இலக்கத்துடன் ☐ இன் உள் பின்னமாகப் பதியவும். புள்ளிகளைப் பதிவதற்கு பரீட்சகர்களுக்காக ஒதுக்கப்பட்ட நிரலை உபயோகிக்கவும்.

உதாரணம் - வினா இல 03

(i) .... ✓ $\frac{4}{5}$

(ii) .... ✓ $\frac{3}{5}$

(iii) .... ✓ $\frac{3}{5}$

03 (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = $\boxed{\frac{10}{15}}$

பல்தேர்வு விடைத்தாள் (துளைத்தாள்)

க.பொ.த.(உ.த) மற்றும் தகவல் தொழிநுட்பப் பரீட்சைக்கான துளைத்தாள் திணைக்களத்தால் வழங்கப்படும். சரியாக துளையிடப்பட்டு அத்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாள் தங்களுக்கு கிடைக்கப்பெறும். அத்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாளைப் பயன்படுத்துவது பரீட்சகரின் கடமையாகும்.

அதன் பின்னர் விடைத்தாளை நன்கு பரிசீலித்துப் பார்க்கவும். ஏதாவது வினாவுக்கு, ஒரு விடைக்கும் அதிகமாக குறியிட்டிருந்தாலோ, ஒரு விடைக்காவது குறியிடப்படாமலிருந்தாலோ தெரிவுகளை வெட்டிவிடக்கூடியதாக கோடொன்றைக் கீறவும். சில வேளைகளில் பரீட்சார்த்தி முன்னர் குறிப்பிட்ட விடையை அழித்துவிட்டு வேறு விடைக்குக் குறியிட்டிருக்க முடியும். அவ்வாறு அழித்துள்ள போது நன்கு அழிக்காது விட்டிருந்தால், அவ்வாறு அழிக்கப்பட்ட தெரிவின் மீதும் கோடிடவும்.

துளைத்தாளை விடைத்தாளின் மீது சரியாக வைக்கவும். சரியான விடையை ✓ அடையாளத்தாலும் பிழையான விடையை O அடையாளத்தாலும் இறுதி நிரலில் அடையாளமிடவும். சரியான விடைகளின் எண்ணிக்கையை அவ்வவ் தெரிவுகளின் இறுதி நிரையின் கீழ் அத்துடன் அவற்றை கூட்டி சரியான புள்ளியை உரிய கட்டத்தில் எழுதவும்.

கட்டமைப்பு கட்டுரை விடைத்தாள்கள்

1. பரீட்சார்த்திகளால் விடைத்தாளில் வெறுமையாக விடப்பட்டுள்ள இடங்களையும், பக்கங்களையும் குறுக்குக் கோடிட்டு வெட்டிவிடவும். பிழையான பொருத்தமற்ற விடைகளுக்குக் கீழ் கோடிடவும். புள்ளி வழங்கக்கூடிய இடங்களில் ✓ அடையாளமிட்டு அதனைக் காட்டவும்.
2. புள்ளிகளை ஓவலண்ட் கடதாசியின் இடது பக்கத்தில் குறிக்கவும்.
3. சகல வினாக்களுக்கும் கொடுத்த முழுப் புள்ளியை விடைத்தாளின் முன் பக்கத்திலுள்ள பொருத்தமான பெட்டியினுள் வினா இலக்கத்திற்கு நேராக 2 இலக்கங்களில் பதியவும். வினாத்தாளில் உள்ள அறிவுறுத்தலின் படி வினாக்கள் தெரிவு செய்யப்படல் வேண்டும். எல்லா வினாக்களினதும் புள்ளிகளும் முதல் பக்கத்தில் பதியப்பட்ட பின் விடைத்தாளில் மேலதிகமாக எழுதப்பட்டிருக்கும் விடைகளின் புள்ளிகளில் குறைவான புள்ளிகளை வெட்டி விடவும்.
4. மொத்த புள்ளிகளை கவனமாக கூட்டி முன் பக்கத்தில் உரிய கூட்டில் பதியவும். விடைத்தாளில் வழங்கப்பட்டுள்ள விடைகளுக்கான புள்ளியை மீண்டும் பரிசீலித்த பின் முன்னால் பதியவும். ஒவ்வொரு வினாக்களுக்கும் வழங்கப்படும் புள்ளிகளை உரிய விதத்தில் எழுதுவும்.

புள்ளிப்பட்டியல் தயாரித்தல்

இம்முறை சகல பாடங்களுக்குமான இறுதிப்புள்ளி குழுவினுள் கணிப்பிடப்படமாட்டாது. இது தவிர ஒவ்வொரு வினாப் பத்திரத்துக்குமான இறுதிப்புள்ளி தனித்தனியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதியப்பட வேண்டும். பத்திரம் I ற்கான பல்தேர்வு வினாப்பத்திரம் மட்டும் இருப்பின் புள்ளிகள் இலக்கத்திலும் எழுத்திலும் பதியப்பட வேண்டும். 51 சித்திரப் பாடத்திற்குரிய I, II, மற்றும் III ஆம் வினாப்பத்திரங்களுக்குரிய புள்ளிகளை தனித்தனியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதிந்து எழுத்திலும் எழுதுதல் வேண்டும்.

ooo

பகுதி A

1. **கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப்** பயன்படுத்தி, எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $\sum_{r=1}^{n}(2r-1) = n^2$ என நிறுவுக.

n=1 இற்கு, $\text{L.H.S.} = 2 \times 1 - 1 = 1$, $\text{R.H.S.} = 1^2 = 1$ 5

$n = 1$ இற்கு முடிவு உண்மை

n=p, இற்கு முடிவு உண்மை எனின், $p \in \mathbb{Z}^+$.

i.e. $\sum_{r=1}^{p} (2r-1) = p^2.$ 5

எனவே $\sum_{r=1}^{p+1} (2r-1) = \sum_{r=1}^{p} (2r-1) + \big(2(p+1)-1\big)$ 5

$= p^2 + (2p + 1)$

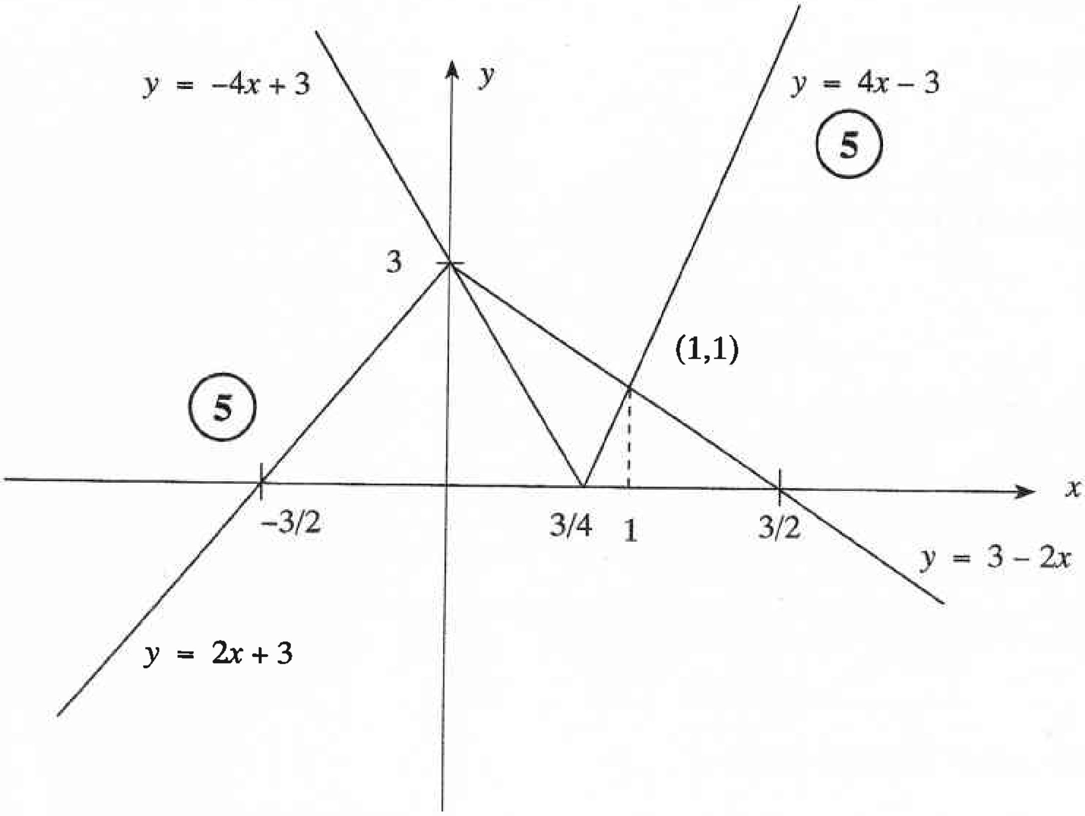
$= (p+1)^2.$ 5

n = p இற்கு முடிவு உண்மை எனின் n = p + 1 இற்கு முடிவு உண்மை ஆகின்றது. அத்துடன் n=1 இற்கு உண்மை என காட்டப்பட்டது.

கணிதத் தொகுத்தறித்தத்துவத்தால் எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$. இற்கும் முடிவு உண்மை ஆகும் 5

25

2. ஒரே வரிப்படத்தில் $y=|4x-3|$, $y=3-2|x|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளைப் பரும்படியாக வரைக. **இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக,** சமனிலி $|2x-3|+|x|<3$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.



வரைபுகளின் வெட்டுப்புள்ளிகளில்

$$4x-3=3-2x \Rightarrow x=1$$
$$-4x+3=3+2x \Rightarrow x=0 \quad 5$$

வரைபுகளிலிருந்து,

$$|4x-3| < 3-2|x| \qquad \Leftrightarrow \qquad 0<x<1$$

$$\therefore \ |4x-3| + |2x| < 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0<x<1$$

x ஐ $\frac{x}{2}$ ஆல் பிரதியீடு செய்வதால்,

$$|2x-3| + |x| < 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0<x<2. \quad 5$$

எனவே $|2x-3|+|x|<3$ இனைத் திருப்தி செய்யும் x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களின் தொடை $\{x : 0<x<2\}$. 5

<u>வேறு முறை</u>

முன்புபோல் வரைபுகளுக்கு 5 + 5

<u>x இன் பெறுமானங்கள்</u>

$|2x-3| + |x| < 3$

<u>Case (i)</u> $x \leq 0$:

$|2x-3| + |x| < 3 \Leftrightarrow -2x+3-x < 3$

$\Leftrightarrow 3x > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$

இவ்வகையில் தீர்வு இல்லை

<u>Case (ii)</u> $0 < x \leq \frac{3}{2}$

$|2x-3| + |x| < 3 \Leftrightarrow -2x+3+x < 3$

$\Leftrightarrow x > 0$

இவ்வகையில் x இன் தீர்வு $0 < x \leq \frac{3}{2}$.

<u>Case (iii)</u> $x > \frac{3}{2}$

$|2x-3| + |x| < 3 \Leftrightarrow 2x-3+x < 3$

$\Leftrightarrow 3x < 6$

$\Leftrightarrow x < 2$

இவ்வகையில் x இன் தீர்வு $\frac{3}{2} < x < 2$

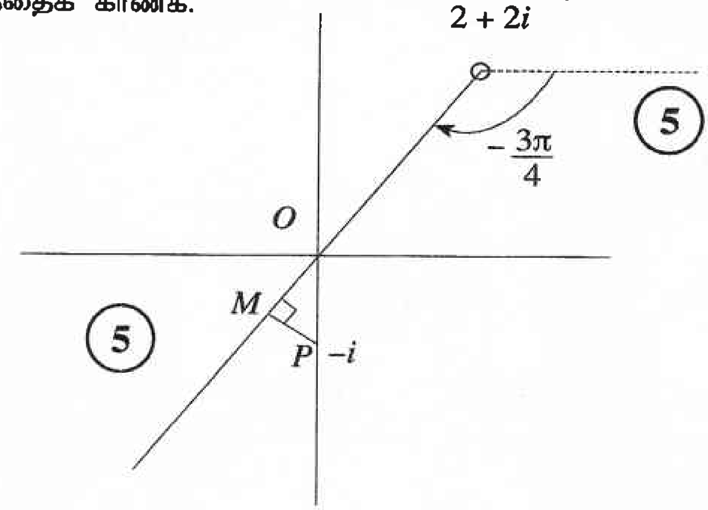
All 3 cases with correct solutions	10
Any 2 cases with correct solutions	5

எனவே, முடிவாக x இன் பெறுமானங்களின் தீர்வுகள் $0 < x < 2$. 5

25

3. ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில், $\mathrm{Arg}(z-2-2i) = -\frac{3\pi}{4}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z ஐ வகை குறிக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கைப் பரும்படியாக வரைக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $\mathrm{Arg}(z-2-2i) = -\frac{3\pi}{4}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $|i\bar{z}+1|$ இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.



அவதானிக்கும் போது

$$|i\bar{z}+1| = |i(\bar{z}-i)| = |\bar{z}-i| = |\overline{z+i}|$$

$$= |(z+i)|$$

$$= |z-(-i)| \quad 5$$

எனவே $|(i\bar{z}+1)|$ இன் இழிவுப்பெறுமானம் PM இற்குச் சமன் 5

அத்துடன் $PM = 1 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 5

25

4. $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^7$ இன் ஈருறுப்பு விரியில் உள்ள x^6 இன் குணகம் 35 எனக் காட்டுக.

மேற்குறித்த ஈருறுப்பு விரியில் x ஐச் சாராத உறுப்பு இல்லை எனவும் காட்டுக.

$$\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^7 = \sum_{r=0}^{7} {}^7C_r \, (x^3)^r \left(\frac{1}{x^2}\right)^{7-r} \qquad 5$$

$$= \sum_{r=0}^{7} {}^7C_r \, x^{5r-14}$$

x^6 : $5r - 14 = 6 \Leftrightarrow r = 4.$ 5

x^6 இன் குணகம் $x^6 = {}^7C_4 = 35$ 5

விரியில் x சாராத உறுப்பிற்கு

$5r - 14 = 0.$ 5

$r \in \mathbb{Z}^+$ ஆதலால் இது சாத்தியமற்று 5

25

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{\sin(\pi(x-3))}=\dfrac{1}{2\pi}$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{\sin(\pi(x-3))} = \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{\sin(\pi(x-3))}\cdot\frac{(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2}+1)} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sin(\pi(x-3))}\lim_{x\to 3}\frac{1}{(\sqrt{x-2}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{1}{\dfrac{\sin(\pi(x-3))}{\pi(x-3)}}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot 1 \quad 5$$

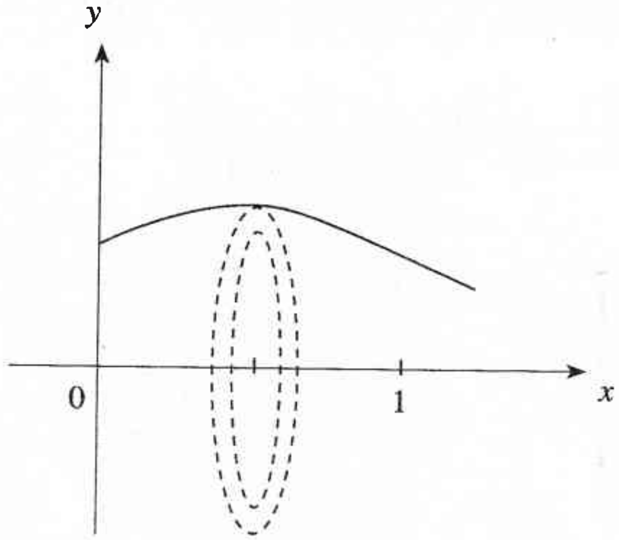
$$= 1\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}$$

5 5

$$= \frac{1}{2\pi} \quad 5$$

25

6. $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+1}}$, $x=0,\ x=1,\ y=0$ என்னும் வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசம் x - அச்சைப் பற்றி 2π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றப்படுகின்றது. இவ்வாறு பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\dfrac{\pi}{4}(\pi+\ln 4)$ எனக் காட்டுக.



பிறப்பிக்கப்பட்ட கன அளவு $= \displaystyle\int_0^1 \pi\left(\sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}}\right)^2 dx$ 5

$= \pi\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx\right)$ 5

$= \pi\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 + \tan^{-1}x\Big|_0^1\right)$ 5 + 5

$= \pi\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\pi}{4}\left(\ln 4 + \pi\right)$ 5

25

7. C ஆனது $t \in \mathbb{R}$ இற்கு $x = at^2$, $y = 2at$ ஆகியவற்றினால் பரமானமுறையாகத் தரப்படும் பரவளைவெனக் கொள்வோம்; இங்கு $a \neq 0$. பரவளைவு C இற்குப் புள்ளி $\left(at^2, 2at\right)$ இல் உள்ள செவ்வன் கோட்டின் சமன்பாடு $y + tx = 2at + at^3$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.
பரவளைவு C மீது புள்ளி $P \equiv (4a, 4a)$ இல் உள்ள செவ்வன் கோடு இப்பரவளைவை மறுபடியும் புள்ளி $Q \equiv (aT^2, 2aT)$ இற் சந்திக்கின்றது. $T = -3$ எனக் காட்டுக.

$x = at^2$, $y = 2at$

$$\frac{dx}{dt} = 2at, \quad \frac{dy}{dt} = 2a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2a \cdot \frac{1}{2at} = \frac{1}{t} \qquad t \neq 0. \quad 5$$

செவ்வன் கோட்டின் சாய்வு $= -t$

$(at^2, 2at)$ இல் செவ்வனின் சமன்பாடு

$y - 2at = -t\,(x - at^2)$

$y + tx = 2at + at^3$ 5 ($t = 0$ இற்கு நடக்கும்)

$P \equiv (4a, 4a)$ ஆனது C மீது ஆகையால் $\Rightarrow t = 2$.

P இல் செவ்வன் கோடு : $y + 2x = 4a + 8a = 12a$ 5

இது C ஐ $(aT^2, 2aT)$, இல் சந்திப்பதால்

$2aT + 2aT^2 = 12a.$ 5

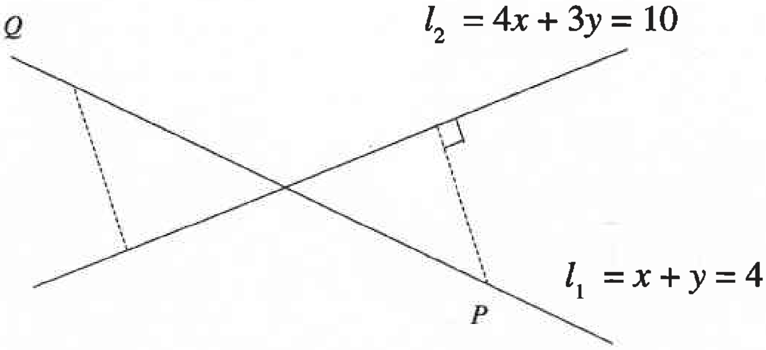
$\Leftrightarrow T^2 + T - 6 = 0 \Leftrightarrow (T-2)(T+3) = 0$

$\Leftrightarrow T = 2$ or $T = -3$

$\therefore T = -3$ 5

25

8. l_1 , l_2 ஆகியன முறையே $x + y = 4$, $4x + 3y = 10$ ஆகியவற்றினால் தரப்படும் நேர்கோடுகளெனக் கொள்வோம். கோடு l_1 மீது P, Q என்னும் இரு வேறுவேறான புள்ளிகள், அப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலும் இருந்து கோடு l_2 இற்கான செங்குத்துத் தூரம் 1 அலகாக இருக்கத்தக்கதாக, உள்ளன. P, Q ஆகியவற்றின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.



கோடு l_1 மீதான யாதாயினும் புள்ளி

$(t, 4 - t),\ t \in \mathbb{R}$. 5 என எழுதப்படலாம்

$P \equiv (t_1, 4 - t_1)$ என்க

P இலிருந்து l_2 இற்கான செங்குத்து தூரம் $= \dfrac{\left|4t_1 + 3\,(4 - t_1) - 10\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 1$ 5

$\therefore\ \left|t_1 + 2\right| = 5$

$\therefore\ t_1 = -7$ or $t_1 = 3$ 5

எனவே P, Q இன் ஆள் கூறுகள்

$(-7, 11)$, $(3, 1)$. 5 + 5

25

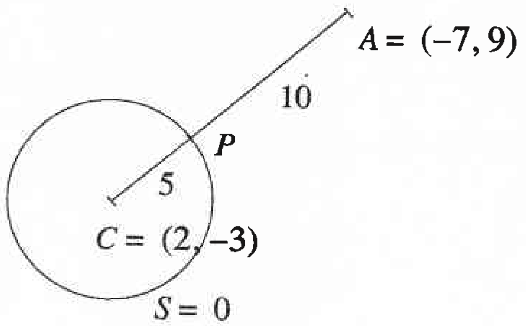
9. புள்ளி $A \equiv (-7, 9)$ ஆனது வட்டம் $S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ இற்கு வெளியே இருக்கின்றதெனக் காட்டுக. வட்டம் $S = 0$ மீது உள்ள, புள்ளி A இற்கு மிக அண்மையில் இருக்கும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$S = 0$ இன் மையம் $C = (2, -3)$. 5

$S = 0$ இன் ஆரை $R = \sqrt{4 + 9 + 12} = \sqrt{25} = 5.$ 5

$CA^2 = 9^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow CA = 15 > R = 5.$ 5

எனவே புள்ளி A தரப்பட்ட வட்டத்திற்கு வெளியே இருக்கும்



CA வட்டம் $S=0$ இனை சந்திக்கும் புள்ளி P, A இற்கு அண்மையில் உள்ள வட்டம் $S=0$ இன் மேலுள்ள புள்ளியாகும்.

$CP : PA = 5 : 10$

$= 1 : 2$ 5

$$\therefore \; P \equiv \left(\frac{3 \times 2 + 1(-7)}{3} , \; \frac{2(-3) + 1 \times 9}{3} \right)$$

i.e. $P \equiv (-1, 1)$ 5

25

10. $\theta \neq (2n+1)\pi$ இற்கு $t = \tan\frac{\theta}{2}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $n \in \mathbb{Z}$ ஆகும். $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ எனக் காட்டுக.
$\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$ என உய்த்தறிக.

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}, \quad \theta \neq (2n+1)\pi. \text{ இற்கு}$$

5

$$= \frac{1-t^2}{1+t^2}$$ 5

$\theta = \frac{\pi}{6}$. என்க $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ 5

$$\Rightarrow \sqrt{3}\,(1+t^2) = 2(1-t^2)$$

$$(2+\sqrt{3})\,t^2 = 2-\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad t^2 = \frac{(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})} \times \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$$ 5

$$= (2-\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow t = \tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$$ 5 $\left(\because \tan\frac{\pi}{12} > 0\right)$

$\boxed{25}$

பகுதி B

※ **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (a) $p \subset \mathbb{R}$ எனவும் $0 < p \leq 1$ எனவும் கொள்வோம். 1 ஆனது சமன்பாடு $p^2x^2 + 2x + p = 0$ இன் ஒரு மூலம் **அன்று** எனக் காட்டுக.
α, β ஆகியன இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களெனக் கொள்வோம். α, β ஆகிய இரண்டும் மெய்யெனக் காட்டுக.
$\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ ஆகியவற்றை p இல் எழுதி
$$\frac{1}{(\alpha-1)} \cdot \frac{1}{(\beta-1)} = \frac{p^2}{p^2+p+2}$$
எனக் காட்டுக.
$\frac{\alpha}{\alpha-1}, \frac{\beta}{\beta-1}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு
$(p^2+p+2)x^2 - 2(p+1)x + p = 0$ எனவும் இம்மூலங்கள் இரண்டும் நேர் எனவும் காட்டுக.

(b) c, d ஆகியன இரு **பூச்சியமல்லாத** மெய்யெண்கள் எனவும் $f(x) = x^3 + 2x^2 - dx + cd$ எனவும் கொள்வோம்.
$(x-c)$ ஆனது $f(x)$ இன் ஒரு காரணி எனவும் $f(x)$ ஆனது $(x-d)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி cd எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. c, d ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.
c, d ஆகியவற்றின் இப்பெறுமானங்களுக்கு, $f(x)$ ஆனது $(x+2)^2$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதியைக் காண்க.

(a) $p^2x^2 + 2x + p = 0$. இன் ஒரு மூலம் 1 எனக்கொண்டால்

$x = 1$ ஐப் பிரதியிட $p^2 + 2 + p = 0$. 5

இது சாத்தியமன்று எனெனில் $p > 0$ ஆக $p^2 + 2 + p > 0$. 5

எனவே 1, $p^2x^2 + 2x + p = 0$ இன் மூலம் அன்று $\boxed{10}$

பிரித்துக் காட்டி $\Delta = 2^2 - 4p^2 \cdot p$ 10

$= 4(1 - p^3)$

$\geq 0 \ (\because 0 < p \leq 1)$ 5

ஆகவே α, β மெய்யானவை 5 $\boxed{20}$

$\alpha + \beta = -\frac{2}{p^2}$, $\alpha\beta = \frac{1}{p}$ 5 + 5

$$\frac{1}{(\alpha-1)} \cdot \frac{1}{(\beta-1)} = \frac{1}{(\alpha\beta - (\alpha+\beta) + 1)} \quad 5$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + 1}$$
$$= \frac{p^2}{p^2 + p + 2}. \quad 5$$

$\boxed{20}$

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{\beta}{\beta-1} = \frac{\alpha(\beta-1)+\beta(\alpha-1)}{(\alpha-1)\,(\beta-1)}$$

$$= \frac{2\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{(\alpha-1)\,(\beta-1)} \quad 5$$

$$= \left(\frac{2}{p} + \frac{2}{p^2}\right) \cdot \frac{p^2}{p^2+p+2} \quad 5$$

$$= \frac{2(p+1)}{p^2} \cdot \frac{p^2}{p^2+p+2}$$

$$= \frac{2(p+1)}{p^2+p+2} \quad 5$$

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{\beta}{\beta-1} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)\,(\beta-1)}$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \frac{p^2}{p^2+p+2}$$

$$= \frac{p}{p^2+p+2} . \quad 5$$

எனவே தேவையான இருபடிச் சமன்பாடு

$$x^2 - \frac{2(p+1)}{p^2+p+2}\,x + \frac{p}{p^2+p+2} = 0 \quad 10$$

$$\Rightarrow \quad (p^2+p+2)\,x^2 - 2\,(p+1)\,x + p = 0 \quad 5$$

$\boxed{35}$

மேலும் $\frac{\alpha}{(\alpha-1)}$, $\frac{\beta}{(\beta-1)}$ மெய்யானவை,

$$\frac{\alpha}{(\alpha-1)} + \frac{\beta}{(\beta-1)} = \frac{2(p+1)}{p^2+p+2} > 0, \; (\because \; p > 0) ,$$

$$5$$

$$\frac{\alpha}{(\alpha-1)} \cdot \frac{\beta}{(\beta-1)} = \frac{p}{p^2+p+2} > 0, \; (\because \; p > 0) .$$

எனவே இந்த இரண்டு மூலங்களும் நேரானவை 5

$\boxed{10}$

(b) $f(x) = x^2 + 2x^2 - dx + cd$

$(x-c)$ ஒரு காரணி ஆகையால் $f(c) = 0$. 5

$\Rightarrow c^3 + 2c^2 - dc + cd = 0$ 5

$\Rightarrow c^2\,(c+2) = 0$

$\Rightarrow c = -2 \quad (\because\ c \neq 0)$ 5

$f(x)$ இனை $(x-d)$, ஆல் வகுக்கும் போது மீதி cd எனவே

5 $f(d) = cd.$ 5

$\Rightarrow d^3 + 2d^2 - d^2 + cd = cd$

$\Rightarrow d^3 + d^2 = 0$

$\Rightarrow d^2\,(d+1) = 0$

$\Rightarrow d = -1 \quad (\because\ d \neq 0)$ 5

$\therefore\ c = -2, \quad d = -1.$

$\boxed{30}$

$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2.$

$f(x)$ இனை $(x+2)^2$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதி $Ax + B$ என்க

$f(x) \equiv (x+2)^2\,Q(x) + (Ax+B)$, இங்கு $Q(x)$ படி 1 உடைய பல்லுறுப்பி

$x^3 + 2x^2 + x + 2 \equiv (x+2)^2\,Q(x) + Ax + B.$ 5

$x = -2$, ஆக $0 = -2A + B.$ 5

வகையிடும் போது

$3x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2\,Q'(x) + 2Q(x)\,(x+2) + A.$ 5

மேலும் $x = -2$, ஆக

$12 - 8 + 1 = A$ 5

$\therefore\ A = 5, \quad B = 10$

எனவே மீதி $5x + 10$. 5

$\boxed{25}$

வேறு முறை

நீண்ட வகுத்தல் செய்முறையால்

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 2 \\
\hline
x^2 + 4x + 4 & x^3 + 2x^2 + x + 2 \\
 & \underline{x^3 + 4x^2 + 4x} \\
 & \quad -2x^2 - 3x + 2 \\
 & \quad \underline{-2x^2 - 8x - 8} \\
 & \qquad\qquad 5x + 10.
\end{array}
$$

15

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 \equiv (x^2 + 4x + 4)(x-2) + (5x + 10)$$

எனவே மீதி : $5x + 10$. 10

25

12. (a) P_1, P_2 ஆகியன முறையே $\{A, B, C, D, E, 1, 2, 3, 4\}$, $\{F, G, H, I, J, 5, 6, 7, 8\}$ ஆகியவற்றினால் தரப்படும் இரு தொடைகளெனக் கொள்வோம். $P_1 \cup P_2$ இலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 3 வெவ்வேறு எழுத்துகளையும் 3 வெவ்வேறு இலக்கங்களையும் கொண்டு 6 மூலகங்களைக் கொண்ட ஒரு கடவுச்சொல்லை உருவாக்க வேண்டியுள்ளது. பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் அமைக்கத்தக்க அத்தகைய வெவ்வேறு கடவுச்சொற்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க:

(i) எல்லா 6 மூலகங்களும் P_1 இலிருந்து மாத்திரம் தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றன.

(ii) 3 மூலகங்கள் P_1 இலிருந்தும் ஏனைய 3 மூலகங்கள் P_2 இலிருந்தும் தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றன.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+3)(r+4)}$ எனவும் $V_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+2)}$ எனவும் கொள்வோம்.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $V_r - V_{r+2} = 6U_r$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{5}{144} - \dfrac{(2n+5)}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$ எனக் காட்டுக.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $W_r = U_{2r-1} + U_{2r}$ எனக் கொள்வோம்.

$n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^{n} W_r = \dfrac{5}{144} - \dfrac{(4n+5)}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}$ என **உய்த்தறிக.**

இதிலிருந்து, முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ ஒருங்குகின்றதெனக் காட்டி, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(a) $P_1 = \{A, B, C, D, E, 1, 2, 3, 4\}$, $P_2 = \{F, G, H, I, J, 5, 6, 7, 8\}$

(i) P_1 இல் இருந்து 3 வெவ்வேறு எண்களையும் 3 வெவ்வேறு எழுத்துக்களையும் தெரிவு செய்வதற்கான வெவ்வேறு வகைகளின் எண்ணிக்கை $= {}^5C_3 \cdot {}^4C_3$ 10

எனவே P_1 இல் இருந்து 6 மூலங்களையும் தெரிவு செய்வதால் பெறப்படும் கடவுச்சொற்களின் எண்ணிக்கை $= {}^5C_3 \cdot {}^4C_3 \cdot 6!$ 5

$= 28800$ 5

20

(ii)

Different ways of selecting				Number of Passwords	
from P_1		from P_2			
Letters	Digits	Letters	Digits		
3	–	–	3	${}^5C_3 \cdot {}^4C_3 \cdot 6! = 28800$	10
2	1	1	2	${}^5C_2 \cdot {}^4C_1 \cdot {}^5C_1 \cdot {}^4C_2 \cdot 6! = 864000$	10
1	2	2	1	${}^5C_1 \cdot {}^4C_2 \cdot {}^5C_2 \cdot {}^4C_1 \cdot 6! = 864000$	10
–	3	3	–	${}^4C_3 \cdot {}^5C_3 \cdot 6! = 28800$	10

எனவே 3 மூலகங்களை P_1 இலிருந்தும் மற்றைய 3 மூலகங்களை P_2 இல் இருந்தும் தெரிவு செய்வதன் மூலம் பெறப்படும் கடவுச் சொற்களின் எண்ணிக்கை $= 28800 + 864000 + 864000 + 28800 = 1785600$

10

50

(*b*) $U_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+3)(r+4)}$, $V_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+2)}$; $r \in \mathbb{Z}^+$.

எனவே

$$V_r - V_{r+2} = \frac{1}{r(r+1)(r+2)} - \frac{1}{(r+2)(r+3)(r+4)}$$ 5

$$= \frac{(r+3)(r+4) - r(r+1)}{r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}$$

$$= \frac{6(r+2)}{r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}$$ 5

$$= 6U_r$$ 5

15

அவதானிக்குக

$r = 1;\quad 6U_1 = V_1 - \cancel{V_3},$

$r = 2;\quad 6U_2 = V_2 - \cancel{V_4},$ 10

$r = 3;\quad 6U_3 = \cancel{V_3} - V_5,$

$r = 4;\quad 6U_4 = \cancel{V_4} - V_6,$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$r = n-3;\quad 6U_{n-3} = V_{n-3} - \cancel{V_{n-1}}$

$r = n-2;\quad 6U_{n-2} = V_{n-2} - \cancel{V_n}$ 10

$r = n-1;\quad 6U_{n-1} = \cancel{V_{n-1}} - V_{n+1}$

$r = n;\quad 6U_n = \cancel{V_n} - V_{n+2}$

$$\therefore\ 6\sum_{r=1}^{n} U_r = V_1 + V_2 - V_{n+1} - V_{n+2} \quad 10$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$= \frac{5}{24} - \frac{2n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{5}{144} - \frac{2n+5}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \quad 10$$

$\boxed{40}$

$$W_r = U_{2r-1} + U_{2r}, \quad r \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} W_r = \sum_{r=1}^{n} (U_{2r-1} + U_{2r})$$

$$= \sum_{r=1}^{2n} U_r \quad 5$$

$$= \frac{5}{144} - \frac{4n+5}{6(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} W_r = \frac{5}{144} - \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)} \quad 5$$

$\boxed{10}$

அவதானிக்குக

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} W_r = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{144} - \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}\right) \quad 5$$

$$= \frac{5}{144} - \lim_{n\to\infty} \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{5}{144} \quad 5$$

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} W_r$ கூட்டுத்தொகை $\frac{5}{144}$ இற்கு ஒருங்கும், 5

$\boxed{15}$

---

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -a & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} b & -2 \\ -1 & b+1 \end{pmatrix}$ ஆகியன $\mathbf{AB}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாகத் தாயங்களெனக் கொள்வோம்; இங்கு $a, b \in \mathbb{R}$.

$a = 2,\ b = 1$ எனக் காட்டுக.

அத்துடன் $\mathbf{C}^{-1}$ **இருப்பதில்லை** எனவும் காட்டுக.

$\mathbf{P} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - 2\mathbf{I})$ எனக் கொள்வோம். $\mathbf{P}^{-1}$ ஐ எழுதி, $2\mathbf{P}(\mathbf{Q} + 3\mathbf{I}) = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{I}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாகத் தாயம் $\mathbf{Q}$ ஐக் காண்க; இங்கு $\mathbf{I}$ ஆனது வரிசை 2 இன் சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமாகும்.

(*b*) $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ எனக் கொள்வோம்.

(i) $\mathrm{Re}\, z \le |z|$ எனவும்

(ii) $z_2 \ne 0$ இற்கு $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ எனவும்

காட்டுக.

$z_1 + z_2 \ne 0$ இற்கு $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) \le \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|}$ என **உய்த்தறிக.**

$z_1 + z_2 \ne 0$ இற்கு $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) = 1$ ஐ வாய்ப்புப் பார்த்து,

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ இற்கு $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ எனக் காட்டுக.

(*c*) $\omega = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\, i\right)$ எனக் கொள்வோம்.

$1 + \omega$ ஐ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க; இங்கு $r(>0)$, $\theta\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ ஆகியன துணியப்பட வேண்டிய மாறிலிகள்.

த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $(1+\omega)^{10} + (1+\bar{\omega})^{10} = 243$ எனக் காட்டுக.

(*a*) $$AB^T = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -a \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-3 & a-4 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

5 10

$$AB^T = C \iff \begin{pmatrix} 2a-3 & a-4 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -2 \\ -1 & b+1 \end{pmatrix}$$

$\iff 2a - 3 = b,\quad a - 4 = -2$ and $a = b + 1.$ 10

$\iff a = 2, b = 1,$ இப் பெறுமானங்கள் எல்லாச் சமன்பாடுகளையும் திருப்தி செய்யும் 5

$\boxed{30}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$ 5

$\therefore C^{-1}$ இல்லை 5

10

வேறு முறை

C^{-1} : இருப்பதற்கு

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 5

ஆகுமாறு $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ உண்டு

$\Rightarrow p - 2r = 1, -p + 2r = 0, q - 2s = 0, \quad -q + 2s = 1$

இது முரண்பாடானது

$\therefore C^{-1}$ இல்லை 5

10

$$P = \frac{1}{2}(C - 2I) = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$ 5

$$\Rightarrow P^{-1} = 2\left(\frac{1}{-2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$ 10

$$2P(Q + 3I) = P - I$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(Q + 3I) = I - P^{-1}$$ 5

$$\therefore \quad 2(Q + 3I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ 5

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 3I$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}$$ 5

30

(b) $z,\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$.

(i) $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$. என்க

$\mathrm{Re}\, z = x \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ 5

(ii) $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ என்க

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\times(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\times(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\,\frac{[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]}{1}$$ 10

$$\therefore \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$ 5

$\boxed{20}$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right) \leq \left|\frac{z_1}{z_1+z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_1+z_2|}$$; $z_1 + z_2 \neq 0$ இற்கு

5 by (i) 5 by (ii)

$\boxed{10}$

$z_1 + z_2 \neq 0$ இற்கு

$$\frac{z_1}{z_1+z_2} + \frac{z_2}{z_1+z_2} = 1$$ 5

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_1+z_2} + \frac{z_2}{z_1+z_2}\right) = 1$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_1+z_2}\right) = 1$$ 5

$\boxed{10}$

$$\Rightarrow \quad 1 = \mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) \leq \left|\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right| \quad \text{by (i)} \quad 5$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1 + z_2|} \quad \text{by (ii)}$$

$$= \frac{|z_1| + |z_2|}{|z_1 + z_2|} \quad 5$$

$\Rightarrow \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad (\because |z_1 + z_2| > 0)$

$z_1 + z_2 = 0$, எனின்

$|z_1 + z_2| = 0 \leq |z_1| + |z_2|$

எனவே எல்லா $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. இற்கும் முடிவு உண்மை

10

(*c*) $\omega = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\, i)$

$1 + \omega = \sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{-1}{2}\right)\right] = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, 5

இங்கு $r = \sqrt{3}$, $\theta = -\frac{\pi}{6}$. 5

10

டிமோவரின் தேற்றத்தால் $(1 + \omega)^{10} = (\sqrt{3})^{10}\left[\cos(10\theta) + i\sin(10\theta)\right]$ 5

$1 + \overline{\omega} = \overline{1 + \omega} = \sqrt{3}(\cos\theta - i\sin\theta) = \sqrt{3}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$

$\Rightarrow (1 + \overline{\omega})^{10} = \left(\sqrt{3}\right)^{10}\left[(\cos(-10\theta) + i\sin(-10\theta)\right]$ 5

$\therefore (1 + \omega)^{10} + (1 + \overline{\omega})^{10} = \left(\sqrt{3}\right)^{10} \times 2\cos(10\theta)$ 5

$= 3^5 \times 2 \times \frac{1}{2}$

$= 243.$ 5

20

---

14. (*a*) $x \neq 3$ இற்கு $f(x) = \dfrac{9(x^2-4x-1)}{(x-3)^3}$ எனக் கொள்வோம்.

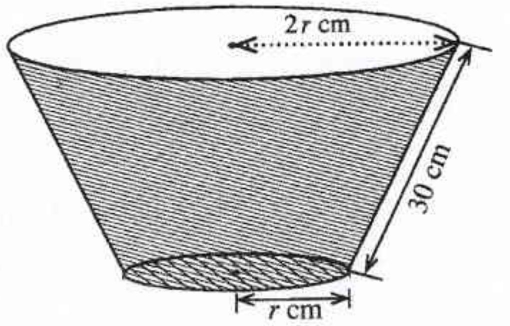
$x \neq 3$ இற்கு $f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $f'(x) = -\dfrac{9(x+3)(x-5)}{(x-3)^4}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

$y = f(x)$ இன் வரைபை அணுகுகோடுகள், y – வெட்டுத்துண்டு, திரும்பற் புள்ளிகள் ஆகியவற்றைக் காட்டிப் பருமப்படியாக வரைக.

$x \neq 3$ இற்கு $f''(x) = \dfrac{18(x^2-33)}{(x-3)^5}$ **எனத் தரப்பட்டுள்ளது.** $y = f(x)$ இன் வரைபின் விபத்திப் புள்ளிகளின் x – ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

(*b*) அருகே உள்ள உருவில் அடியைக் கொண்ட ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் அடித்துண்டின் வடிவத்தில் உள்ள ஒரு பேசின் காட்டப்பட்டுள்ளது. அதன் சாய்ந்த நீளம் 30 cm உம் மேல் வட்ட விளிம்பின் ஆரை அடியின் ஆரையின் இரு மடங்கும் ஆகும். அடியின் ஆரை r cm எனக் கொள்வோம். பேசினின் கனவளவு $V \text{ cm}^3$ ஆனது $0 < r < 30$ இற்கு $V = \dfrac{7}{3}\pi r^2 \sqrt{900 - r^2}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

பேசினின் கனவளவு உயர்ந்தபட்சமாக இருக்கத்தக்கதாக r இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



(*a*) $x \neq 3$ இற்கு $f(x) = \dfrac{9(x^2-4x-1)}{(x-3)^3}$

எனவே

$$f'(x) = 9\left[\frac{1}{(x-3)^3}(2x-4) - \frac{3(x^2-4x-1)}{(x-3)^4}\right] \quad 15$$

$$= 9\left[\frac{2x^2-10x+12-3(x^2-4x-1)}{(x-3)^4}\right]$$

$$= \frac{-9(x+3)(x-5)}{(x-3)^4} \quad \text{for } x \neq 3 \quad 10$$

$\boxed{25}$

கிடை அணுகுகோடுகள் : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \quad \therefore\ y = 0.$ 5

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \infty\ , \quad \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty.$

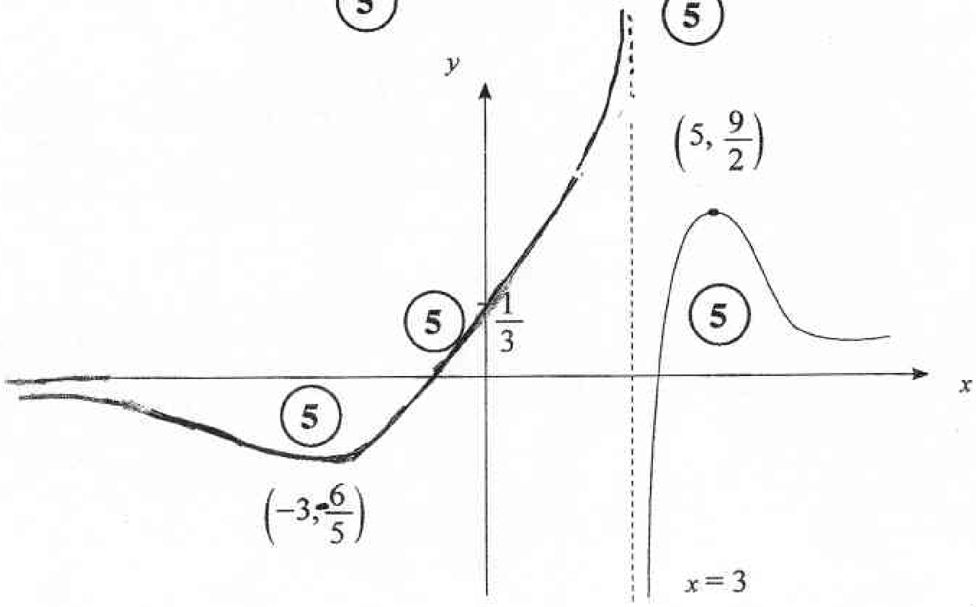
நிலைக்குத்து அணுகுகோடு : $x = 3.$ 5

திரும்பற் புள்ளிகளில் $f'(x) = 0. \Leftrightarrow x = -3\ , \quad x = 5.$ 5

	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < 3$	$3 < x < 5$	$5 < x < \infty$
sign of $f'(x)$	(–)	(+)	(+)	(–)
	5	5	5	5
$f(x)$ is	↘	↗	↗	↘

இரண்டு திரும்பற் புள்ளிகள் உண்டு : $\left(-3, -\frac{5}{6}\right)$ இழிவு $\left(5, \frac{9}{2}\right)$ உயர்வு

5 5



60

$x \neq 3$ இற்கு

$$f''(x) = \frac{18\,(x - \sqrt{33})\,(x + \sqrt{33})}{(x-3)^5}.$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \pm \sqrt{33}$. 5

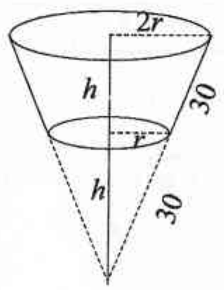
	$-\infty < x < -\sqrt{33}$	$-\sqrt{33} < x < 3$	$3 < x < \sqrt{33}$	$\sqrt{33} < x < \infty$
$f''(x)$ இன்குறி	(–)	(+)	(–)	(+)
குவிவு	கீழ்க்குவிவு	மேற்குவிவு	கீழ்க்குவிவு	மேற்குவிவு

10

எனவே x ஆள்கூறுகள்

$x = -\sqrt{33}$, $x = \sqrt{33}$ உள்ள இரண்டு விபத்திப் புள்ளிகள் உண்டு 5 **20**

(*b*)



$0 < r < 30$ இற்கு

$h = \sqrt{900 - r^2}$ 5

கன அளவு V பின்வருமாறு தரப்படும்

$$V = \frac{1}{3}\pi (2r)^2 \times 2h - \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad 5$$

$$= \frac{7}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{7}{3}\pi r^2 \sqrt{900 - r^2}. \quad 5$$

15

$0 < r < 30$ இற்கு

$$\frac{dV}{dr} = \frac{7}{3}\pi \left[2r\sqrt{900 - r^2} + r^2 \frac{(-2r)}{2\sqrt{900 - r^2}}\right] \quad 5$$

$$= \frac{7}{3}\pi \frac{[2r(900 - r^2) - r^3]}{\sqrt{900 - r^2}}$$

$$= 7\pi r \frac{(600 - r^2)}{\sqrt{900 - r^2}}. \quad 5$$

$$\frac{dV}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = 10\sqrt{6} \quad (\because r > 0) \quad 5$$

$0 < r < 10\sqrt{6}$ இற்கு $\frac{dV}{dr} > 0$, $r > 10\sqrt{6}$, இற்கு $\frac{dV}{dr} < 0$

5 5

$r = 10\sqrt{6}$ ஆகும்போது V உயர்வடையும் 5

30

---

15. (*a*) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ இற்குப் பிரதியீடு $x = 2\sin^2\theta + 3$ ஐப் பயன்படுத்தி, $\int_3^4 \sqrt{\frac{x-3}{5-x}}\,dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(*b*) பகுதிப் பின்னங்களைப் பயன்படுத்தி, $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ ஐக் காண்க.

$t > 2$ இற்கு $f(t) = \int_3^t \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ எனக் கொள்வோம்.

$t > 2$ இற்கு $f(t) = \ln(t-2) - \ln(t-1) + \ln 2$ என **உய்த்தறிக.**

பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி, $\int \ln(x-k)\,dx$ ஐக் காண்க; இங்கு k ஒரு மெய்ம் மாறிலி.

இதிலிருந்து, $\int f(t)\,dt$ ஐக் காண்க.

(*c*) a, b ஆகியன மாறிலிகளாக இருக்கும் சூத்திரம் $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ ஐப் பயன்படுத்தி

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x\cos^2 x}{1+e^x}\,dx$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(***a***) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$: இற்கு

$x = 2\sin^2\theta + 3 \Rightarrow dx = 4\sin\theta\cos\theta\ d\theta$ 5

$x = 3 \Leftrightarrow 2\sin^2\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$ 5

$x = 4 \Leftrightarrow 2\sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ 5

எனவே $\int_3^4 \sqrt{\frac{x-3}{5-x}}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2-2\sin^2\theta}} \cdot 4\sin\theta\cos\theta\ d\theta$ 5

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin^2\theta\ d\theta$ 5

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2\theta)\ d\theta$ 5

$= 2\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$ 5

$= \frac{\pi}{2} - 1$ 5

40

(*b*) $$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow 1 = A(x-2) + B(x-1) \text{ for } x \neq 1, 2.$$

x இன் வலுக்களின் குணங்களை ஒப்பிடுகையில்

$x^1 : \quad A + B = 0$ 5

$x^0 : \quad -2A - B = 1$ 5

$A = -1, \quad B = 1$ 5

எனவே $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int \frac{-1}{(x-1)}\,dx + \int \frac{1}{(x-2)}\,dx$ 10

$= \ln|x-2| - \ln|x-1| + C$; இங்கு C ஒரு எதேச்சை மாறிலி

5 + 5 + 5 **40**

$$f(t) = \int_3^t \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$$

$= (\ln|x-2| - \ln|x-1|)\Big|_3^t$ 5

$= \ln(t-2) - \ln(t-1) + \ln 2$ for $t > 2$. 5

10

$\displaystyle\int \ln(x-k)\,dx = x\ln(x-k) - \int \frac{x}{(x-k)}\,dx$ 5

$= x\ln(x-k) - \displaystyle\int 1\,dx - \int \frac{k}{(x-k)}\,dx$ 5

$= x\ln(x-k) - x - k\ln(x-k) + C$ 5

$= (x-k)\ln(x-k) - x + C$, இங்கு C ஒரு எதேச்சை மாறிலி **15**

$\displaystyle\int f(t)\,dt = \int \ln(t-2)\,dt - \int \ln(t-1)\,dt + \int \ln 2\,dt$ 5

$= (t-2)\ln(t-2) - t - \left[(t-1)\ln(t-1) - t\right] + t\ln 2 + D$

$= (t-2)\ln(t-2) - (t-1)\ln(t-1) + t\ln 2 + D$, இங்கு D ஒரு எதேச்சை மாறிலி

5 **10**

(c) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$, எனும் சூத்திரத்தை பிரயோகிக்க

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(-x)}{1+e^{-x}}\,dx \quad 5$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \cos^2 x}{1+e^x}\,dx \quad 5$$

$\boxed{10}$

$$2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x\cos^2 x}{1+e^x}\,dx \quad 5$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+e^x)\cos^2 x}{(1+e^x)}\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx \quad 5$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2x)\,dx \quad 5$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi} \quad 5$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x} = \frac{\pi}{2} \quad 5$$

$\boxed{25}$

---

16. $12x-5y-7=0,\ y=1$ என்னும் நேர்கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளி A இன் ஆள்கூறுகளை எழுதுக. இக்கோடுகளினால் ஆக்கப்படும் கூர்ங்கோணத்தின் இருகூறாக்கி l எனக் கொள்வோம். நேர்கோடு l இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

P ஆனது l மீது உள்ள ஒரு புள்ளியெனக் கொள்வோம். P இன் ஆள்கூறுகளை $(3\lambda+1,\ 2\lambda+1)$ என எழுதலாமெனக் காட்டுக; இங்கு $\lambda\in\mathbb{R}$.

$B\equiv(6,0)$ எனக் கொள்வோம். B, P ஆகிய புள்ளிகளை ஒரு விட்டத்தின் முனைகளாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டை $S+\lambda U=0$ என எழுதலாமெனக் காட்டுக; இங்கு $S\equiv x^2+y^2-7x-y+6,\ U\equiv-3x-2y+18$.

AB ஐ ஒரு விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு $S=0$ என **உய்த்தறிக.**

B இனூடாக, l இற்குச் செங்குத்தாக உள்ள நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $U=0$ எனக் காட்டுக.

எல்லா $\lambda\in\mathbb{R}$ இற்கும் சமன்பாடு $S+\lambda U=0$ ஐக் கொண்ட வட்டங்களின் மீது இருப்பதுவும் B இலிருந்து வேறுபட்டதுமான நிலைத்த புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$S=0$ இனால் தரப்படும் வட்டம் $S+\lambda U=0$ இனால் தரப்படும் வட்டத்திற்கு நிமிர்கோணமாக இருக்கத்தக்கதாக λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$12x-5y-7=0$ and $y=1 \Rightarrow x=1,\quad y=1$

$\therefore\ A\equiv(1,1)$ 10

10

இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளுக்கு

$$\frac{12x-5y-7}{13}=\pm\frac{(y-1)}{1} \quad 10$$

$\Rightarrow 12x-5y-7 = 13(y-1)$ or $12x-5y-7=-13(y-1)$

$\Rightarrow 2x-3y+1=0$ or $3x+2y-5=0$ 5 + 5

$y=1,\ 2x-3y+1=0,$ என்பவற்றுக்கு இடையிலான கோணம் θ இற்கு

$$\tan\theta=\left|\frac{\frac{2}{3}-0}{1+\frac{2}{3}(0)}\right|=\frac{2}{3}<1 \quad 5$$

$\therefore\ l:\ 2x-3y+1=0.$ 5

30

---

l இன் மீது புள்ளி (x, y) இற்கு

$$\frac{(x-1)}{3} = \frac{(y-1)}{2} = \lambda \text{ (say)}$$

$\Rightarrow x = 3\lambda + 1, \ \ y = 2\lambda + 1.$ 10

10

$\therefore \ P \equiv (3\lambda + 1, \ 2\lambda + 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

எனவே $B \equiv (6, 0)$ and $P \equiv (3\lambda + 1, \ 2\lambda + 1)$

BP ஐ விட்டமாக உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு

$(x-6)\ (x - (3\lambda + 1)) + (y - 0)\ (y - (2\lambda + 1)) = 0$ 10

i.e. $(x^2 + y^2 - 7x - y + 6) + \lambda\,(-3x - 2y + 18) = 0$ 5

இது $S + \lambda U = 0$, எனும் வடிவில் உள்ளது இங்கு $S \equiv x^2 + y^2 - 7x - y + 6, \ \ U \equiv -3x - 2y + 18$

5 5 25

$S = 0$ ஆக $\lambda = 0. \ \Rightarrow P = (1, 1) \equiv A.$ 5

எனவே AB ஐ விட்டமாக உள்ள வட்டத்தின் சமன்பாடு $S = O$ 5

10

---

l இன் சாய்வு $\frac{2}{3}$ ஆகையால் B இனூடாக செல்லும் l இற்கு செங்குத்தான கோட்டின் சமன்பாடு

$3x + 2y + \mu = 0, \ \mu$ துணியப்படவேண்டியது 10

இச்செவ்வணில் B இருப்பதால் $3x + 2y + \mu = 0$, ஆகவே $18 + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -18.$ 5

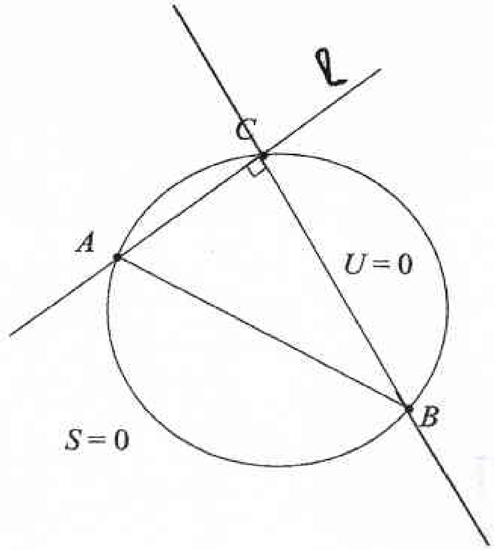
எனவே தேவையான சமன்பாடு $3x + 2y - 18 = 0$ 5

i.e. $U = -3x - 2y + 18 = 0.$

20

$\lambda \in \mathbb{R}$, இற்கு $S = 0, U = 0$ இடைவெட்டும் புள்ளியினூடாக $S + \lambda U = 0$ செல்லும் 10

இவற்றில் ஒரு புள்ளி B மற்றய புள்ளி C ஆனது l , $U = 0$ இடைவெட்டும் புள்ளி 10



C இன் ஆள்கூறுகளிற்கு

$$u \equiv -3x - 2y + 18 = 0$$

$$l \equiv 2x - 3y + 1 = 0,$$

$\Rightarrow \quad x = 4 \quad , \quad y = 3$

$\therefore \quad C \equiv (4, 3)$. 5

25

வட்டங்கள்

$S = 0 \quad , \quad S + \lambda U = 0$ ஆகியன நிமிர்கோணமானவை

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(-\frac{1}{2}(3\lambda + 7)\right)\left(-\frac{7}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}(2\lambda + 1)\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 6 + 18\lambda + 6$$ 15

$\Leftrightarrow \quad 13\lambda = 26$

$\Leftrightarrow \quad \lambda = 2.$ 5

20

---

17. (*a*) $\sin(A+B)$ ஐ $\sin A, \cos A, \sin B, \cos B$ ஆகியவற்றில் எழுதி, $\sin(A-B)$ இற்கு ஓர் இயல்பொத்த கோவையைப் பெறுக.

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B) \text{ எனவும்}$$

$$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B) \text{ எனவும்}$$

உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ இற்கு $2\sin 3\theta\cos 2\theta = \sin 7\theta$ ஐத் தீர்க்க.

(*b*) ஒரு முக்கோணி ABC இல் AC மீது புள்ளி D ஆனது $BD = DC$ ஆகவும் $AD = BC$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக உள்ளது. $B\hat{A}C = \alpha$ எனவும் $A\hat{C}B = \beta$ எனவும் கொள்வோம். உகந்த முக்கோணிகளுக்குச் சைன் நெறியைப் பயன்படுத்தி $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + 2\beta)$ எனக் காட்டுக.

$\alpha : \beta = 3 : 2$ எனின், மேலே (*a*) இல் உள்ள இறுதிப் பேறைப் பயன்படுத்தி $\alpha = \frac{\pi}{6}$ எனக் காட்டுக.

(*c*) $2\tan^{-1}x + \tan^{-1}(x+1) = \frac{\pi}{2}$ ஐத் தீர்க்க. **இதிலிருந்து,** $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$ எனக் காட்டுக.

(***a***) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ ——— 1 5

எனவே $\sin(A-B) = \sin(A + (-B))$ 5

$= \sin A\cos(-B) + \cos A\sin(-B)$

$\therefore \sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$ ——— 2 5

$\boxed{15}$

---

1 + 2 $\Rightarrow \sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B,$ 5

1 − 2 $\Rightarrow \sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B.$ 5

$\boxed{10}$

$\boxed{0 < \theta < \frac{\pi}{2}.}$

$2\sin 3\theta\cos 2\theta = \sin 7\theta,$

$\Leftrightarrow \sin 5\theta + \sin\theta = \sin 7\theta$ 5

$\Leftrightarrow \sin 7\theta - \sin 5\theta - \sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow \sin(6\theta + \theta) - \sin(6\theta - \theta) - \sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 6\theta\sin\theta - \sin\theta = 0$ 5

$\Leftrightarrow \sin\theta(2\cos 6\theta - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 6\theta = \frac{1}{2}$ since $0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \sin\theta > 0$

5 5

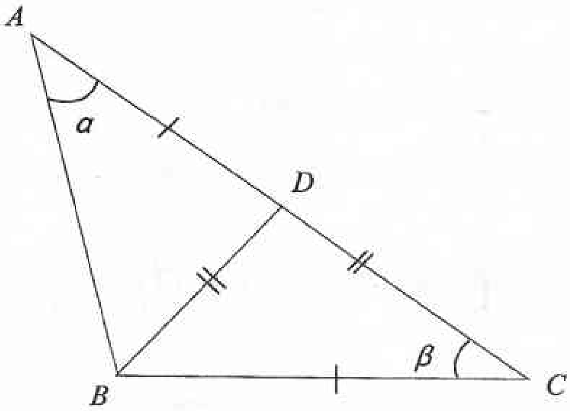
$$\Rightarrow 6\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \; ; \; n \in \mathbb{Z}. \quad 5$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{18} \; ; \; n \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \quad 5$$

30

(b)



அவதானிக்க

$C\hat{B}D = \beta, \; A\hat{D}B = 2\beta,$

$A\hat{B}D = \pi - (\alpha + 2\beta)$

சைன் விதியைப் பாவிப்போம்

முக்கோணி ABD, இற்கு

$$\frac{BD}{\sin B\hat{A}D} = \frac{AD}{\sin A\hat{B}D} \quad 10$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin (\pi - (\alpha + 2\beta))}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin (\alpha + 2\beta)} \quad 5 \quad \text{———— (1)}$$

முக்கோணி BDC, இற்கு

$$\frac{CD}{\sin D\hat{B}C} = \frac{BC}{\sin B\hat{D}C} \quad 10$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin 2\beta} \quad \text{———— (2)} \quad 5$$

$\because BD = DC$, $AD = BC$, (1) , (2) இல் இருந்து

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin (\alpha + 2\beta)}{\sin 2\beta} \quad 5$$

$\Rightarrow \quad 2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + 2\beta).$ 5

40

$\alpha : \beta = 3 : 2$, எனின்

$2\sin\alpha\cos\dfrac{2\alpha}{3} = \sin\dfrac{7\alpha}{3}$ 5

$\Rightarrow \quad 2\sin 3\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)\cos 2\left(\dfrac{\alpha}{3}\right) = \sin 7\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)$ 5

$\Rightarrow \quad \dfrac{\alpha}{3} = \dfrac{\pi}{18}, \dfrac{5\pi}{18}, \dfrac{7\pi}{18}.$

$\Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{15\pi}{18}, \dfrac{21\pi}{18}$ 5

$\because\ BC = AD < AC,\ \alpha$ கூர்ங்கோணம் ஆகையால்

$\therefore\ \alpha = \dfrac{\pi}{6}.$ 5

20

(c) $\quad 2\tan^{-1}x + \tan^{-1}(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$

$\alpha = \tan^{-1}(x), \quad \beta = \tan^{-1}(x+1)$ என்க. $\quad x \neq \pm 1$. இனை அவதானிக்க

$2\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}.$ 5

$\Leftrightarrow \quad 2\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \beta$

$\Leftrightarrow \quad \tan 2\alpha = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right)$ 5

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \cot\beta$ 5

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{2x}{1 - x^2} = \dfrac{1}{x+1}$ 5

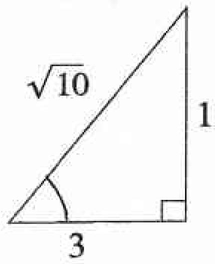
$\Leftrightarrow \quad 2x = 1 - x \quad (\because\ x \neq \pm 1)$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{3}.$

25

$2\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{\pi}{2}.$ ஆகும்

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$



$$\Rightarrow \cos\left(\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right) \quad 5$$

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad 5$$

$\boxed{10}$

அந்தரங்கமானது

NEW

இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்

க.பொ.த (உயர் தர)ப் பரீட்சை - 2019

10 - இணைந்தகணிதம்- II

புதிய பாடத்திட்டம்

புள்ளியிடும் திட்டம்

இந்த விடைத்தாள் பரீட்சகர்களின் உபயோகத்துக்காகத் தயாரிக்கப்பட்டது. பிரதம பரீட்சகர்களின் கலந்துரையாடல் நடைபெறும் சந்தர்ப்பத்தில் பரிமாறிக்கொள்ளும் கருத்துக்களுக்கிணங்க, இதில் உள்ள சில விடயங்கள் மாறலாம்.

இறுதித் திருத்தங்கள் உள்ளடக்கப்படவுள்ளன

முழுப்பதிப்புரிமையுடையது

க.பொ.த(உ.த) பரீட்சை - 2019

10 - இணைந்த கணிதம் II

புள்ளி வழங்கும் திட்டம்

புதிய பாடத்திட்டம்

பத்திரம் I

பகுதி : A = $10 \times 25 = 250$

பகுதி : B = $05 \times 150 = 750$

மொத்தம் $= 1000 / 10$

பத்திரம் **I** இறுதிப் புள்ளி $= 100$

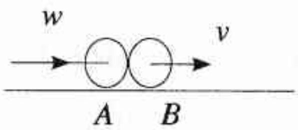
பகுதி A

1. ஒவ்வொன்றினதும் திணிவு m ஆகவுள்ள A, B, C என்னும் மூன்று துணிக்கைகள் அதே வரிசையில் ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது ஒரு நேர்கோட்டில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை B உடன் நேரடியாக மோதுமாறு துணிக்கை A இற்கு வேகம் u தரப்படுகிறது. துணிக்கை A உடன் மோதிய பின்னர் துணிக்கை B இயங்கித் துணிக்கை C உடன் நேரடியாக மோதுகின்றது. A இற்கும் B இற்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும். முதலாம் மோதுகைக்குப் பின்னர் B இன் வேகத்தைக் காண்க.

B இற்கும் C இற்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகமும் e ஆகும். B உடன் மோதிய பின்னர் C இன்
ாழுதுக.

$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$, இனை பிரயோகிக்க

A, B இற்கு ($1^{வது}$ (மொத்தல்)



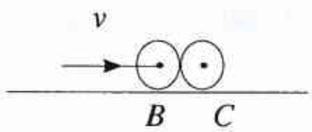
$$0 = mv + mw - mu \quad 5$$

$$\Rightarrow v + w = u \text{ ——— (i)}$$

நியூட்டனின் பரிசோதனை விதி :

$$v - w = eu \text{ ——— (ii)} \quad 5$$

$$\therefore \text{(i)} + \text{(ii)} \Rightarrow v = \frac{(1+e)}{2}u \quad 5$$



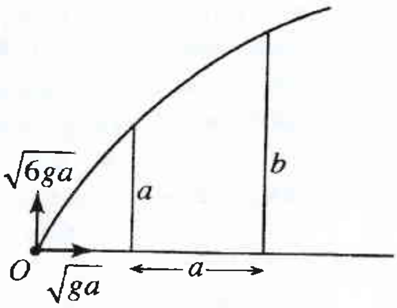
$1^{வது}$ மொத்தலின் பின் B இன் வேகம் $= \frac{1}{2}(1+e)\,u.$

u ஐ v ஆல் பிரதியிட, C இன் வேகம் $= \frac{1}{2}(1+e)\,v \quad 5$

$$= \frac{1}{4}(1+e)^2\,u \quad 5$$

25

2. கிடைக் கூறும் நிலைக்குத்துக் கூறும் முறையே $\sqrt{ga}$, $\sqrt{6ga}$ ஆகவுள்ள ஒரு வேகத்துடன் கிடை நிலத்தின் மீது உள்ள ஒரு புள்ளி O இலிருந்து ஒரு துணிக்கை எறியப்படுகின்றது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஒன்றிலிருந்தொன்று கிடைத் தூரம் a இல் இருக்கும் a, b ஆகிய உயரங்கள் உள்ள இரு நிலைக்குத்துச் சுவர்களுக்கு மட்டுமட்டாக மேலாகத் துணிக்கை செல்கின்றது. உயரம் a ஐ உடைய சுவரைக் கடந்து செல்லும்போது துணிக்கையின் வேகத்தின் நிலைக்குத்துக் கூறு $2\sqrt{ga}$ எனக் காட்டுக.
$b = \frac{5a}{2}$ எனவும் காட்டுக.

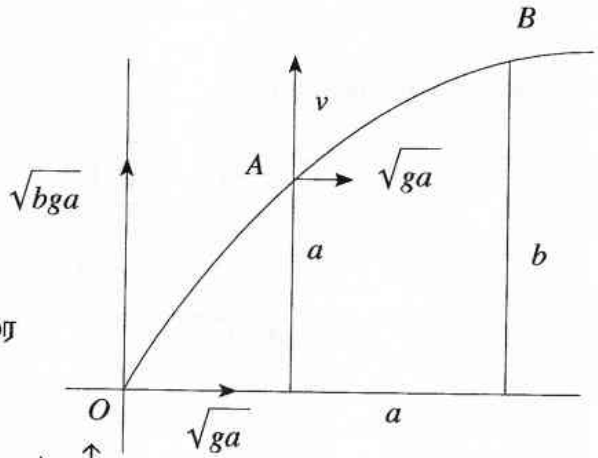


துணிக்கை a உயர சுவரை கிடைவேகம் v உடன் கடக்கிறது என்க

O இலிருந்து A க்கு $\uparrow$ $v^2 = u^2 + 2as$:

$v^2 = 6ga - 2g \cdot a = 4ga$ 5

$\therefore v = 2\sqrt{ga}$ 5



நேரம் T க்கு பின் அது இரண்டாவது சுவரை கடக்கும் எனின்

$s = ut + \frac{1}{2}at^2$ A இனை இலிருந்து B க்கு, $\rightarrow$, $\uparrow$,
ஆக பிரயோகிக்க

$a = \sqrt{ga} \cdot T,$ 5

$b - a = 2\sqrt{ga} \cdot T - \frac{1}{2} gT^2$ 5

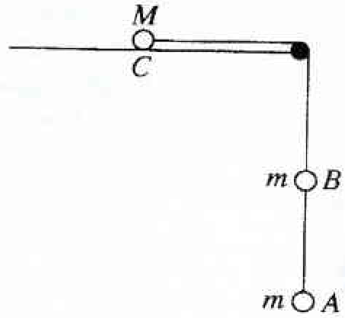
T ஐ நீக்க: $b - a = 2\sqrt{ga} \cdot \sqrt{\frac{a}{g}} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{a}{g}$

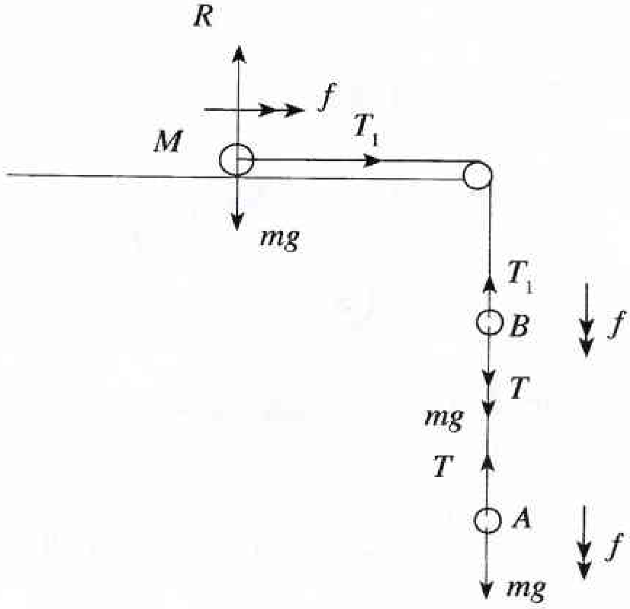
$\therefore b = a + 2a - \frac{a}{2}$

i.e. $b = \frac{5a}{2}$ 5

25

3. உருவில் A, B, C ஆகியன முறையே m, m, M திணிவுகள் உள்ள துணிக்கைகளாகும். A, B ஆகிய துணிக்கைகள் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது உள்ள துணிக்கை C ஆனது மேசையின் விளிம்பில் நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஓர் ஒப்பமான சிறிய கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் வேறோர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் B உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. எல்லாத் துணிக்கைகளும் இழைகளும் ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உள்ளன. இழைகள் இறுக்கமாக இருக்கத்தக்கதாகத் தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. A ஐயும் B ஐயும் தொடுக்கும் இழையின் இழுவையைத் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளை எழுதுக.





$\underline{F} = m\underline{a}$ ஐ பிரயோகிக்க

A, க்கு $\downarrow$ $\quad mg - T = mf$ 5

B, க்கு $\downarrow$ $\quad T + mg - T_1 = mf,$ 5

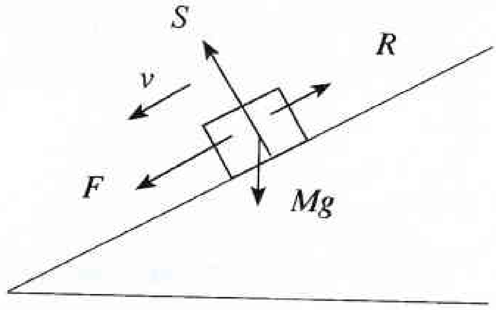
C, க்கு $\rightarrow$ $\quad T_1 = Mf$ 5

விசைகள் 5

ஆர்முடுகல்கள் 5

25

4. திணிவு M kg ஐயும் மாறா வலு P kW ஐயும் கொண்ட ஒரு கார் கிடையுடன் கோணம் α இற் சாய்ந்த ஒரு நேர் வீதி வழியே கீழ்நோக்கி இயங்குகின்றது. அதன் இயக்கத்திற்கு ஒரு மாறாத் தடை $R\,(>Mg\sin\alpha)$ N உள்ளது. ஒரு குறித்த கணத்தில் காரின் ஆர்முடுகல் a m s^{-2} ஆகும். இக்கணத்தில் காரின் வேகத்தைக் காண்க.
வீதி வழியே கார் கீழ்நோக்கி இயங்கத்தக்க மாறாக் கதி $\dfrac{1000P}{R-Mg\sin\alpha}$ m s^{-1} என **உய்த்தறிக.**



காரின் கதி $v\ ms^{-1}$ ஆக

உணற்று விசை $F = \dfrac{1000\,P}{v}$ 5

ஆர்முடுகல் $a\ ms^{-2}$ ஆக இருக்கும் போது

$\underline{F} = m\underline{a}$: இனை பிரயோகிக்க

$\swarrow$ $F + Mg\sin\alpha - R = Ma.$ 10

$$\Rightarrow \frac{1000\,P}{v} + Mg\sin\alpha - R = Ma$$

$$\therefore \quad v = \frac{1000\,P}{R - Mg\sin\alpha + Ma}$$ 5

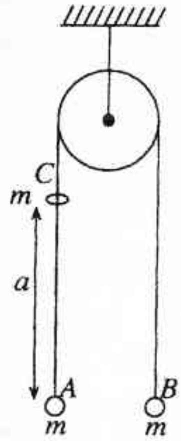
கார் மாறாத கதியுடன் நகரும் போது

$a = 0$ மாறாத கதியின் பெறுமானம்

$$v = \frac{1000\,P}{R - Mg\sin\alpha}.$$ 5

25

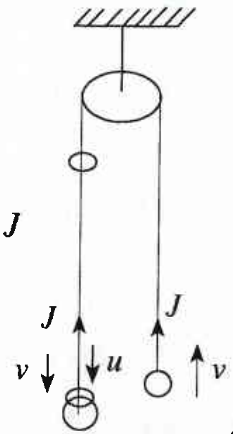
5. ஒவ்வொன்றும் திணிவு m ஐ உடைய A, B என்னும் இரு துணிக்கைகள் ஓர் ஒப்பமான நிலைத்த கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் இரு நுனிகளுடனும் இணைக்கப்பட்டு நாப்பத்தில் தொங்குகின்றன. A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே தூரம் a இல் உள்ள ஒரு புள்ளியில் ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படும் அதே திணிவு m ஐ உடைய ஒரு சிறிய மணி C புவியீர்ப்பின் கீழ்ச் சுயாதீனமாக இயங்கி A உடன் மோதி இணைகின்றது (உருவைப் பார்க்க). A இற்கும் C இற்குமிடையே மோதுகை நடைபெறும் கணத்தில் இழையின் கணத்தாக்கையும் மேற்குறித்த மோதுகைக்குச் சற்றுப் பின்னர் B பெறும் வேகத்தையும் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளை எழுதுக.



$v^2 = u^2 + 2as \downarrow$, இனை பிரயோகிக்க

a தூரம் விழுந்தபின் c இன் கதி

$u = \sqrt{2ga}$ 5



C, A இன் மொத்தல் கணத்தில் இழையின் கணத்தாக்கு J என்க

மொத்தலின் பின் B இன் கதி v என்க

5 for v.

$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ இனை பிரயோகிக்க

B க்கு $\uparrow$ $J = mv$. 5

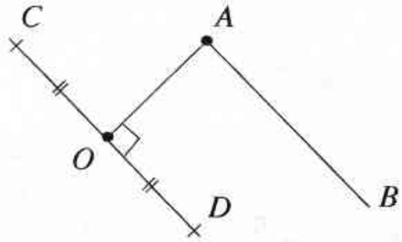
A, C க்கு : $\downarrow$ $-J = (m + m)\, v - mu$. 10

i.e $-J = 2mv - m\sqrt{2ga}$.

$\boxed{25}$

6. வழக்கமான குறிப்பீட்டில், ஒரு நிலைத்த உற்பத்தி O பற்றி A, B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $2\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $3\mathbf{i}-\mathbf{j}$ எனக் கொள்வோம். $A\hat{O}C = A\hat{O}D = \frac{\pi}{2}$ ஆகவும் $OC = OD = \frac{1}{3}AB$ ஆகவும் இருக்குமாறு C, D ஆகிய இரு வேறுவேறான புள்ளிகளின் தானக் காவிகளைக் காண்க.

அவதானிக்க



$\overrightarrow{OA} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}$

$\overrightarrow{OB} = 3\mathbf{i}-\mathbf{j}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$= -(2\mathbf{i}+\mathbf{j}) + (3\mathbf{i}-\mathbf{j})$

$= \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ 5

$\therefore AB = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\overrightarrow{OC} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ i என்க

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$, எனவே $(2\mathbf{i}+\mathbf{j}).(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}) = 0$

$\therefore y = -2x$ 5

$OC = \frac{1}{3}AB$, எனவே $\sqrt{x^2+4x^2} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$ 5

$\therefore \quad x^2 = \frac{1}{9}$.

இச் சமன்பாடுகள் D இன் ஆள் கூறுகளுக்கும் உண்மையானவை

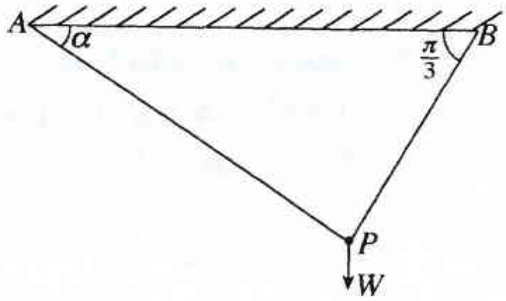
எனவே $x = \pm\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{array}\right\}$ 5 $\quad \left.\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{array}\right\}$ 5

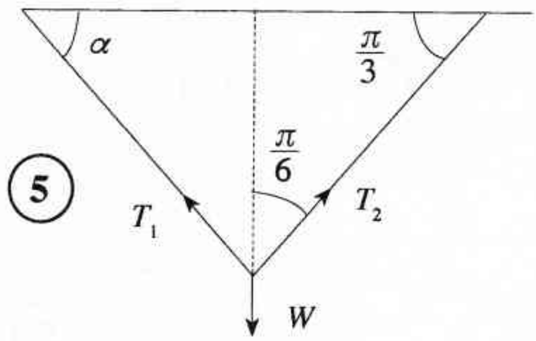
ஆகவே காவிகள் C , D என்பன $\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j}$, $-\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j}$. ஆகும்.

25

7. கிடையுடன் முறையே α , $\frac{\pi}{3}$ ஆகிய கோணங்களை ஆக்கும் AP, BP என்னும் இரு இலேசான நீட்டமுடியாத இழைகளினால் ஒரு கிடைச் சீலிங்கிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ள நிறை W ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளாறு நாப்பத்தில் உள்ளது. இழை AP இல் உள்ள இழுவையை W, α ஆகியவற்றிற் காண்க.
இதிலிருந்து, இவ்விழுவையின் இழிவுப் பெறுமானத்தையும் அதனை ஒத்த α இன் பெறுமானத்தையும் காண்க.



இலாமியின் தேற்றப்படி



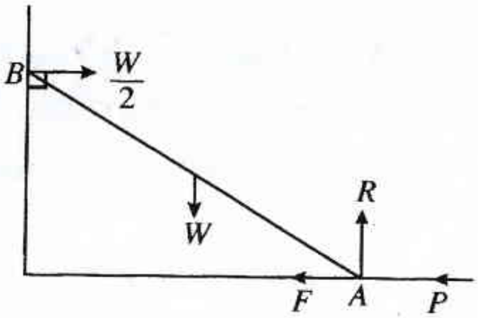
$$\frac{T_1}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{W}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\pi}{6}\right)} \quad 10$$

$$\therefore T_1 = \frac{W}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)} \quad 5$$

AP இல் இழுவை T_1 இன் இழிவு $= \frac{W}{2}$,

T_1 இன் இழிவுக்குரிய $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 5

25



8. நீளம் $2a$ ஐயும் நிறை W ஐயும் உடைய ஒரு சீரான கோல் AB அதன் முனை A ஒரு கரடான கிடை நிலத்தின் மீதும் முனை B ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கு எதிரேயும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. சுவருக்குச் செங்குத்தாக ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் கோல் நாப்பத்தில், முனை A இல் சுவரை நோக்கிப் பிரயோகிக்கப்படும் பருமன் P ஐ உடைய ஒரு கிடை விசையினால் பேணப்படுகின்றது. உருவில் F உம் R உம் முறையே A இல் உள்ள உராய்வு விசையையும் செவ்வன் மறுத்தாக்கத்தையும் குறிக்கின்றன. B இல் சுவரின் மூலம் உண்டாக்கப்படும் மறுதாக்கம் உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு $\frac{W}{2}$ அத்துடன் கோலிற்கும் நிலத்திற்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{4}$ எனின், $\frac{W}{4} \le P \le \frac{3W}{4}$ எனக் காட்டுக.

கோலின் சமநிலைக்கு

$$\uparrow \; R - W = 0. \quad 5$$

$$\leftarrow \; P + F - \frac{W}{2} = 0. \quad 5$$

$$\therefore \; F = \frac{W}{2} - P \quad 5$$

$$\because \; |F| \le \mu R, \quad 5$$

எனவே

$$\left|\frac{W}{2} - P\right| \le \frac{1}{4} W$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} W \le \frac{W}{2} - P \le \frac{1}{4} W$$

$$\Rightarrow -\frac{W}{4} \le P \le \frac{3W}{4} \quad 5$$

25

9. A, B ஆகியன ஒரு மாதிரி வெளி Ω இன் இரு நிகழ்ச்சிகளெனக் கொள்வோம். வழக்கமான குறிப்பீட்டில், $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$, $P(A' \cap B) = \frac{1}{10}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $P\,(B)$, $P(A' \cap B')$ ஆகியவற்றைக் காண்க; இங்கு A', B' ஆகியன முறையே A, B ஆகியவற்றின் நிரப்பு நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கின்றன.

$$P(B) = P\Big((A \cap B) \cup (A' \cap B)\Big) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) \quad 5$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{10}.$$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{2}. \quad 5$$

$$P(A' \cap B') = P\left((A \cup B)'\right)$$

$$= 1 - P(A \cup B) \quad 5$$

$$= 1 - [\,P(A) + P(B) - P(A \cap B)\,] \quad 5$$

$$= 1 - [\frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5}]$$

$$= 1 - \frac{7}{10}$$

$$\therefore P(A' \cap B') = \frac{3}{10} \quad 5$$

25

10. ஒவ்வொன்றும் 5 இலும் குறைந்த ஐந்து நேர் நிறையெண்களுக்கு இரு ஆகாரங்கள் இருக்கும் அதே வேளை அவற்றில் ஒன்று 3 ஆகும். அவற்றின் இடை, இடையம் ஆகிய இரண்டும் 3 இற்குச் சமம். இவ்வைந்து நிறையெண்களையும் காண்க.

இடையம் 3 ஐயும் இரு வேறு வேறான ஆகாரங்களை கொண்ட ஐந்தை விட குறைவான ஐந்து எண்கள் பின்வரும் இரு வழிகளில் ஏறுவரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தப்படலாம்

$a, a, 3, 3, 4$ (5)

$b, 3, 3, 4, 4$ (5)

இடை 3 என்பதால் அவற்றின் கூட்டுத் தொகை 15

எனவே , $2a + 10 = 15$; $a = \frac{5}{2}$, # (5)

அல்லது $b + 14 = 15$; $b = 1$. (5)

$\therefore$ ஐந்து எண்கள் 1, 3, 3, 4, 4 (5)

$\boxed{25}$

பகுதி B

※ **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

(இவ்வினாத்தாளில் g ஆனது புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகலைக் குறிக்கின்றது.)

11. (*a*) P, Q என்னும் இரு கார்கள் ஒரு நேர் வீதி வழியே மாறா ஆர்முடுகல்களுடன் ஒரே திசையில் இயங்குகின்றன. நேரம் $t = 0$ இல் P இன் வேகம் $u\text{ m s}^{-1}$ உம் Q இன் வேகம் $(u+9)\text{ m s}^{-1}$ உம் ஆகும். P இன் மாறா ஆர்முடுகல் $f\text{ m s}^{-2}$ உம் Q இன் மாறா ஆர்முடுகல் $\left(f+\frac{1}{10}\right)\text{ m s}^{-2}$ உம் ஆகும்.

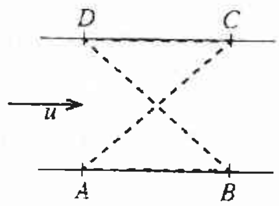
(i) $t \geq 0$ இற்கு P, Q ஆகியவற்றின் இயக்கங்களுக்கு ஒரே வரிப்படத்திலும்

(ii) $t \geq 0$ இற்கு P தொடர்பாக Q இன் இயக்கத்திற்கு வேறொரு வரிப்படத்திலும்

வேக - நேர வரைபுகளைப் பரும்படியாக வரைக.

நேரம் $t = 0$ இல் கார் P ஆனது கார் Q இலும் பார்க்க 200 மீற்றர் முன்னால் இருக்கின்றதென மேலும் தரப்பட்டுள்ளது. Q ஆனது P ஐக் கடந்து செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

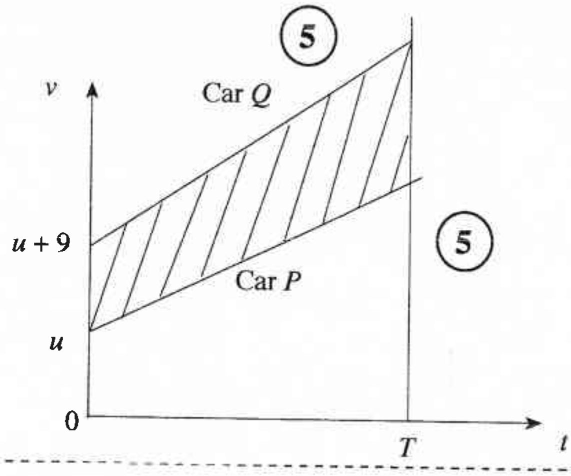
(*b*) சமாந்தரமான நேர்க் கரைகள் உள்ள அகலம் a ஐ உடைய ஓர் ஆறு சீரான வேகம் u உடன் பாய்கின்றது. உருவில் கரைகளின் மீது உள்ள A, B, C, D என்னும் புள்ளிகள் ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகளாகும். நீர் தொடர்பாக மாறாக் கதி $v\,(> u)$ உடன் இயங்கும் B_1, B_2 என்னும் இரு படகுகள் ஒரே கணத்தில் A இலிருந்து அவற்றின் பயணங்களை ஆரம்பிக்கின்றன. படகு B_1 முதலில் $\overrightarrow{AC}$ வழியே C இற்குச் சென்று பின்னர் திசை $\overrightarrow{CD}$ இல் ஆறு வழியே எதிர்ப்போக்கில் D இற்குச் செல்கின்றது. படகு B_2 முதலில் திசை $\overrightarrow{AB}$ இல் ஆறு வழியே அதன் போக்கில் B இற்குச் சென்று பின்னர் $\overrightarrow{BD}$ வழியே D இற்குச் செல்கின்றது. ஒரே உருவில் B_1 இன் A இலிருந்து C வரைக்கும் B_2 இன் B இலிருந்து D வரைக்குமான இயக்கங்களுக்கு வேக முக்கோணிகளைப் பரும்படியாக வரைக.



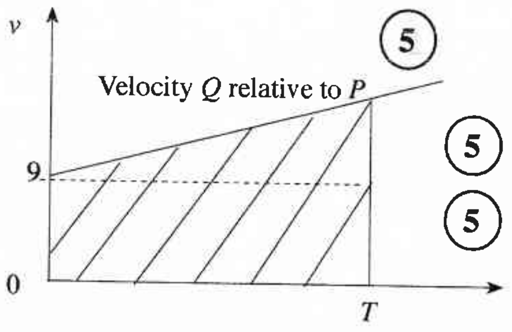
இதிலிருந்து, A இலிருந்து C இற்கான இயக்கத்தில் படகு B_1 இன் கதி $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2v^2-u^2}+u\right)$ எனக் காட்டி, B இலிருந்து D இற்கான இயக்கத்தில் படகு B_2 இன் கதியைக் காண்க.

B_1, B_2 ஆகிய இரு படகுகளும் ஒரே கணத்தில் D ஐ அடையுமென மேலும் காட்டுக.

(*a*)



10



5 $\underline{v}(Q, P) = (u+9) - u = 9.$

5 $\underline{a}(Q, P) = (f + \frac{1}{10}) - f = \frac{1}{10}.$

15

$t = 0$, இல்கார் P, Q ஐ விட 200 m முன்னால் உள்ளது

இரு வரைபுகளிலும் நிழற்றப்பட்ட பரப்பு $= 200.$ 5

Q இற்கு P ஐ முந்த எடுக்கும் நேரம் T என்க

$\therefore \ \frac{1}{2} T \left(9 + 9 + \frac{1}{10} T\right) = 200$ 10 5

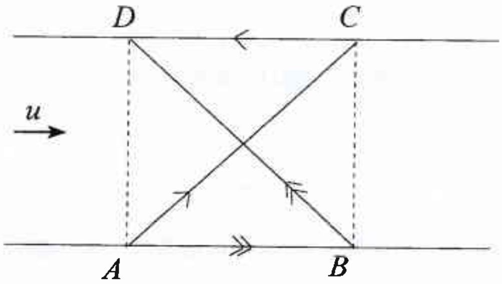
$\Rightarrow \quad T^2 + 180\,T - 4000 = 0$ 5

$\Rightarrow \quad (T - 20)(T + 200) = 0$

$T > 0$, ஆகவே $T = 20$. 5

25

(b)



அவதானிக்க

$\mathbf{V}(B_1, E) = \nearrow \frac{\pi}{4}$, 5 $\quad \mathbf{V}(B_2, E) = \frac{\pi}{4} \nwarrow$ 5

$\mathbf{V}(W, E) = \rightarrow U$, 5

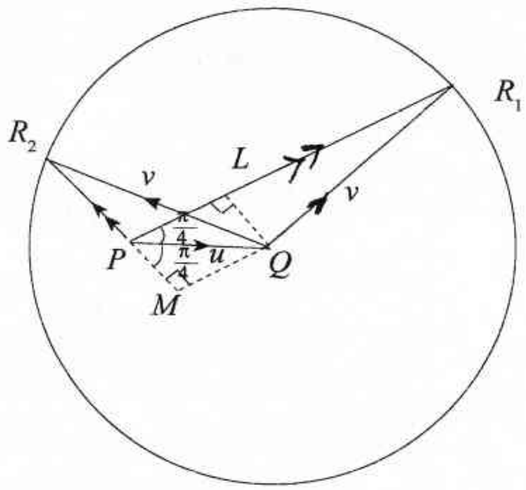
$\mathbf{V}(B_i, W) = v$, for $i = 1, 2$.

$\mathbf{V}(B_i, E) = \mathbf{V}(B_i, W) + \mathbf{V}(W, E)$ 10

$= \mathbf{V}(W, E) + \mathbf{V}(B_i, W)$

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_i} \quad i = 1, 2$

$= \overrightarrow{PR_i}\ , \quad i = 1, 2$



15 + 15

55

$\Delta\ PQR_1$, இல்

$PR_1 = PL + LR_1$

$= \frac{u}{\sqrt{2}} + \sqrt{v^2 - \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{2v^2 - u^2} + u\right]$ 10

A இலிருந்து C க்கு B_1 இன் கதி $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2v^2 - u^2} + u\right)$

In $\Delta\ PQR_2$, இல்

$$PR_2 = MR_2 - MP = \sqrt{v^2 - \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{u}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2v^2 - u^2} - u\right) \quad 10$$

20

$\overrightarrow{AC}$ வழிலேயும் பின்னர் $\overrightarrow{CD}$ வழியேயும் ஆன B_1 இன் இயக்கத்துக்கான நேரம்

$$T_1 = \frac{a\sqrt{2}}{PR_1} + \frac{a}{v-u} \cdot \quad 5$$

$\overrightarrow{AB}$ வழியேயும் பின்னர் $\overrightarrow{BD}$ வழியேயும் ஆன B_2 இன் இயக்கத்துக்கான நேரம்

$$T_2 = \frac{a}{v+u} + \frac{a\sqrt{2}}{PR_2} \quad 5$$

$$T_2 = \frac{a}{v+u} + \frac{a\sqrt{2}}{PR_2} \quad 5$$

$$T_2 - T_1 = a\sqrt{2}\left(\frac{1}{PR_2} - \frac{1}{PR_1}\right) - a\left(\frac{1}{v-u} - \frac{1}{v+u}\right) \quad 5$$

$$= a\sqrt{2}\left(\frac{PR_1 - PR_2}{PR_1 \,.\, PR_2}\right) - \frac{2au}{v^2 - u^2}$$

$$= \frac{a\sqrt{2}\,.\sqrt{2}\,u}{\frac{1}{2}\left[(2v^2 - u^2) - u^2\right]} - \frac{2au}{v^2 - u^2} \quad 5$$

$$= \frac{2au}{v^2 - u^2} - \frac{2au}{v^2 - u^2}$$

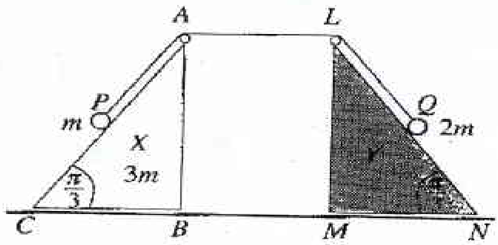
$$= 0. \quad 5$$

எனவே படகுகள் B_1, B_2 தங்களுடைய இலக்கு D ஐ ஒரே நேரத்தில் அடையும்

25

---

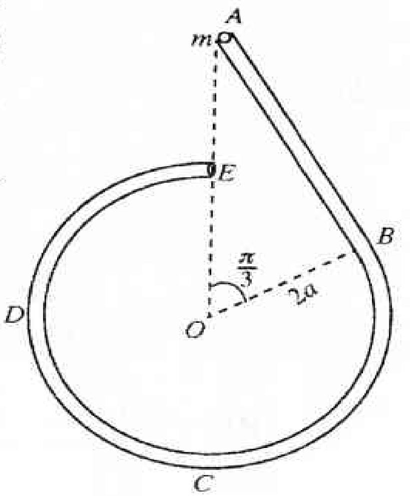
12. (a) உருவில் ABC, LMN ஆகிய முக்கோணிகள் $A\hat{C}B = L\hat{N}M = \frac{\pi}{3}$, $A\hat{B}C = L\hat{M}N = \frac{\pi}{2}$ ஆகவுள்ள BC, MN ஆகியவற்றைக் கொண்ட முகங்கள் ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்தின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ள முறையே X, Y என்னும் இரு ஒப்பமான சீரான சர்வசம ஆப்புகளின் புவியீர்ப்பு மையங்களினூடாக உள்ள நிலைக்குத்துக் குறுக்கு வெட்டுகளாகும். திணிவு $3m$ ஐ உடைய ஆப்பு X ஆனது நிலத்தின் மீது சுயாதீனமாக இயங்கத்தக்கதாக இருக்கும் அதே வேளை ஆப்பு Y **நிலைப்படுத்தி** வைக்கப்பட்டுள்ளது. AC, LN ஆகிய கோடுகள் உரிய முகங்களின் அதியுயர் சரிவுக் கோடுகளாகும். A, L ஆகியவற்றில் நிலைப்படுத்தப்பட்ட இரு ஒப்பமான சிறிய கப்பிகளுக்கு மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்ட முடியாத இழையின் இரு நுனிகளுடன் முறையே m, $2m$ என்னும் திணிவுகளை உடைய P, Q என்னும் துணிக்கைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு தொடக்க அமைவில் இழை இறுக்கமாக இருக்க $AP = AL = LQ = a$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக P, Q ஆகிய துணிக்கைகள் முறையே AC, LN ஆகியவற்றின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளன. தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. X ஆனது Y ஐ அடைய எடுக்கும் நேரத்தை a, g ஆகியவற்றில் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக.



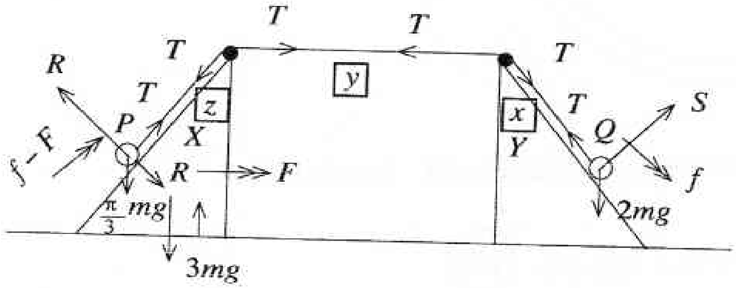
(b) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஓர் ஒடுங்கிய ஒப்பமான குழாய் $ABCDE$ ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. நீளம் $2\sqrt{3}a$ ஐ உடைய பகுதி AB நேராக இருக்கும் அதே வேளை அது B இல் ஆரை $2a$ ஐ உடைய வட்டப் பகுதி $BCDE$ இற்குத் தொடலியாக இருக்கின்றது. A, E ஆகிய முனைகள் மையம் O இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே உள்ளன. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது A இல் குழாயினுள்ளே வைக்கப்பட்டு ஓய்விலிருந்து மெதுவாக விடுவிக்கப்படுகின்றது. $\overrightarrow{OA}$ உடன் கோணம் $\theta\left(\frac{\pi}{3} < \theta < 2\pi\right)$ ஐ $\overrightarrow{OP}$ ஆக்கும்போது துணிக்கை P இன் கதி v ஆனது $v^2 = 4ga(2-\cos\theta)$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டி, அக்கணத்தில் துணிக்கை P மீது குழாயினால் ஆக்கப்படும் மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

துணிக்கை P இன் A இலிருந்து B இற்கான இயக்கத்தில் அதன் மீது குழாயினால் ஆக்கப்படும் மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

துணிக்கை P ஆனது B ஐக் கடக்கும்போது துணிக்கை P மீது குழாயினால் ஆக்கப்படும் மறுதாக்கம் சடுதியாக மாறுகின்றதெனக் காட்டுக.



(a)



விசைகள் 15

ஆர்முடுகல்கள் 20

$x + y + z =$ மாறிலி

$\Rightarrow \ddot{x} + \ddot{y} + \ddot{z} = 0$

$\Rightarrow -\ddot{z} = \ddot{x} - (-\ddot{y})$

$= f - F$

Acc of (P, X) $=$ f ↗

Acc of (X, E) $=$ $\twoheadrightarrow F$

$\therefore$ Acc of (P, E) $=$ $\twoheadrightarrow F +$ f ($\frac{\pi}{3}$)

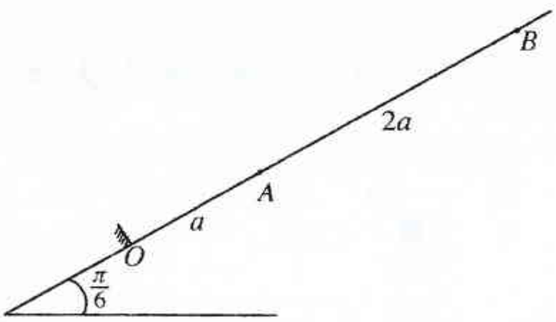
Acc of (Q, E) $=$ f ($\frac{\pi}{3}$) , $(\because$ Y is fixed.)

$\mathbf{F} = ma$ இனை பிரயோகிக்க

X துணிக்கை P இன் இயக்கத்துக்கு;

$\rightarrow T = 3mF + m(F + \frac{f}{2})$ 15

13. கிடையுடன் கோணம் $\frac{\pi}{6}$ இற் சாய்ந்த ஓர் ஒப்பமான நிலைத்த தளத்தின் ஓர் அதியுயர் சரிவுக் கோட்டின் மீது O ஆனது ஆகவும் கீழே உள்ள புள்ளியாக இருக்க O, A, B ஆகிய புள்ளிகள் அதே வரிசையில் $OA = a$ ஆகவும் $AB = 2a$ ஆகவும் இருக்குமாறு உள்ளன. இயற்கை நீளம் a ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு mg ஐயும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி புள்ளி O உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை மற்றைய நுனி திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை P ஆனது புள்ளி B ஐ அடையும் வரைக்கும் இழை கோடு OAB வழியே இழுக்கப்படுகின்றது. அதன் பின்னர் துணிக்கை P ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. B இலிருந்து A வரைக்கும் P இன் இயக்கச் சமன்பாடானது $0 \le x \le 2a$ இற்கு $\ddot{x} + \frac{g}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right) = 0$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக; இங்கு $AP = x$ ஆகும்.



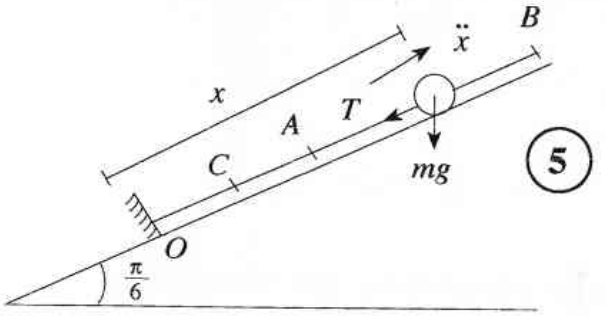
$y = x + \frac{a}{2}$ எனக் கொண்டு மேற்குறித்த இயக்கச் சமன்பாட்டினை $\frac{a}{2} \le y \le \frac{5a}{2}$ இற்கு வடிவம் $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ இல் மறுபடியும் எழுதுக; இங்கு $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$.

மேற்குறித்த எளிய இசை இயக்கத்தின் மையத்தைக் கண்டு சூத்திரம் $\dot{y}^2 = \omega^2 (c^2 - y^2)$ ஐப் பயன்படுத்தி வீச்சம் c ஐயும் A ஐ அடையும்போது P இன் வேகத்தையும் காண்க.

O ஐ அடையும்போது P இன் வேகம் $\sqrt{7ga}$ எனக் காட்டுக.

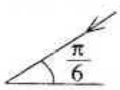
B இலிருந்து O இற்கு இயங்குவதற்கு P எடுக்கும் நேரம் $\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + 2k\right\}$ எனவும் காட்டுக; இங்கு $k = \sqrt{7} - \sqrt{6}$.

துணிக்கை P ஆனது O ஐ அடையும்போது அது தளத்திற்குச் செங்குத்தாக O இல் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஓர் ஒப்பமான தடுப்புடன் மோதுகின்றது. P இற்கும் தடுப்புக்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும். $0 < e \le \frac{1}{\sqrt{7}}$ எனின், பின்னர் நிகழும் P இன் இயக்கம் எளிய இசை **இயக்கமன்று** எனக் காட்டுக.



5

P இன் இயக்கச் சமன்பாடு : $\underline{F} = m\underline{a}$ ↙ ;



$$T - mg\frac{1}{2} = m(-\ddot{x}) \text{ --- (i)}$$ 10

$$T = mg\left(\frac{x}{a}\right) \text{ --- (ii)}$$ 5

$$\text{(i) , (ii)} \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{g}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right) = 0, \quad 0 \le x \le 2a.$$

5

$\boxed{25}$

$y = x + \frac{a}{2}$, $\ddot{y} = \ddot{x}$, என எழுதின் 5

$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$, $\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{5a}{2}$, 5

இங்கு $\omega^2 = \frac{g}{a}$.

10

எழிமை இசை இயக்கத்தின் மையம் C ஆனது $\ddot{x} = 0$. i.e. $y = 0$ or $x = \frac{-a}{2}$. 5 + 5

$OC = \frac{a}{2}$, ஆகுமாறு OA இல் புள்ளி C உள்ளது (OA இன் நடுப்புள்ளி)

வீச்சம் c :

$\dot{y}^2 = \omega^2(c^2 - y^2)$, இங்கு $\omega^2 = \frac{g}{a}$.

$y = \frac{5a}{2}$ (at B). ஆக $\dot{y} = 0$ 5

$\therefore 0 = \omega^2\left(c^2 - \left(\frac{5a}{2}\right)^2\right) \Rightarrow c = \frac{5a}{2}$. 5

பொருள் A ஐ அடையும் போது கதி v என்க

A இல் $y = \frac{a}{2}$, $u^2 = \frac{g}{a}\left(\left(\frac{5a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)$. 5 + 5

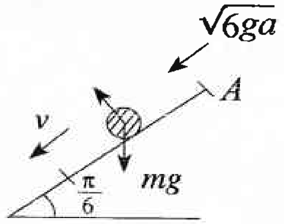
$\Rightarrow u = \sqrt{6ga}$. 5

35

<u>A இலிருந்து O க்கு P இன் இயக்கம்</u>

இயக்கம் தளத்தில் புவியீர்ப்பின் கீழ் உள்ளது

$v^2 = u^2 + 2fs$: ஐ பிரயோகிக்க



$\swarrow$ $v^2 = 6ga + 2\left(\frac{a}{2}\right) . a$ 5

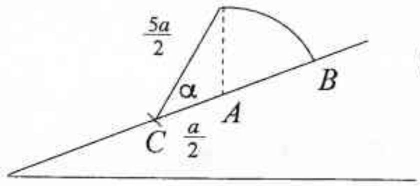
$\therefore v^2 = 7ga$

$\therefore v = \sqrt{7ga}$ 5

10

எழிமை இசை இயக்கத்தின் இன் கீழ் B இலிருந்து A ஐ அடைய P எடுத்துக் கொண்ட நேரம்

$wt_1 = \alpha$. 5 எனவே $\cos\alpha = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{5a}{2}} = \dfrac{1}{5}$. 5



5

$\therefore t_1 = \sqrt{\dfrac{a}{g}}\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)\right)$. 5

A யிலிருந்து O க்கு செல்ல எடுத்த நேரம்

$v = u + at$: இனை பிரயோகிக்க 5

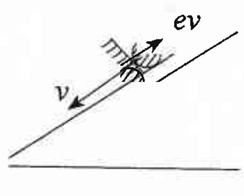
$\swarrow \sqrt{7ga} = \sqrt{6ga} - \dfrac{g}{2}t_2$

$\therefore t_2 = 2\sqrt{\dfrac{a}{g}}\,(\sqrt{7} - \sqrt{6})$ 5 $= 2k\sqrt{\dfrac{a}{g}}$, இங்கு $k = \sqrt{7} - \sqrt{6}$.

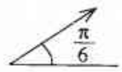
B இலிருந்து O க்கு மொத்த நேரம் 5

$t_1 + t_2 = \sqrt{\dfrac{a}{g}}\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + 2k\right)$, இங்கு: $k = \sqrt{7} - \sqrt{6}$.

35



O இலுள்ள அழுத்தமான தடுப்பை தாக்கிய உடன் P இன் வேகம் 5
$ev = e\sqrt{7gh}$



துணிக்கையின் தொடர்ந்து வரும் இயக்கம் எழிமை இசை இயக்கமாய் இராது

$0 < z \leq a$, இங்கு z ஆனது புவியீர்ப்பின் கீழ் தளத்தில் மேல் நோக்கி சென்ற தூரம் எனின் 10

$v^2 = u^2 + 2as$ இனை பிரயோகிக்க

$\nearrow\ 0 = (ev)^2 - 2\left(\frac{g}{2}\right)z$ 5

5

$\Rightarrow z = 7e^2a$

இங்கு, $0 < z \leq a$

$\Leftrightarrow 0 < 7e^2a \leq a$ 5

$\Leftrightarrow 0 < e \leq \dfrac{1}{\sqrt{7}}$. 5

35

14. (a) $OACB$ ஓர் இணைகரம் எனவும் D ஆனது AC மீது $AD:DC=2:1$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளி எனவும் கொள்வோம். O பற்றி A, B ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ஆகும்; இங்கு $\lambda > 0$ ஆகும். $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{BD}$ ஆகிய காவிகளை $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda$ ஆகியவற்றில் எடுத்துரைக்க.

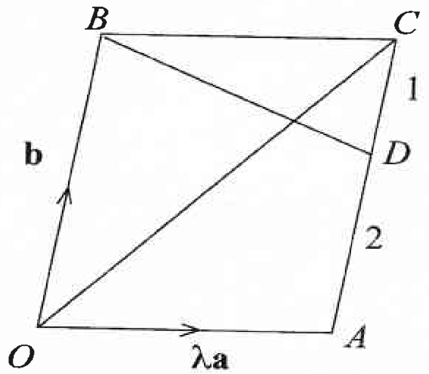
இப்போது $\overrightarrow{OC}$ ஆனது $\overrightarrow{BD}$ இற்குச் செங்குத்தானதெனக் கொள்வோம். $3|\mathbf{a}|^2\lambda^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\lambda - |\mathbf{b}|^2 = 0$ எனக் காட்டி, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ ஆகவும் $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ ஆகவும் இருப்பின், λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) மையம் O ஆகவும் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $2a$ ஆகவும் உள்ள ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி $ABCDEF$ இன் தளத்தில் உள்ள மூன்று விசைகளை ஒரு தொகுதி கொண்டுள்ளது. உற்பத்தி O இலும் Ox-அச்சு $\overrightarrow{OB}$ வழியேயும் Oy-அச்சு $\overrightarrow{OH}$ வழியேயும் இருக்க விசைகளும் அவற்றின் தாக்கப் புள்ளிகளும் வழக்கமான குறிப்பீட்டில் கீழேயுள்ள அட்டவணையிற் காட்டப்பட்டுள்ளன; இங்கு H ஆனது CD இன் நடுப்புள்ளியாகும். (P நியூற்றனிலும் a மீற்றரிலும் அளக்கப்படுகின்றன.)

தாக்கப் புள்ளி	தானக் காவி	விசை
A	$a\mathbf{i} - \sqrt{3}a\mathbf{j}$	$3P\mathbf{i} + \sqrt{3}P\mathbf{j}$
C	$a\mathbf{i} + \sqrt{3}a\mathbf{j}$	$-3P\mathbf{i} + \sqrt{3}P\mathbf{j}$
E	$-2a\mathbf{i}$	$-2\sqrt{3}P\mathbf{j}$

தொகுதி ஓர் இணைக்குச் சமவலுவுள்ளதெனக் காட்டி, இணையின் திருப்பத்தைக் காண்க.
இப்போது $\overrightarrow{FE}$ வழியே தாக்கும் பருமன் $6P$ N ஐ உடைய ஒரு மேலதிக விசை இத்தொகுதியில் புகுத்தப்படுகின்றது. புதிய தொகுதி ஒடுங்கும் தனி விசையின் பருமன், திசை, தாக்கக் கோடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

(a)



5

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$ 5

$\overrightarrow{OC} = \lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$= \lambda\mathbf{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ 5

$\overrightarrow{BD} = \lambda\mathbf{a} + -\frac{1}{3}\mathbf{b}$

$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{BD}$, ஆதலால் அவற்றின் எண்ணிப்பெருக்கம் $= 0$ 5

$\Rightarrow (\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\lambda\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{b}) = 0$

$\lambda^2|\mathbf{a}|^2 + (1 - \frac{1}{3})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\lambda - \frac{1}{3}|\mathbf{b}|^2 = 0$ 5 $(\because \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$

$\Rightarrow 3\lambda^2|\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\lambda - |\mathbf{b}|^2 = 0$ 5

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ என தரப்பட்டுள்ளது.

$\Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\frac{\pi}{3}$ 5

$= \frac{1}{2}|\mathbf{a}|^2$

மேலுள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$3|\mathbf{a}|^2\lambda^2 + 2\,.\frac{1}{2}|\mathbf{a}|^2\lambda - |\mathbf{a}|^2 = 0$

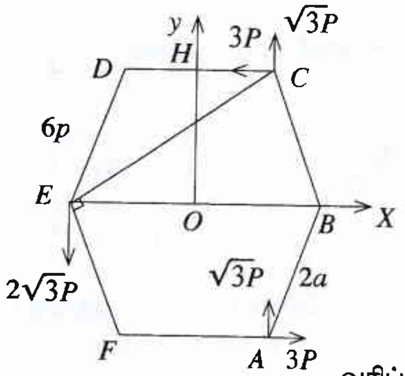
$3\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ 5

$\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2}$

$\lambda > 0$ ஆதலால் $\lambda = \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$. 5

$\boxed{50}$

(b)



தாக்கப்புள்ளிகளின தானக்காவிகள்

$\overrightarrow{OA} = a\mathbf{i} - \sqrt{3}\,a\mathbf{j}$

$\overrightarrow{OC} = a\mathbf{i} + \sqrt{3}\,a\mathbf{j}$

$\overrightarrow{OE} = -2a\mathbf{i}$

வரிப்படத்திற்கு 15

O இல் தொகுதியை ஒடுக்க

$\rightarrow X = 3P - 3P = 0$ 10

$\uparrow Y = \sqrt{3}P + \sqrt{3}P - 2\sqrt{3}P = 0$ 10

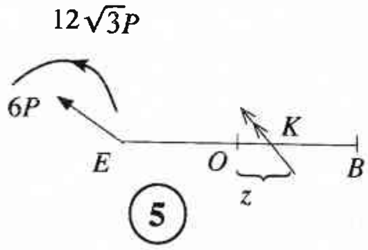
$M \neq 0$ ஆயின் தொகுதி ஒரு இணைக்கு சமவலுவானது

$O \circlearrowleft\ 2\times 3P\,.\,a\sqrt{3}P + 2a\sqrt{3}P + (2a)\,.\,2\sqrt{3}P = M = 12a\sqrt{3}P \circlearrowleft$

இணை $M \neq 0$ இன் 20

திருப்பம் இடஞ்சுழியாக $12a\sqrt{3}P$ ஆகும் 5 + 5

$\boxed{65}$



பருமன் $= 6P$ 5

திசை = $\frac{\pi}{3}$ 5

5

$K \circlearrowleft$

$-6P \times (2a+z)\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 12a\sqrt{3}P = 0$ 10

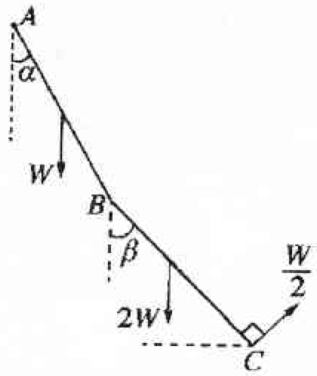
$\Rightarrow z = 2a$ 5

புதிய தொகுதி $\overrightarrow{BC}$ வழியே தாக்கும் ஒரு தனி விசைக்கு ஒருங்கும் 5

$\boxed{35}$

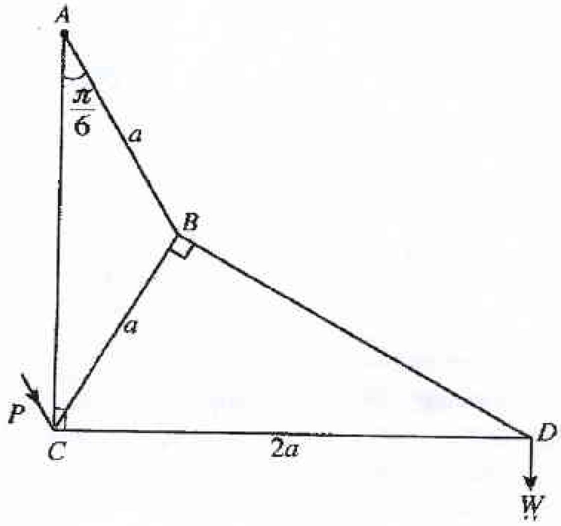
---

15. (*a*) ஒவ்வொன்றும் நீளம் $2a$ ஐ உடைய AB, BC என்னும் இரு சீரான கோல்கள் B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. கோல் AB இன் நிறை W உம் கோல் BC இன் நிறை $2W$ உம் ஆகும். முனை A ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. AB, BC ஆகிய கோல்கள் கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் முறையே α, β என்னும் கோணங்களை ஆக்கிக்கொண்டிருக்க இத்தொகுதி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு C இல் BC இற்குச் செங்குத்தான ஒரு திசையில் பிரயோகிக்கும் ஒரு விசை $\frac{W}{2}$ இனால் நாப்பத்தில் வைத்திருக்கப்படுகின்றது. $\beta = \frac{\pi}{6}$ எனக் காட்டி, மூட்டு B இல் கோல் AB ஆனது கோல் BC மீது உஞற்றும் மறுதாக்கத்தின் கிடைக் கூறையும் நிலைக்குத்துக் கூறையும் காண்க.



$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{9}$ எனவும் காட்டுக.

(*b*) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டப்படல் அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட AB, BC, BD, DC, AC என்னும் ஐந்து இலேசான கோல்களைக் கொண்டுள்ளது. இங்கு $AB = CB = a$, $CD = 2a$, $B\hat{A}C = \frac{\pi}{6}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. சட்டப்படல் A இல் ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. மூட்டு D இல் ஒரு சுமை W தொங்கவிடப்பட்டு, AC நிலைக்குத்தாகவும் CD கிடையாகவும் இருக்க மூட்டு C இல் கோல் AB இற்குச் சமாந்தரமாக உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ள திசையில் பிரயோகிக்கும் ஒரு விசை P இனால் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சட்டப்படல் நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி D, B, C ஆகிய மூட்டுகளுக்கு ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக.



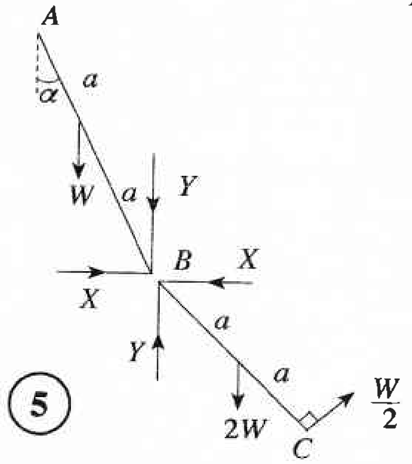
இதிலிருந்து

(i) இழுவைகளா, உதைப்புகளா என எடுத்துரைத்து ஐந்து கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புகளையும்

(ii) P இன் பெறுமானத்தையும்

காண்க.

(*a*)



5

BC க்கு B பற்றி திருப்பம் எடுக்க

$B \circlearrowright \quad \frac{W}{2}(2a) = 2W.\, a\sin\beta$ 10

$\Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{1}{2}. \quad \therefore \quad \beta = \frac{\pi}{6}.$ 5 + 5

BCக்கு

$\longleftarrow \quad X = \frac{W}{2}.\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{4}W.$ 5

$\uparrow \quad BC$க்கு $Y = 2W - \frac{W}{2}\sin\beta$ 5

$= \frac{7}{4}W.$ 5

40

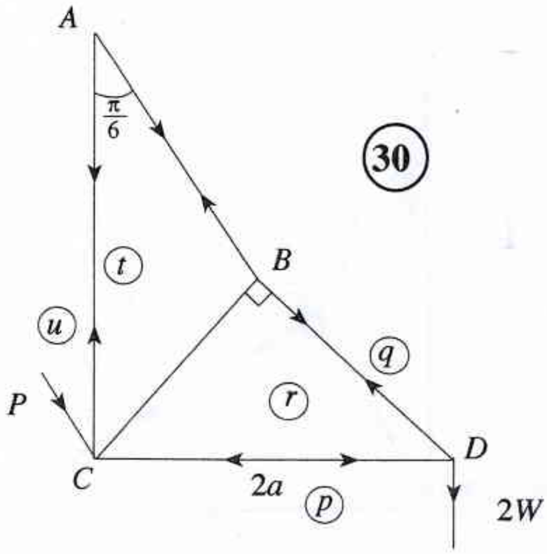
$A \circlearrowleft \quad X \,.\, 2a\cos\alpha - Y\,2a\sin\alpha - W\,a\sin\alpha = 0$ (10)

$\Rightarrow \quad \sqrt{3}\cos\alpha = 9\sin\alpha.$ (5)

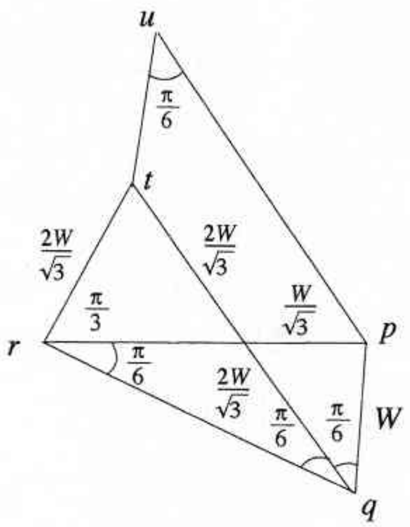
$\Rightarrow \quad \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{9}.$ (5)

20

(b)



(30)



Rod	Tension	Thrust
AB	$\frac{4W}{\sqrt{3}}$	–
BC	$\frac{2W}{\sqrt{3}}$	–
AC	W	–
BD	$2W$	–
CD	–	$\sqrt{3}\,W$

(50)

$P = pr = \dfrac{4W}{\sqrt{3}}$ (10)

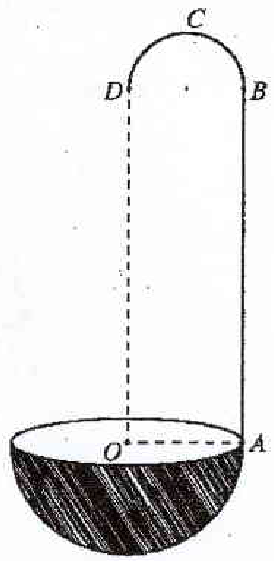
90

---

16. (i) ஆரை a ஐ உடைய ஒரு சீரான மெல்லிய அரைவட்டக் கம்பியின் திணிவு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து $\frac{2a}{\pi}$ தூரத்திலும்

(ii) ஆரை a ஐ உடைய ஒரு சீரான மெல்லிய அரைக்கோள ஓட்டின் திணிவு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து $\frac{a}{2}$ தூரத்திலும்

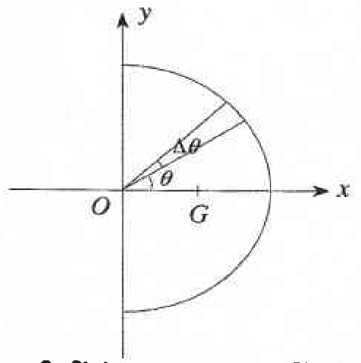
இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.



மையம் O ஐயும் ஆரை $2a$ ஐயும் உடைய ஒரு சீரான மெல்லிய அரைக்கோள ஓட்டுடன் உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு நீளம் $2\pi a$ ஐ உடைய ஒரு நேர்ப் பகுதி AB ஐயும் விட்டம் BD ஆனது AB இற்குச் செங்குத்தாக இருக்குமாறு ஆரை a ஐ உடைய ஓர் அரைவட்டப் பகுதி BCD ஐயும் கொண்ட ஒரு சீரான கம்பியினால் செய்யப்படும் ஒரு மெல்லிய கைப்பிடி $ABCD$ ஐ விறைப்பாகப் பொருத்துவதன் மூலம் ஒரு கரண்டி செய்யப்பட்டுள்ளது. புள்ளி A ஆனது அரைக்கோளத்தின் விளிம்பு மீது இருக்கும் அதே வேளை OA ஆனது AB இற்குச் செங்குத்தாகவும் OD ஆனது AB இற்குச் சமாந்தரமாகவும் உள்ளன. மேலும் BCD ஆனது $OABD$ இன் தளத்தில் அமைந்துள்ளது. அரைக்கோளத்தின் அலகுப் பரப்பளவின் திணிவு σ உம் கைப்பிடியின் அலகு நீளத்தின் திணிவு $\frac{a\sigma}{2}$ உம் ஆகும். கரண்டியின் திணிவு மையம் OA இற்குக் கீழே தூரம் $\frac{2}{19\pi}\left(8\pi - 2\pi^2 - 1\right)a$ இலும் O இனூடாகவும் D இனூடாகவும் செல்லும் கோட்டிலிருந்து தூரம் $\frac{5}{19}a$ இலும் உள்ளதெனக் காட்டுக.

கரண்டி ஒரு கரடான கிடை மேசை மீது அரைக்கோள மேற்பரப்பு அதனுடன் தொடுகையுறுமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. அரைக்கோள மேற்பரப்புக்கும் மேசைக்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{7}$ ஆகும். $\overrightarrow{AO}$ இன் திசையிலே A இற் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு கிடை விசையினால் OD நிலைக்குத்தாக இருக்கக் கரண்டி நாப்பத்தில் வைத்திருக்கப்படலாமெனக் காட்டுக.

(i) அரை வட்ட கம்பி



சமச்சீரின் படி புவியீர்ப்பு மையம் G, இன் Ox அச்சில் இருக்கும்

$\Delta m = a\Delta\theta\rho$, இங்கு P அலகு நீளத்துக்கான திணிவு

$OG = \bar{x}$, எனின்

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\rho a\cos\theta \, d\theta}{\int_{0}^{\pi/2} a\rho \, d\theta} \quad 10$$

$$= \frac{a\sin\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}{\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}} \quad 5$$

$$= \frac{2a}{\pi} \quad 5$$

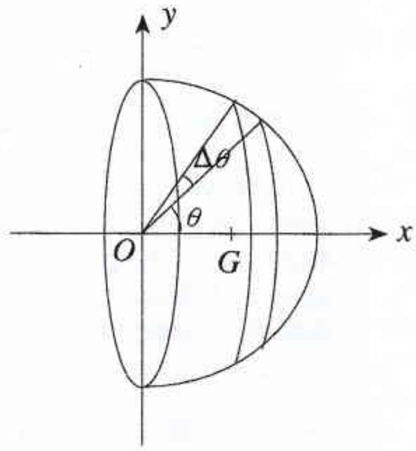
எனவே திணிவுமையம் O இலிருந்து $\frac{2a}{\pi}$ தூரத்திலிருக்கும் $\boxed{25}$

(ii) <u>அரைக்கோள ஓடு</u>

சமச்சீரின்படி, திணிவுமையம் G ஆனது Ox அச்சில் இருக்கும் 5

$\Delta m = 2\pi\,(a\sin\theta)\,a\rho\theta.\sigma$ இங்கு

σ அலகு பரப்புக்கான திணிவு ஆகும்



$OG = \bar{x}$, எனின்

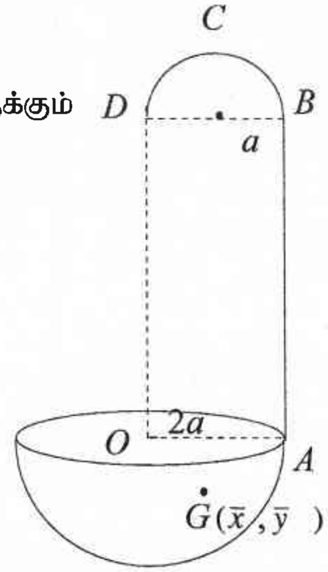
$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi(a\sin\theta)\,a\,\sigma a\cos\theta\,d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi(a\sin\theta)\,a\sigma\,d\theta}$$ 10

$$= \frac{\left.\dfrac{a\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}}{\left.-\cos\theta\right|_0^{\frac{\pi}{2}}}$$ 5 + 5

$$= \frac{a}{2}.$$ 5

எனவே, திணிவு மையம் O இலிருந்து $\frac{a}{2}$ தூரத்திலிருக்கும் $\boxed{30}$

$G(\bar{x}, \bar{y})$ அத்துடன்
Ox அச்சு OA வழியேயும் Oy அச்சு OD வழியேயும் இருக்கும் என்க.



Object	Mass	Distance from OD ($\rightarrow$)	Distance from OA ($\downarrow$)
நேர்ப் பகுதி AB	$\pi a^2 \sigma$ 5	$2a$	πa 5
அரைவட்டப் பகுதி BCD	$\frac{\pi a^2 \sigma}{2}$ 5	a	$2\pi a + \frac{2a}{\pi}$ 5
அரைக்கோள ஓடு	$8\pi a^2 \sigma$ 5	0	$-a$ 5
கரண்டி	$\frac{19\pi a^2 \sigma}{2}$ 5	$\bar{x}$	$\bar{y}$

$$\frac{19\pi a^2 \sigma}{2}\ \bar{y} = \pi a^2 \sigma . \pi a + \frac{\pi a^2 \sigma}{2}\left(2\pi a + \frac{2a}{\pi}\right) + 8\pi a^2 \sigma(-a) \quad 10$$

$$\frac{19\pi}{2}\ \bar{y} = -8\pi a + 2\pi a + a \quad 5$$

$$\therefore\ \bar{y} = \frac{-2}{19\pi}(8\pi - 2\pi^2 - 1)a$$

$\therefore$ கரண்டியின் திணிவுமையம் OAக்கு கீழ்

$\frac{2}{19\pi}(8\pi - 2\pi^2 - 1)\ a$ என்ற தூரத்தில் இருக்கும்

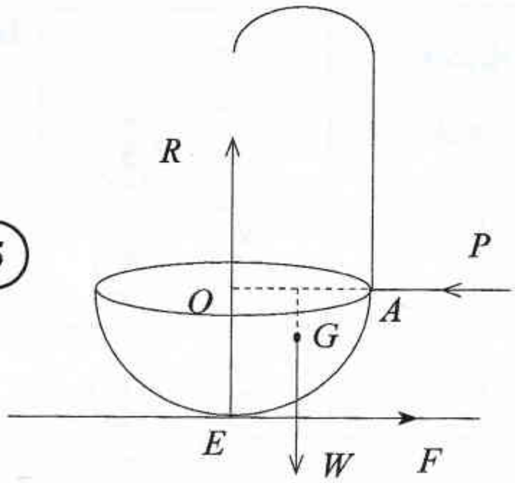
$$\frac{19\pi a^2 \sigma}{2}\ \bar{x} = \pi a^2 \sigma .\ 2a + \frac{\pi a^2 \sigma}{2}\ .\ a + 8\pi a^2 \sigma . 0 \quad 10$$

$$\therefore\ \frac{19}{2}\bar{x} = 2a + \frac{a}{2} = \frac{5a}{2}$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{5a}{19} \quad 5$$

$\therefore$ கரண்டியின் திணிவுமையம் OD இலிருந்து $\frac{5a}{19}$ என்ற தூரத்திலிருக்கும்

65



$\rightarrow \; F = P$ 5

$\uparrow \; R = W$ 5

$E \curvearrowleft \quad P \times 2a = W \times \frac{5}{19} a$ 5

$\therefore \; P = \frac{5}{38} W.$

$\Rightarrow \; F = \frac{5}{38} W.$ 5

$\therefore \; \frac{F}{R} = \frac{5}{38}$ 5

$\therefore \quad > \frac{F}{R}$ 5

எனவே கரண்டியை சமநிலையில் வைத்திருக்க முடியும்

30

17. (*a*) தொடக்கத்தில் ஒவ்வொன்றும் வெள்ளை நிறமாக அல்லது கறுப்பு நிறமாக உள்ள, நிறங்களில் தவிர எல்லா விதத்திலும் சர்வசமனான 3 பந்துகள் ஒரு பெட்டியில் உள்ளன. இப்போது நிறத்தைத் தவிர பெட்டியில் உள்ள பந்துகளுக்கு எல்லா விதத்திலும் சர்வசமனான ஒரு வெள்ளை நிறப் பந்து பெட்டியில் இடப்பட்டுப் பின்னர் பெட்டியிலிருந்து ஒரு பந்து எழுமாற்றாக வெளியே எடுக்கப்படுகின்றது. பெட்டியில் உள்ள பந்துகளின் தொடக்கச் சேர்க்கைகளின் நான்கு இயல்தகவுகளும் சம சந்தர்ப்பமானவை என எடுத்துக்கொண்டு,

(i) வெளியே எடுத்த பந்து வெள்ளைப் பந்தாக,

(ii) வெளியே எடுத்த பந்து வெள்ளைப் பந்தெனத் தரப்படும்போது தொடக்கத்தில் பெட்டியில் செப்பமாக 2 கறுப்பு நிறப் பந்துகள் இருப்பதற்கான

நிகழ்தகவைக் காண்க.

(*b*) μ, σ ஆகியன முறையே பெறுமானத் தொடை $\{x_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ இன் இடையும் நியம விலகலும் ஆகுமெனக் கொள்வோம். பெறுமானத் தொடை $\{\alpha x_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ இன் இடையையும் நியம விலகலையும் காண்க; இங்கு α ஒரு மாறிலி.

ஒரு குறித்த கம்பனியின் 50 தொழிலாளர்களின் மாதச் சம்பளங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் பொழிப்பாக்கப்பட்டுள்ளன:

மாதச் சம்பளம் (ஆயிரம் ரூபாயில்)	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
5 – 15	9
15 – 25	11
25 – 35	14
35 – 45	10
45 – 55	6

50 தொழிலாளர்களினதும் மாதச் சம்பளங்களின் இடையையும் நியம விலகலையும் மதிப்பிடுக.

ஓர் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் ஒவ்வொரு தொழிலாளரினதும் மாதச் சம்பளம் $p\%$ இனால் அதிகரிக்கப்படுகின்றது. மேற்குறித்த 50 தொழிலாளர்களினதும் புதிய மாதச் சம்பளங்களின் இடை ரூ. 29 172 எனத் தரப்பட்டுள்ளது. p இன் பெறுமானத்தையும் 50 தொழிலாளர்களினதும் புதிய மாதச் சம்பளங்களின் நியம விலகலையும் மதிப்பிடுக.

(*a*) E_i என்பது i எண்ணிக்கையுடைய வெள்ளைப் பந்துகளை கொண்ட பெட்டி என்க

$i = 0, 1, 2, 3.$

எனின் $P(E_i) = \frac{1}{4}$ for $i = 0, 1, 2, 3$

W என்பது எழுந்தமானமாக எடுக்கப்பட்ட பந்து வெள்ளையாய் இருக்கும் நிகழ்வு என்க

எனின்

(i) $$P(W) = \sum_{i=0}^{3} P(W \mid E_i)\, P(E_i) \quad 10$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{4} \times \frac{1}{4} \quad 10$$

$$= \frac{5}{8} \quad 5$$

$\boxed{25}$

(ii) பேயரின் தேற்றப்படி

$$P(E_1 \mid W) = \frac{P(W \mid E_1)\, P(E_1)}{P(W)} \quad 10$$