සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

පැරණි නිර්දේශය/பழைய பாடத்திட்டம்/Old Syllabus

OLD

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2020
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2020
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2020

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

※ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) $f(x) = x^2 + px + c$ හා $g(x) = 2x^2 + qx + c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q \in \mathbb{R}$ හා $c > 0$ වේ. $f(x) = 0$ හා $g(x) = 0$ සඳහා α පොදු මූලයක් ඇති බව දී ඇත. $\alpha = p - q$ බව පෙන්වන්න.

p හා q ඇසුරෙන් c සොයා,

(i) $p > 0$ නම් $p < q < 2p$ බව,

(ii) $f(x) = 0$ හි විවේචකය $(3p - 2q)^2$ බව

අපෝහනය කරන්න.

β හා γ යනු පිළිවෙළින් $f(x) = 0$ හි හා $g(x) = 0$ හි අනික් මූල යැයි ගනිමු. $\beta = 2\gamma$ බව පෙන්වන්න.

තව ද β හා γ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $2x^2 + 3(2p - q)x + (2p - q)^2 = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(b) $h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b, c \in \mathbb{R}$ වේ. $x^2 - 1$ යන්න $h(x)$ හි සාධකයක් බව දී ඇත. $b = -1$ බව පෙන්වන්න.

$h(x)$ යන්න $x^2 - 2x$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $5x + k$ බව ද දී ඇත; මෙහි $k \in \mathbb{R}$ වේ. k හි අගය සොයා $h(x)$ යන්න $(x - \lambda)^2 (x - \mu)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ වේ.

12. (a) පියානෝ වාදකයින් පස්දෙනකු, ගිටාර් වාදකයින් පස්දෙනකු, ගායිකාවන් තුන්දෙනකු හා ගායකයින් හත්දෙනකු අතුරෙන් **හරියටම** පියානෝ වාදකයින් දෙදෙනකු ද **අඩු තරමින්** ගිටාර් වාදකයින් හතරදෙනකු ද ඇතුළත් වන පරිදි සාමාජිකයන් එකොළොස්දෙනකුගෙන් සමන්විත සංගීත කණ්ඩායමක් තෝරා ගැනීමට අවශ්‍යව ඇත. තෝරා ගත හැකි එවැනි වෙනස් සංගීත කණ්ඩායම් ගණන සොයන්න.

මේවා අතුරෙන් හරියටම ගායිකාවන් දෙදෙනකු සිටින සංගීත කණ්ඩායම් ගණන ද සොයන්න.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{3r - 2}{r(r+1)(r+2)}$ හා $V_r = \dfrac{A}{r+1} - \dfrac{B}{r}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $A, B \in \mathbb{R}$ වේ.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = V_r - V_{r+1}$ වන පරිදි A හා B හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

දැන්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $W_r = U_{r+1} - 2U_r$ යැයි ගනිමු. $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} W_r = U_{n+1} - U_1 - \sum_{r=1}^{n} U_r$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව **අපෝහනය** කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} - \mathbf{I} = \mathbf{C}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

$\mathbf{C}^{-1}$ පවතින්නේ $a \neq 0$ **ම නම් පමණක්** බව ද පෙන්වන්න.

දැන්, $a = 1$ යැයි ගනිමු. $\mathbf{C}^{-1}$ ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{CPC} = 2\mathbf{I} + \mathbf{C}$ වන පරිදි $\mathbf{P}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(*b*) $z, w \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු. $|z|^2 = z\bar{z}$ බව පෙන්වා, එය $z - w$ ට යෙදීමෙන්

$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z\bar{w} + |w|^2$ බව පෙන්වන්න.

$|1-z\bar{w}|^2$ සඳහා ද එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වා, $|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = -\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right)$ බව පෙන්වන්න.

$|w| = 1$ හා $z \neq w$ නම් $\left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $1+\sqrt{3}i$ යන්න $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ වේ.

ආගන්ඩ් සටහනක, O ලක්ෂ්‍යයෙන් මූලය ද A ලක්ෂ්‍යයෙන් $1+\sqrt{3}i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ද නිරූපණය කරයි. $OABCDE$ යනු O හා A අනුයාත ශීර්ෂ ලෙස ඇතිව ශීර්ෂවල අනුපිළිවෙළ වාමාවර්ත අතට ගෙන ඇති සවිධි ෂඩස්‍රය යැයි ගනිමු. B, C, D හා E ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

Maths අපි.com

14. (*a*) $x \neq 3$ සඳහා $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq 3$ සඳහා $f'(x) = \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

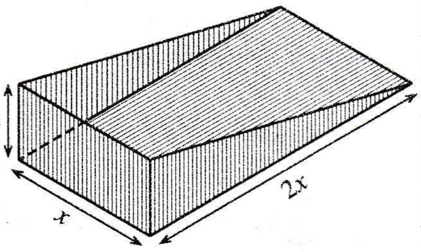
ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

$f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා $x-$අන්තඃඛණ්ඩ දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්, $\dfrac{1}{1+f(x)} \leq \dfrac{1}{3}$ අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

(*b*) යාබද රූපයෙන් දූවිලි එකතු කරනයක මිට රහිත කොටස දැක්වේ. සෙන්ටිමීටරවලින් එහි මාන රූපයේ දැක්වේ. එහි පරිමාව x^2h cm^3 යන්න 4500 cm^3 බව දී ඇත.
එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S cm^2 යන්න $S = 2x^2 + 3xh$ මගින් දෙනු ලැබේ. S අවම වන්නේ $x = 15$ වන විට බව පෙන්වන්න.



15. (*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^3 + 13x - 16 = A(x^2+9)(x+1) + B(x^2+9) + 2(x+1)^2$

වන පරිදි A හා B නියත පවතින බව දී ඇත.

A හා B හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}$ යන්න භින්න භාගවලින් ලියා දක්වා,

$\displaystyle\int \frac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}\,\mathrm{d}x$ සොයන්න.

(*b*) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x\,\mathrm{d}x$ අගයන්න.

(*c*) a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$\displaystyle\int_0^\pi x\cos^6 x\sin^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos^6 x\sin^3 x\,\mathrm{d}x$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^\pi x\cos^6 x\sin^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{63}$ බව පෙන්වන්න.

Maths අපි .com

16. $A \equiv (1, 2)$ හා $B \equiv (3, 3)$ යැයි ගනිමු.

A හා B ලක්ෂ්‍ය හරහා යන l සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

එක එකක් l සමග $\frac{\pi}{4}$ ක සුළු කෝණයක් සාදමින් A හරහා යන l_1 හා l_2 සරල රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න.

l මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(1 + 2t, 2 + t)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $t \in \mathbb{R}$ වේ.

l_1 හා l_2 යන දෙකම ස්පර්ශ කරන හා කේන්ද්‍රය l මත වූ මූළමනින්ම පළමුවන වෘත්ත පාදකයේ පිහිටන අරය $\frac{\sqrt{10}}{2}$ වන, C_1 වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 - 6x - 6y + \frac{31}{2} = 0$ බව ද පෙන්වන්න.

විෂ්කම්භයක අන්ත A හා B වූ C_2 වෘත්තයේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

C_1 හා C_2 වෘත්ත ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ දැයි නිර්ණය කරන්න.

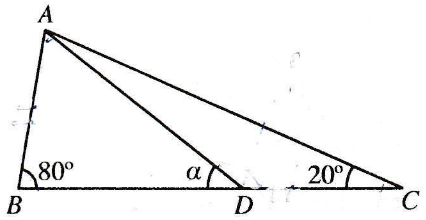
17. (*a*) $\sin A, \cos A, \sin B$ හා $\cos B$ ඇසුරෙන් $\sin(A-B)$ ලියා දක්වන්න.

(i) $\sin(90^\circ-\theta) = \cos\theta$, හා

(ii) $2\sin 10^\circ = \cos 20^\circ - \sqrt{3}\,\sin 20^\circ$

බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*b*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.



රූපයේ දක්වා ඇති ABC ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C = 80^\circ$ හා $A\hat{C}B = 20^\circ$ වේ. D ලක්ෂ්‍යය BC මත පිහිටා ඇත්තේ $AB = DC$ වන පරිදි ය. $A\hat{D}B = \alpha$ යැයි ගනිමු.

සුදුසු ත්‍රිකෝණ සඳහා **සයින් නීතිය** භාවිතයෙන්, $\sin 80^\circ \sin(\alpha - 20^\circ) = \sin 20^\circ \sin\alpha$ බව පෙන්වන්න.

$\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$ වන්නේ ඇයිදැයි පැහැදිලි කර, **ඒ නයින්**, $\tan\alpha = \dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - 2\sin 10^\circ}$ බව පෙන්වන්න.

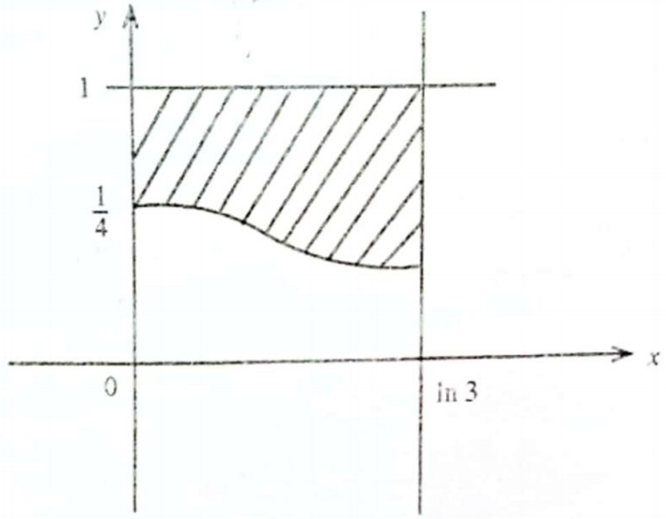
ඉහත (*a*)(ii) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $\alpha = 30^\circ$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $\tan^{-1}(\cos^2 x) + \tan^{-1}(\sin x) = \dfrac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න.

* * *

Maths අපි.com

6. $y = \dfrac{e^{2x}}{(1+e^{x})^{2}}$, $x = 0$, $x = \ln 3$ හා $y = 1$ වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය $\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{4}$ බව පෙන්වන්න.



(5)

අවශ්‍ය වර්ගඵලය $= \displaystyle\int_0^{\ln 3}\left\{1 - \frac{e^{2x}}{(1+e^{x})^{2}}\right\} dx$

$u = 1 + e^{x}.$

$= \ln 3 - \displaystyle\int_2^4 \frac{u-1}{u^2}\, du$ (5)

$= \ln 3 - \displaystyle\int_2^4 \left\{\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right\} du$ (5)

$= \ln 3 - \left\{\ln|u| + \frac{1}{u}\right\}\Big|_2^4$ (5)

$= \ln 3 - \left\{\ln 4 - \ln 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right\}$

$= \ln 3 - \left\{\ln 2 - \frac{1}{4}\right\}$

$= \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4}.$ (5)

25

7. $-\frac{\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4}$ සඳහා $x = 2t - \cos 2t$ හා $y = 1 - \sin 2t$ මගින් පරාමිතිකව C වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ. $\frac{dy}{dx}$ යන්න t ඇසුරෙන් සොයන්න.
C වක්‍රයට එය මත $t = \frac{\pi}{12}$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අභිලම්බ රේඛාවේ සමීකරණය
$6\sqrt{3}\,x - 6y - \sqrt{3}\,\pi + 12 = 0$ බව පෙන්වන්න.

$x = 2t - \cos 2t, \quad y = 1 - \sin 2t$

$\frac{dx}{dt} = 2 + 2\sin 2t, \quad \frac{dy}{dt} = -2\cos 2t.$ (5) (both)

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\cos 2t}{2 + 2\sin 2t} = -\frac{\cos 2t}{1 + \sin 2t}$ (5) t ඇසුරින් ලිවීමට

$t = \frac{\pi}{12}$ මගින් $x = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ හා $y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ලැබේ. (5)

අවශ්‍ය අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය $= \dfrac{1 + \sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}$

$= \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$ (5)

අවශ්‍ය සමීකරණය :

$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

එනම්, $6\sqrt{3}\,x - 6y - \sqrt{3}\,\pi + 12 = 0.$ (5)

25

25

Maths අඩි .com

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

13. (a) $A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ හා $C = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$A^TB - I = C$ බව පෙන්වන්න; මෙහි I යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

C^{-1} පවතින්නේ $a \neq 0$ ම නම් පමණක් බව ද පෙන්වන්න.

දැන්, $a = 1$ යැයි ගනිමු. C^{-1} ලියා දක්වන්න.

$CPC = 2I + C$ වන පරිදි P න්‍යාසය සොයන්න.

(b) $z, w \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු. $|z|^2 = z\bar{z}$ බව පෙන්වා, එය $z - w$ ට යෙදීමෙන්

$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\text{Re}\, z\bar{w} + |w|^2$ බව පෙන්වන්න.

$|1-z\bar{w}|^2$ සඳහා ද එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වා, $|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = -\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right)$ බව පෙන්වන්න.

$|w| = 1$ හා $z \neq w$ නම් $\left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

(c) $1+\sqrt{3}i$ යන්න $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ වේ.

ආගන්ඩ් සටහනක, O ලක්ෂ්‍යයෙන් මූලය ද A ලක්ෂ්‍යයෙන් $1+\sqrt{3}i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ද නිරූපණය කරයි. $OABCDE$ යනු O හා A අනුයාත ශීර්ෂ ලෙස ඇතිව ශීර්ෂවල අනුපිළිවෙළ වාමාවර්ත අතට ගෙන ඇති සවිධි ෂඩස්‍රය යැයි ගනිමු. B, C, D හා E ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

Maths අපි.com

(a) $A^TB = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ (5)

$= \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix}$ (5)

$\therefore\ A^TB - I = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5)

$= \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix} = C$ (5)

20

C^{-1} පවතී $\Leftrightarrow |C| \neq 0$ (5)

$\Leftrightarrow 2a - a \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq 0$ (5)

10

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$a = 1$, වන විට $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. (5)

$\therefore \ C^{-1} = \dfrac{1}{2-1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. (5)

10

$CPC \ = 2I + C$

$\Leftrightarrow PC \ = 2C^{-1} + C^{-1}C$ (5)

$\Leftrightarrow PC \ = 2C^{-1} + I$

$\Leftrightarrow P \ = 2C^{-1}C^{-1} + C^{-1}$ (5)

$\therefore \ P = 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= 2\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (5)

$= \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ (5)

20

(b) $z = x + iy$ යැයි ගනිමු.

$z\bar{z} \ = (x+iy)(x-iy)$ (5)

$= x^2 - i^2y^2$

$= x^2 + y^2$

$= |z|^2$

$\therefore \ |z|^2 = z\bar{z}$. (5)

10

Scanned with CamScanner

$$|z-w|^2 = (z-w)\,(\overline{z-w}) \quad (5)$$

$$= (z-w)\,(\bar{z}-\bar{w}) \quad (5)$$

$$= z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w}$$

$$= |z|^2 - (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) + |w|^2 \quad (5)$$

$$= |z|^2 - 2\,\text{Re}\,(z\bar{w}) + |w|^2 \longrightarrow (1)$$

15

$$|1-\bar{z}w|^2 = 1 - 2\,\text{Re}\,(z\bar{w}) + |z\bar{w}|^2 \longrightarrow (2) \quad (5)$$

(1) – (2) මගින්;

$$|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 1 - |z\bar{w}|^2$$

$$= -(1 - |w|^2 - |z|^2 + |z|^2|w|^2) \quad (5)$$

$$= -(1-|z|^2)(1-|w|^2) \quad (5) \longrightarrow (3)$$

20

Maths අපි. com

$|w| = 1$, බැවින් (3) න් $|z-w|^2 - |1-\bar{z}w|^2 = 0$ ලැබේ. (5)

$\therefore\ |z-w| = |1-z\bar{w}|.$

ඒ නයින්, $\dfrac{|z-w|}{|1-z\bar{w}|} = 1.$ $\left[\begin{array}{l}\because z \neq w \\ \Rightarrow z\bar{w} \neq 1\end{array}\right]$

$\therefore\ \left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$ (5)

10

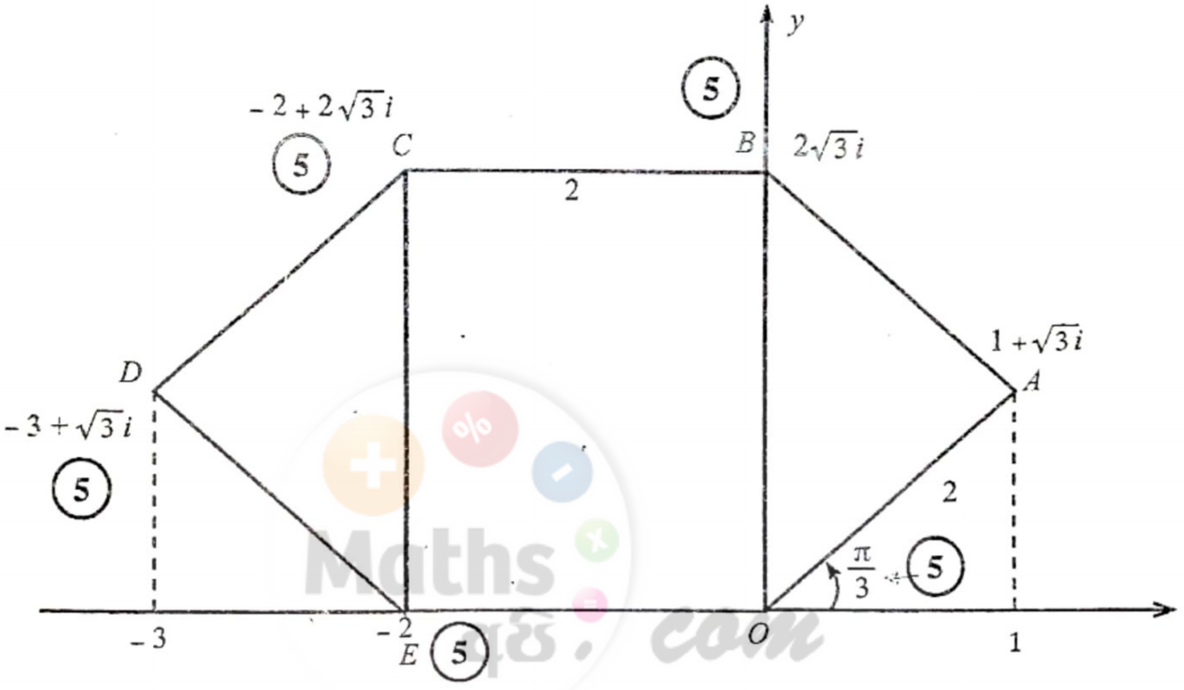
Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(c) $1+\sqrt{3}\,i = 2\left\{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ (5)

$= 2\left\{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right\}.$ (5)

10



25

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

14. (a) $x \neq 3$ සඳහා $f(x) = \frac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq 3$ සඳහා $f'(x) = \frac{9(1-x)}{(x-3)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

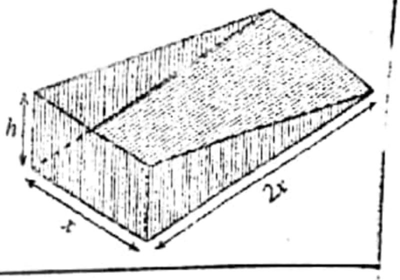
ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

$f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා $x-$අන්තඃඛණ්ඩ දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්, $\frac{1}{1+f(x)} \leq \frac{1}{3}$ අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

(b) යාබද රූපයෙන් දූවිලි එකතු කරනයක මිට රහිත කොටස දැක්වේ. සෙන්ටිමීටරවලින් එහි මාන රූපයේ දැක්වේ. එහි පරිමාව x^2h cm^3 යන්න 4500 cm^3 බව දී ඇත. එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S cm^2 යන්න $S = 2x^2 + 3xh$ මගින් දෙනු ලැබේ. S අවම වන්නේ $x = 15$ වන විට බව පෙන්වන්න.



(a) $x \neq 3$; සඳහා $f(x) = \frac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$

එවිට, $f'(x) = \frac{1}{(x-3)^2}\left[2x - 3 + 2x\right] - \frac{2x(2x-3)}{(x-3)^3}$ (20)

$= \frac{(x-3)(4x-3) - 2x(2x-3)}{(x-3)^3}$

$= \frac{4x^2 - 15x + 9 - 4x^2 + 6x}{(x-3)^3}$

$= \frac{9(1-x)}{(x-3)^3}$. (5)

25

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. (5)

	$-\infty < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(−)	(+)	(−)
$f(x)$	↘ අඩුවේ.	↗ වැඩිවේ.	↘ අඩුවේ.
	(5)	(5)	(5)

20

$f(x)$ යන්න $[1, 3)$ මත වැඩි වන අතර $(-\infty, 1]$ හා $(3, \infty)$ මත අඩුවේ.

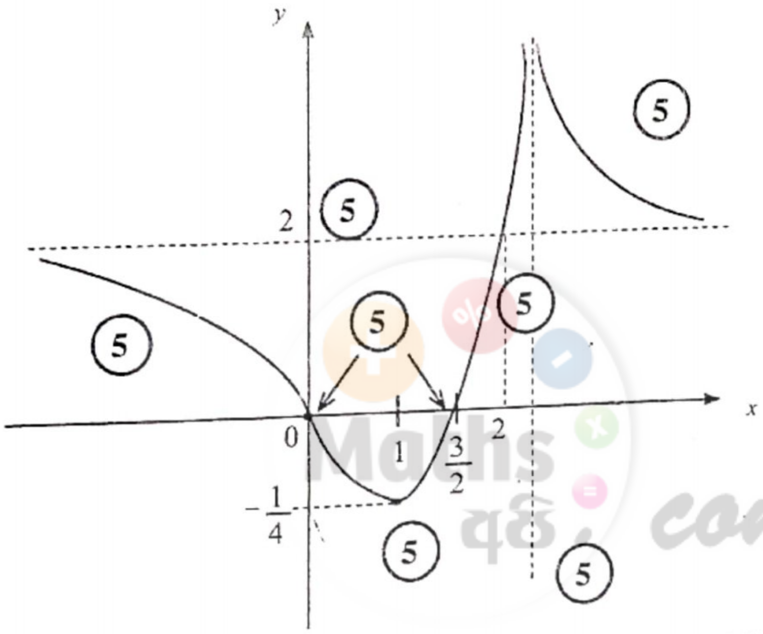
Scanned with CamScanner

හැරුම් ලක්ෂය : $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$ ස්ථානීය අවමයකි. (5)

05

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2 \quad \therefore y = 2$ (5)

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $x = 3$. (5)



45

$$\frac{1}{1+f(x)} \leq \frac{1}{3}.$$

$1 + f(x) > 0$ වේ. $\quad$ *x ≠ 3 විට*

x ≠ 3

$\therefore 3 \leq 1 + f(x)$. $\quad$ *x ≠ 3 විට* $\quad$ *no essential*

$\therefore f(x) \geq 2$. (5)

$f(x) = 2 \Leftrightarrow x(2x-3) = 2(x-3)^2$. (5)

$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 3x = 2(x^2 - 6x + 9)$

$\Leftrightarrow \quad x = 2$ (5)

x හි අවශ්‍ය අගයන් $2 \leq x < 3$ හෝ $x > 3$ (5)

20

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(b) $x^2 h = 4500.$

ඒ නයින්, $S = 2x^2 + 3xh$

$= 2x^2 + 3x \cdot \dfrac{4500}{x^2}$; $x > 0$ සඳහා (5)

$\therefore \dfrac{dS}{dx} = 4x - 3 \times 4500 \left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{4(x^3 - 3375)}{x^2}.$ (5)

$\dfrac{dS}{dx} = 0$ (10) $\Leftrightarrow x = 15.$ (5)

$0 < x < 15$ සඳහා, $\dfrac{ds}{dr} < 0$ හා $x > 15$ සඳහා $\dfrac{ds}{dr} > 0.$ (5)

$\therefore x = 15$ වන විට S අවම වේ. (5)

35

Maths අපි. com

Scanned with CamScanner

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි

රහස්‍ය ලේඛනයකි

NEW/OLD

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2020

10 - සංයුක්ත ගණිතය II

නව/පැරණි නිර්දේශය

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය

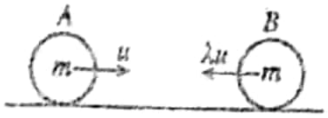
Maths අපි. com

මෙය උත්තරපත්‍ර පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා සකස් කෙරිණි.
ප්‍රධාන/ සහකාර පරීක්ෂක රැස්වීමේ දී ඉදිරිපත්වන අදහස් අනුව මෙහි වෙනස්කම් කරනු ලැබේ.

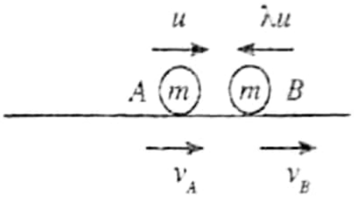
අවසන් සංශෝධන ඇතුළත් කළ යුතුව ඇත.

Scanned with CamScanner

එක එකෙහි ස්කන්ධය m වූ A හා B අංශු දෙකක් සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත එකම සරල රේඛාවේ එකෙත් ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවලට චලනය වෙමින් සරල ලෙස ගැටේ. ගැටුමට මොහොතකට පෙර A හි හා B හි ප්‍රවේග පිළිවෙළින් u හා λu වේ. A හා B අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ. ගැටුමට මොහොතකට පසු A හි ප්‍රවේගය සොයා $\lambda > \frac{1}{3}$ නම්, A හි චලිත දිශාව ප්‍රතිවිරුද්ධ වන බව පෙන්වන්න.



A හා B සඳහා $\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$, $\rightarrow$ යෙදීමෙන් :



$(mv_A + mv_B) - (mu - m\lambda u) = 0.$

$\therefore v_A + v_B = (1 - \lambda)u$ ——— (1) (10)

එකතු Momentum නම් ල (05)

නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමයෙන් :

$v_B - v_A = \frac{1}{2}(u + \lambda u)$ ——— (2) (5)

(1) - (2) : $2v_A = u - \lambda u - \frac{1}{2}u - \frac{\lambda}{2}u$

$v_A = \frac{1}{4}(1 - 3\lambda)u$ (5)

$\lambda > \frac{1}{3}$, නම් එවිට $v_A < 0.$ (5)

$\therefore$ A හි චලිත දිශාව ප්‍රතිවිරුද්ධ වේ.

25

ශ.ස.න ලොකු කාල පරාසයක් සඳහා වඩාත් යෝග්‍ය.

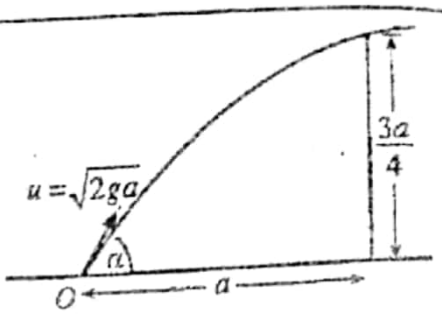
$I = \Delta mv$ ගම්‍යතා වෙනස

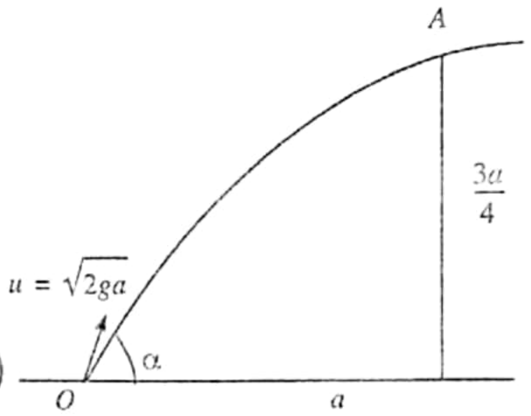
Scanned with CamScanner

2. අංශුවක් තිරස් ගෙබිමක් මත වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට $u=\sqrt{2ga}$ ආරම්භක ප්‍රවේගයකින් හා තිරසට $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව, O සිට a තිරස් දුරකින් පිහිටි උස $\frac{3a}{4}$ වූ සිරස් බිත්තියකට යාන්තමින් ඉහළින් යයි.

$\sec^2\alpha - 4\tan\alpha + 3 = 0$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\alpha = \tan^{-1}(2)$ බව පෙන්වන්න.





O සිට A දක්වා ගතවූ කාලය t යැයි ගනිමු.

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්,

$\rightarrow \quad a = u\cos\alpha\, t$ ——— (1) (5)

$\uparrow \quad \frac{3a}{4} = u\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$ ——— (2) (5)

(1) $\Rightarrow t = \frac{a}{u\cos\alpha}$

දැන්, (2) $\Rightarrow \frac{3a}{4} = a\tan\alpha - \frac{1}{2}g\frac{a^2}{2\,ga\cos^2\alpha}$ (5)

$\Rightarrow \frac{3}{4} = \tan\alpha - \frac{1}{4}\sec^2\alpha$

$\Rightarrow \sec^2\alpha - 4\tan\alpha + 3 = 0$ (5)

$\Rightarrow (1+\tan^2\alpha) - 4\tan\alpha + 3 = 0$

$\Rightarrow \tan^2\alpha - 4\tan\alpha + 4 = 0$

$\Rightarrow (\tan\alpha - 2)^2 = 0$

$\therefore \tan\alpha = 2$ (5)

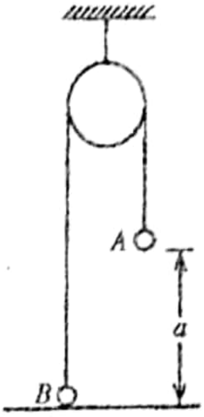
$\therefore \alpha = \tan^{-1}(2)$.

25

Maths අපි .com

Scanned with CamScanner

3. එක එකෙහි ස්කන්ධය m වූ A හා B අංශු දෙකක්, අචල සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈඳා, රූපයේ දැක්වෙන පරිදි A අංශුව තිරස් ගෙබිමක සිට a උසකින් ඇතිවද B අංශුව ගෙබිම ස්පර්ශ කරමින් ද සමතුලිතතාවයේ පිහිටා ඇත. දැන්, A අංශුවට සිරස්ව පහළට mu ආවේගයක් දෙනු ලැබේ. ආවේගයෙන් මොහොතකට පසු A අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයන්න.
A ට ගෙබිම වෙත ළඟා වීමට ගතවන කාලය ලියා දක්වන්න.

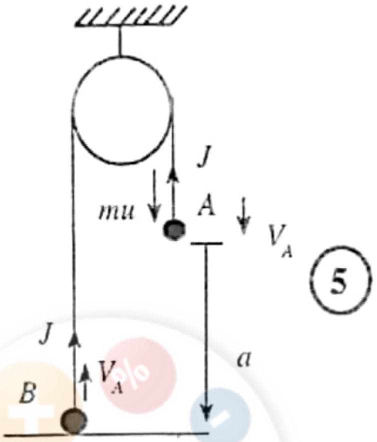


$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්,

Ⓐ ↓ $mu - J = mV_A$ (5)

Ⓑ ↑ $J = mV_A$ (5)

$\therefore\ V_A = \dfrac{u}{2}$ (5)



$T = \dfrac{a}{V_A} = \dfrac{2a}{u}$ (5)

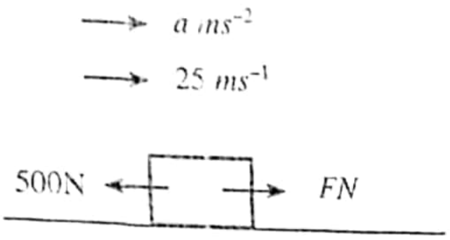
25

Maths අපි .com

$V_B = V_A$ තන්තුව තදව තිබීමට අවශ්‍යතාවය.
ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් යයි.

Scanned with CamScanner

4. ස්කන්ධය 1500 kg වූ කාරයක්, විශාලත්වය 500 N වූ නියත ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව සෘජු තිරස් මාර්ගයක ධාවනය වේ. කාරයේ එන්ජිම 50 kW ජවයකින් ක්‍රියාකරමින් කාරය 25 m s^{-1} වේගයෙන් ධාවනය වන විට එහි ත්වරණය සොයන්න.
මෙම මොහොතේ දී කාරයේ එන්ජිම ක්‍රියා විරහිත කරනු ලැබේ. එන්ජිම ක්‍රියා විරහිත කළ මොහොතේ සිට තත්පර 50 කට පසු කාරයේ වේගය සොයන්න.



ජවය = 50kW නිසා,

$50 \times 10^3 = F \times 25$ (5) $\quad P = FV$

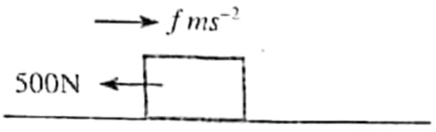
$\therefore F = 2000$

$\underline{F} = m\underline{a} \longrightarrow$ යෙදීමෙන්

$F - 500 = 1500\,a.$ (5)

$\therefore a = 1$ (5)

කාරයේ එන්ජිම නැවතුණු විට,



$\underline{F} = m\underline{a} \longrightarrow$

$-500 = 1500\,f$ (5)

$\therefore f = -\frac{1}{3}$

$v = u + at \longrightarrow$ යෙදීමෙන්

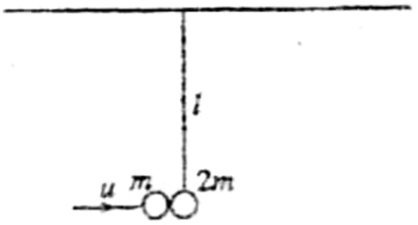
$v = 25 - \frac{1}{3} \times 50$

$v = \frac{25}{3}\ ms^{-1}$ (5)

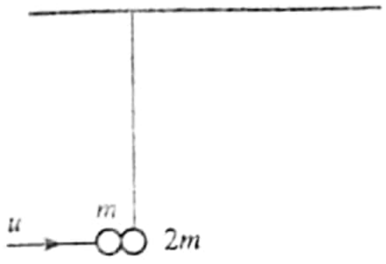
Maths අපි .com

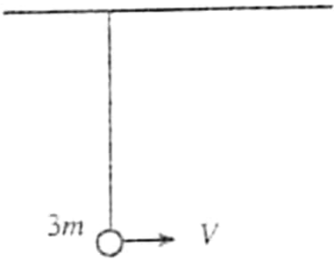
Scanned with CamScanner

5. දිග l වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් තිරස් සිවිලිමක නිදහසේ එල්ලා ඇති ස්කන්ධය $2m$ වූ P අංශුවක් සමතුලිතතාවයේ පවතී. u ප්‍රවේගයෙන් තිරස් දිශාවකින් චලනය වන ස්කන්ධය m වූ තවත් අංශුවක්, P අංශුව සමග ගැටී එයට හා වේ. ගැටුමට පසුව ද තන්තුව තදව පවතින අතර සංයුක්ත අංශුව සිවිලිමට යාන්තමින් ළඟා වේ. $u = \sqrt{18gl}$ බව පෙන්වන්න.



වි.ශ. $= 0$





$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන් : m හා $2m$ $\longrightarrow$

$0 = 3mV - mu$ (5)

$\therefore V = \frac{u}{3}$ (5)

සංයුක්ත අංශුව සඳහා ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්.

P.E (5) K.E = (5)

$\frac{1}{2}(3m)V^2 - 3mgl = 0.$ (10)

$\therefore V^2 = 2gl$

$\therefore \frac{u^2}{9} = 2gl$

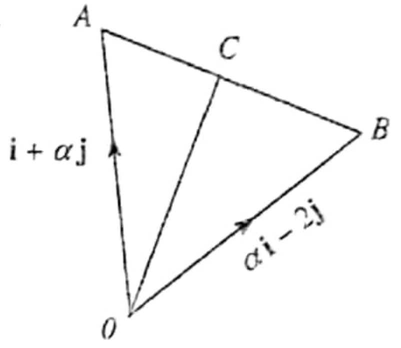
ඒ නයින්, $u = \sqrt{18gl}$ (5)

25

Maths අඩි.com

Scanned with CamScanner

6. $\alpha > 0$ හා සුපුරුදු අංකනයෙන්, O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{i}+\alpha\mathbf{j}$ හා $\alpha\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ යැයි ගනිමු. C යනු $AC : CB = 1:2$ වන පරිදි AB මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. AB ට OC ලම්බ යැයි දී ඇත. α හි අගය සොයන්න.



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$

$$= -(\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}) + (\alpha\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) \quad (5)$$

$$= (\alpha - 1)\mathbf{i} - (\alpha + 2)\mathbf{j}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad (5)$$

($\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$)

$$= (\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}) + \frac{1}{3}[(\alpha - 1)\mathbf{i} - (\alpha + 2)\mathbf{j}] \quad (5)$$

$$= \frac{1}{3}[(\alpha + 2)\mathbf{i} + 2(\alpha - 1)\mathbf{j}]$$

$$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha + 2) - 2(\alpha + 2)(\alpha - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1 \quad (5) \quad (\because \alpha > 0)$$

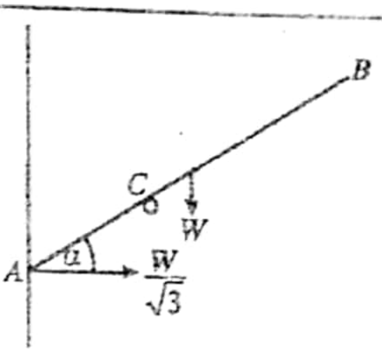
25

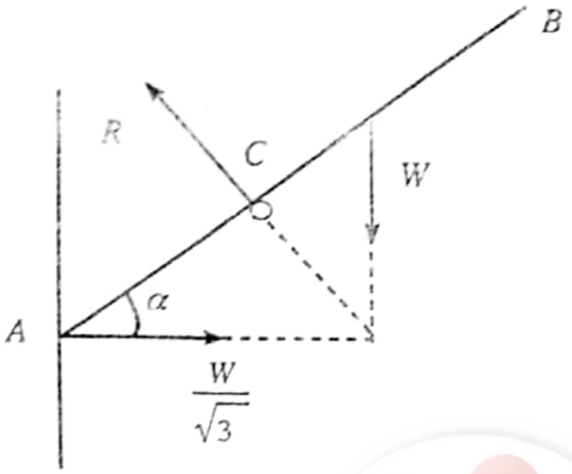
Maths අපි .com

Scanned with CamScanner

7. දිග $2a$ හා බර W වූ ACB ඒකාකාර දණ්ඩක් රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි A කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට එරෙහි ව C හි තබා ඇති සුමට නාදැත්තක් මගින් සමතුලිතතාවේ තබා ඇත. A හි දී බිත්තිය මගින් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව $\frac{W}{\sqrt{3}}$ බව දී ඇත. දණ්ඩ තිරස සමග සාදන α කෝණය $\frac{\pi}{6}$ බව පෙන්වන්න.

$AC = \frac{3}{4}a$ බව ද පෙන්වන්න.





දණ්ඩෙහි සමතුලිතතාව සඳහා

$\rightarrow \quad R \sin\alpha = \frac{W}{\sqrt{3}}$ —— (1) (5)

$\uparrow \quad R\cos\alpha = W$ —— (2) (5)

$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$ (5)

ඇත්, (1) $\Rightarrow R = \frac{2W}{\sqrt{3}}$

$\overset{\frown}{A} \quad R \times AC = W \times a\cos\frac{\pi}{6}$ (හෝ $Wa\cos\alpha$) (5)

$\frac{2W}{\sqrt{3}} \times AC = W \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$AC = \frac{3}{4}a$ (5)

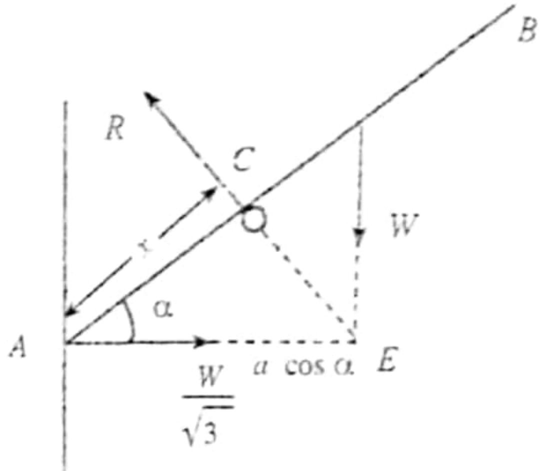
25

වෙනත් ක්‍රමයක් 1

$\overset{AB}{\nearrow}$ $\quad \dfrac{W}{\sqrt{3}} \cos\alpha = W \sin\alpha$ (10)

$\Rightarrow \quad \tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{\pi}{6}$ (5)



$\overset{\frown}{C}$ $\quad \dfrac{W}{\sqrt{3}} \times x \sin\dfrac{\pi}{6} = W \times (a - x)\cos\dfrac{\pi}{6}$ (5) හෝ $x = AE\cos\alpha$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}} \times x \times \dfrac{1}{2} = (a - x)\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

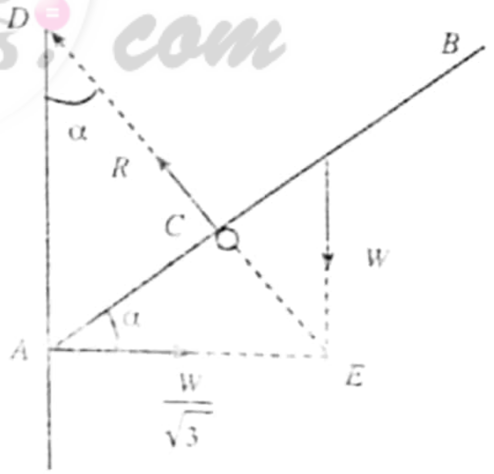
$x = 3(a - x)$

$x = \dfrac{3}{4}\,a$ (5)

Maths අපි .com

වෙනත් ක්‍රමයක් 2

ADE බල ත්‍රිකෝණයක් වේ. (5)



$$\frac{\frac{W}{\sqrt{3}}}{AE} = \frac{W}{AD}$$

$\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (5)

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

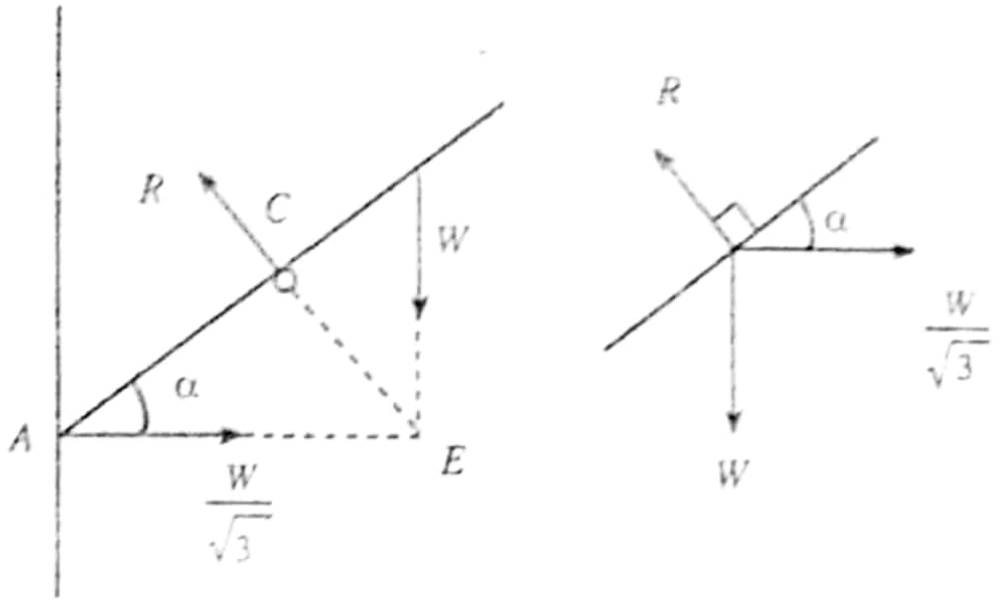
$\Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6}$ (5)

$\therefore AE = a\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (5)

$AC = AE\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{3}{4}\,a$ (5)

වෙනත් ක්‍රමයක් 3



ලාමි නියමයෙන්,

$$\frac{W}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{\frac{W}{\sqrt{3}}}{\sin(\pi-\alpha)} \quad (5)$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}\sin\alpha} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \quad (5)$$

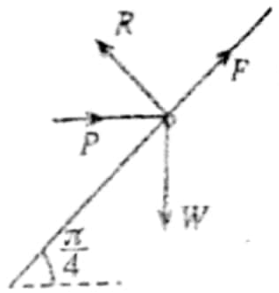
$AC = AE\cos\alpha$ මගින් $AC = \frac{3}{4}a$ ලැබේ. (5) + (5)

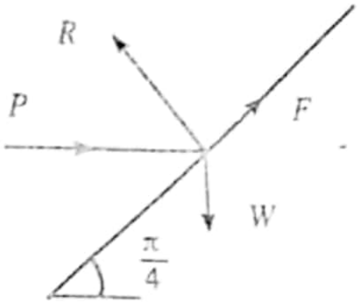
Maths අපි .com

Scanned with CamScanner

8. බර W වූ කුඩා පබළුවක් තිරසට $\frac{\pi}{4}$ කෝණයකින් ආනත අචල, රළු, සෘජු කම්බියකට අමුණා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි විශාලත්වය P වූ තිරස් බලයක් මගින් පබළුව සමතුලිතව තබා ඇත. පබළුව හා කම්බිය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ. පබළුව මත ඝර්ෂණ බලය F හා අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව R නිර්ණය කිරීම සඳහා ප්‍රමාණවත් සමීකරණ P හා W ඇසුරෙන් ලබා ගන්න.

$\frac{F}{R}=\frac{W-P}{W+P}$ බව දී ඇත. $\frac{W}{3}\le P\le 3W$ බව පෙන්වන්න.





$$F = \frac{W-P}{W+P}$$

පබළුවේ සමතුලිතතාව සඳහා

↗ $F - \frac{W}{\sqrt{2}} + \frac{P}{\sqrt{2}} = 0.$ (5) ($\cos\frac{\pi}{4}$ හෝ $\sin\frac{\pi}{4}$ සමග)

↖ $R - \frac{W}{\sqrt{2}} - \frac{P}{\sqrt{2}} = 0.$ (5) ($\cos\frac{\pi}{4}$ හෝ $\sin\frac{\pi}{4}$ සමග)

$$\mu \ge \frac{|F|}{R}$$

$\frac{1}{2} \ge \frac{|W-P|}{W+P}$ (10)

සංඛ්‍යාත්මක අගය නොමැති (5) පමණි.

$\therefore |W-P| \le \frac{1}{2}(W+P)$

$\therefore -\frac{1}{2}(W+P) \le W-P \le \frac{1}{2}(W+P)$

එනයින් $\frac{W}{3} \le P \le 3W$ (5)

25

Scanned with CamScanner

9. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B \mid A) = \frac{1}{4}$ හා $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ බව දී ඇත. $P(B)$ සොයන්න.

A හා B සිද්ධි ස්වායත්ත නොවන බව පෙන්වන්න.

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$ (5)

දැන්, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ මගින් (5)

$\frac{4}{5} = \frac{3}{5} + P(B) - \frac{3}{20}$ ලැබේ.

$\therefore P(B) = \frac{16}{20} - \frac{12}{20} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$ (5)

එවිට $P(A) \, . \, P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{7}{20} = \frac{21}{100}$ (5).

$\therefore \quad P(A \cap B) \neq P(A) \, . \, P(B)$ (5)

$\therefore$ A හා B ස්වායත්ත නොවේ.

25

Maths අඩි .com

Scanned with CamScanner

10. එක එකක් 10 ට අඩු හෝ සමාන ධන නිඛිලමය නිරීක්ෂණ 5 ක කුලකයක මධ්‍යනාය, මධ්‍යස්ථය හා මාතය යන එක එකක් 6 ට සමාන වේ. නිරීක්ෂණවල පරාසය 9 වේ. මෙම නිරීක්ෂණ පහ සොයන්න.

මාතය $= 6 \Rightarrow$ 6, 6 සංඛ්‍යාවලින් අවම වශයෙන් දෙකක් වේ. (5)

පරාසය $= 9$ හා සංඛ්‍යා ධන නිඛිල ≤ 10 වේ. කුඩාම සංඛ්‍යාව 1 හා විශාලම සංඛ්‍යාව 10 වේ. (5)

මධ්‍යස්ථය 6 වන නිසා, සංඛ්‍යා

$1, a, 6, 6, 10$ හෝ
$1, 6, 6, a, 10$. } විය යුතුය. (5)

මධ්‍යනාය $= \dfrac{a+23}{5} = 6$ ලබා දෙයි. (5)

$\therefore a = 7$ (5)

$\therefore$ සංඛ්‍යා 1, 6, 6, 7, 10 වේ.

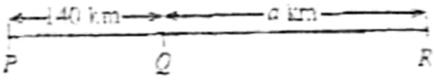
without methods just writing numbers → given 10 marks.

25

Maths අපි.com

Scanned with CamScanner

11. (a) රූපයෙහි පෙන්වා ඇති පරිදි P, Q හා R දුම්රිය ස්ථාන තුනක් $PQ = 140$ km හා $QR = a$ km වන පරිදි සරල රේඛාවක පිහිටා ඇත. කාලය $t = 0$ දී A දුම්රියක් P හි දී නිශ්චලතාවයෙන් ආරම්භ කර Q දෙසට f km h^{-2} නියත ත්වරණයෙන් පැය භාගයක් ගමන් කර කාලය $t = \frac{1}{2}$ h හි දී එයට තිබූ ප්‍රවේගය පැය තුනක කාලයක් පවත්වාගෙන යයි. ඉන්පසු එය f km h^{-2} නියත මන්දනයෙන් ගමන් කර Q හි දී නිශ්චලතාවට පැමිණෙයි. කාලය $t = 1$ h හි දී තවත් B දුම්රියක් R හි දී නිශ්චලතාවයෙන් ආරම්භ කර Q දෙසට පැය T කාලයක් $2f$ km h^{-2} නියත ත්වරණයෙන් ද ඉන්පසු f km h^{-2} නියත මන්දනයෙන් ද ගමන් කර Q හි දී නිශ්චලතාවට පැමිණෙයි. දුම්රිය දෙකම එකම මොහොතේ දී නිශ්චලතාවට පැමිණේ. එකම රූපසටහනක A හා B හි චලිත සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.



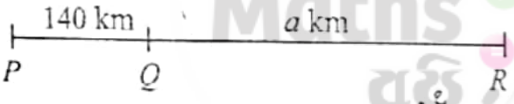
මේ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $f = 80$ බව පෙන්වා, T හි හා a හි අගයන් සොයන්න.

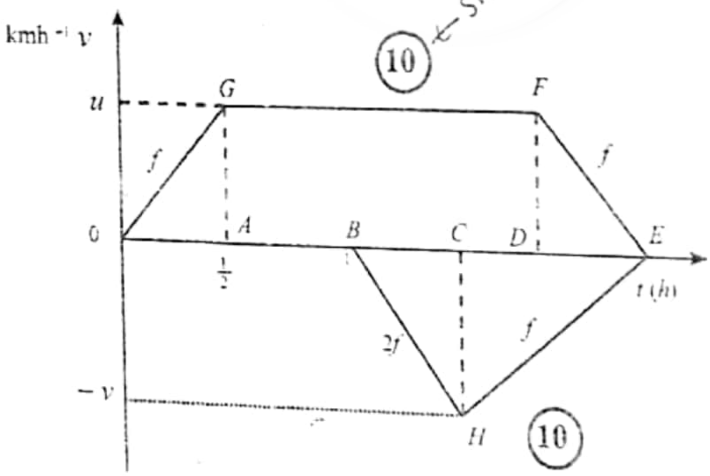
(b) නැවක් පොළොවට සාපේක්ෂව u ඒකාකාර වේගයෙන් බටහිර දෙසට යාත්‍රා කරන අතර බෝට්ටුවක් පොළොවට සාපේක්ෂව $\frac{u}{2}$ ක ඒකාකාර වේගයෙන් සරල රේඛීය පෙතක යාත්‍රා කරයි. එක්තරා මොහොතක දී, බෝට්ටුවෙන් d දුරකින් උතුරෙන් නැගෙනහිරට $\frac{\pi}{3}$ ක කෝණයකින් නැව පිහිටයි.

(i) බෝට්ටුව පොළොවට සාපේක්ෂව උතුරෙන් බටහිරට $\frac{\pi}{6}$ ක කෝණයක් සාදන දිශාවට යාත්‍රා කරයි නම් බෝට්ටුවට නැව අල්ලාගත හැකි බව පෙන්වා, එයට නැව අල්ලා ගැනීමට ගතවන කාලය $\frac{2d}{\sqrt{3}u}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) බෝට්ටුව පොළොවට සාපේක්ෂව උතුරෙන් නැගෙනහිරට $\frac{\pi}{6}$ ක කෝණයක් සාදන දිශාවට යාත්‍රා කරයි නම් නැවට සාපේක්ෂව බෝට්ටුවේ වේගය $\frac{\sqrt{7}u}{2}$ බව පෙන්වා, නැව සහ බෝට්ටුව අතර කෙටිම දුර $\frac{d}{2\sqrt{7}}$ බව පෙන්වන්න.

(a)





20

$\underline{\Delta\ OAG}$

$f = \dfrac{u}{\frac{1}{2}}$

$\therefore\ f = 2u$ (5)

$\Delta\ OAG \equiv \Delta\ DEF$

$\therefore\ DE = \dfrac{1}{2}$ (5)

$OEFG$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය $= 140$ (5)

$\dfrac{1}{2}(4+3)\,u = 140$ (5)

$\therefore\ u = 40$

$\therefore\ f = 80.$ (5)

25

$\underline{\Delta\ BHC}$

$2f = \dfrac{V}{T} \Rightarrow 160 = \dfrac{V}{T}$ (5)

$\underline{\Delta\ ECH}$

$f = \dfrac{V}{CE} \Rightarrow 80 = \dfrac{V}{CE}$ (5)

$\therefore\ CE = 2T$ (5)

$\therefore\ 3T = 3$ හා $T = 1.$ (5) තවද $V = 160.$

$a = BHE$ ත්‍රිකෝණයෙහි වර්ගඵලය $= \dfrac{1}{2} \times 3 \times 160$

$= 240$ (5)

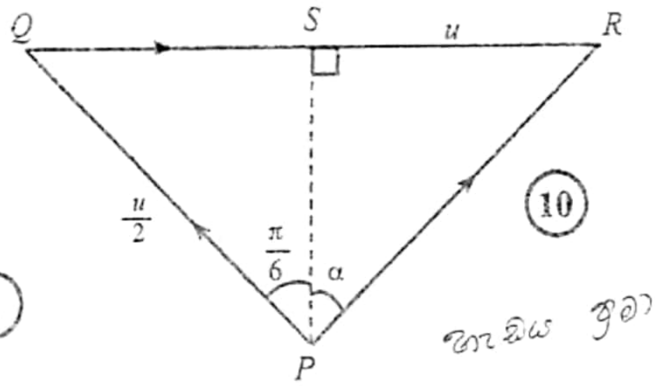
25

Maths අධි . com

Scanned with CamScanner

(b) $\mathbf{V}(S, E) = \leftarrow u$ (5)

(i) $\mathbf{V}(B, E) = \frac{u}{2}$ ↖ $\frac{\pi}{6}$ (5)



හැඩිය ප්‍රමාණවත්

no arrows needed to get 10 marks.

$\mathbf{V}(B, S) = \mathbf{V}(B, E) + \mathbf{V}(E, S)$ (5)

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

$= \overrightarrow{PR}$

$QS = \frac{u}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{u}{4}$

$\therefore SR = \frac{3u}{4}$

$SP = \frac{u}{2} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}u}{4}$

$\tan\alpha = \frac{SR}{SP} = \frac{3u}{4} \times \frac{4}{\sqrt{3}u} = \sqrt{3}$ (5) + (5)

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$ (5)

∴ බෝට්ටුවට නැව අල්ලා ගත හැකිය.

40

$Q\hat{P}R = \frac{\pi}{2}$

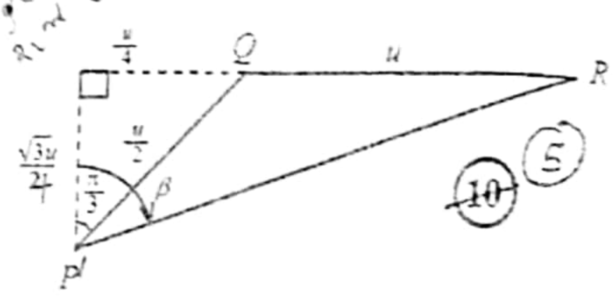
$\therefore PR = \frac{\sqrt{3}u}{2}$ (5)

$t = \frac{d}{PR} = \frac{2d}{\sqrt{3}u}$ (5)

10

Scanned with CamScanner

(ii) $\mathbf{V}(B, E) =$ (5)



$\mathbf{V}(B, S) = \mathbf{V}(B, E) + \mathbf{V}(E, S)$

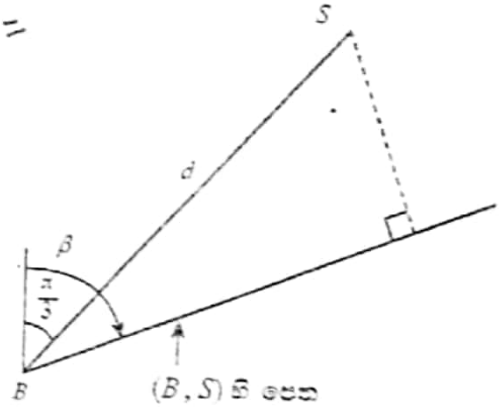
$= \overrightarrow{P'Q} + \overrightarrow{QR}$

$= \overrightarrow{P'R}$

$\overrightarrow{P'R} =$

ඉහළ ත්‍රිකෝණයෙන්,

$\sin\beta = \dfrac{5}{2\sqrt{7}}$ හා $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ වේ.



කෙටිම දුර $= d\sin\left(\beta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ (5)

$= d\left(\sin\beta\cos\dfrac{\pi}{3} - \cos\beta\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ (5)

$= d\left(\dfrac{5}{4\sqrt{7}} - \dfrac{3}{4\sqrt{7}}\right)$

$= \dfrac{d}{2\sqrt{7}}$ (5)

30

$(P'R)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}u}{4}\right)^2 + \left(u + \dfrac{u}{4}\right)^2$ — (05)

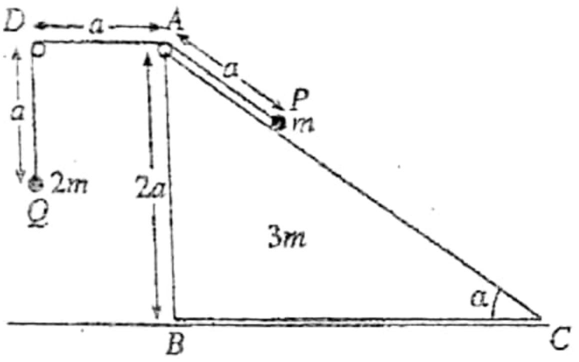
$= \dfrac{3u^2}{16} + \dfrac{25u^2}{16}$

$= \dfrac{28u^2}{16} = \dfrac{7u^2}{4}$

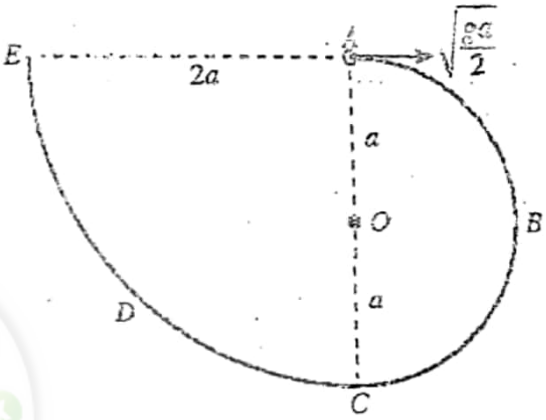
$P'R = \dfrac{\sqrt{7}u}{2}$ — (05)

Scanned with CamScanner

12.(a) රූපයෙහි ABC ත්‍රිකෝණය, $A\hat{C}B = \alpha$, $A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$ හා $AB = 2a$ වූ BC අඩංගු මුහුණත සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත තබන ලද ස්කන්ධය $3m$ වන සුමට ඒකාකාර කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය තුළින් වූ සිරස් හරස්කඩ වේ. AC රේඛාව, එය අඩංගු මුහුණතෙහි උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් වේ. D ලක්ෂ්‍යය, AD තිරස් වන පරිදි ABC තලයෙහි වූ අචල ලක්ෂ්‍යයකි. A හා D හි සවිකර ඇති සුමට කුඩා කප්පි දෙකක් මතින් යන දිග $3a$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට පිළිවෙළින් ස්කන්ධය m හා $2m$ වූ P හා Q අංශු දෙක ඈඳා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි P අංශුව AC මත අල්වා තබා $AP = AD = DQ = a$ වන පරිදි Q අංශුව නිදහසේ එල්ලෙමින් පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. Q අංශුව ගෙබිමට ළඟා වීමට ගන්නා කාලය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබා ගන්න.



(b) රූපයේ දැක්වෙන පරිදි $ABCDE$ සුමට තුනී කම්බියක් සිරස් තලයක සවි කර ඇත. ABC කොටස O කේන්ද්‍රය හා අරය a වූ අර්ධ වෘත්තයක් වන අතර CDE කොටස කේන්ද්‍රය A හා අරය $2a$ වූ වෘත්තයකින් කාලරෙන් කොටසකි. A හා C ලක්ෂ්‍ය O හරහා යන සිරස් රේඛාවේ පිහිටන අතර, AE රේඛාව තිරස් වේ. ස්කන්ධය m වූ කුඩා සුමට P පබළුවක් A හි තබා තිරස්ව $\sqrt{\frac{ga}{2}}$ ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබන අතර එය කම්බිය දිගේ චලිතය ආරම්භ කරයි.

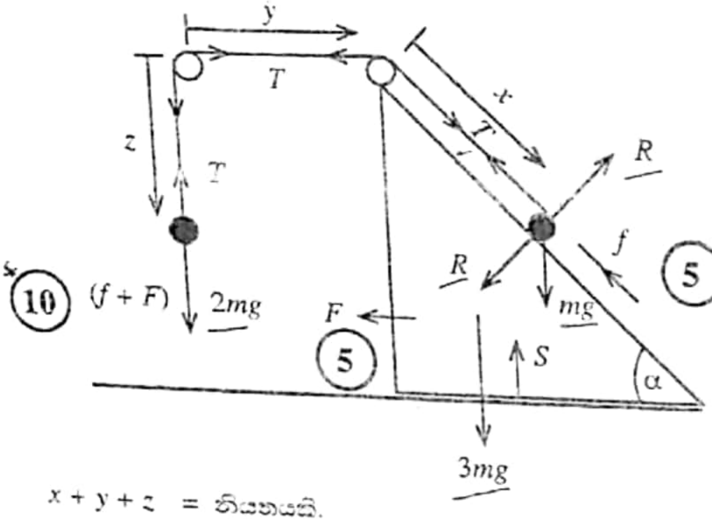


$\overrightarrow{OA}$ සමඟ θ $(0 \le \theta \le \pi)$ කෝණයක් $\overrightarrow{OP}$ සාදන විට P පබළුවේ v වේගය, $v^2 = \frac{ga}{2}(5 - 4\cos\theta)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඉහත පිහිටීමේ දී කම්බිය මගින් P පබළුව මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයා, P පබළුව $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$ වූ ලක්ෂ්‍යය පසු කරන විට එය එහි දිශාව වෙනස් කරන බව පෙන්වන්න.

P පබළුව E හි දී කම්බියෙන් ඉවත් වීමට මොහොතකට පෙර එහි ප්‍රවේගය ලියා දක්වා එම මොහොතේ දී කම්බිය මගින් P පබළුව මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

(a)



බල (15)

කුඤ්ඤයේ කාර්ය
අංශු ... බල
S නැතුව ඉතිරි බල
R නැති නම් (−5) ...
Less S

$x + y + z$ = නියතයකි.

$\ddot{z} = -\ddot{x} - \ddot{y}$

$= f + F$

$f + F$ වෙනුවට f ... දැම්මොත් ...

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

(2m) $\downarrow$ සඳහා $2mg - T = 2m(f + F)$ (10) or 0

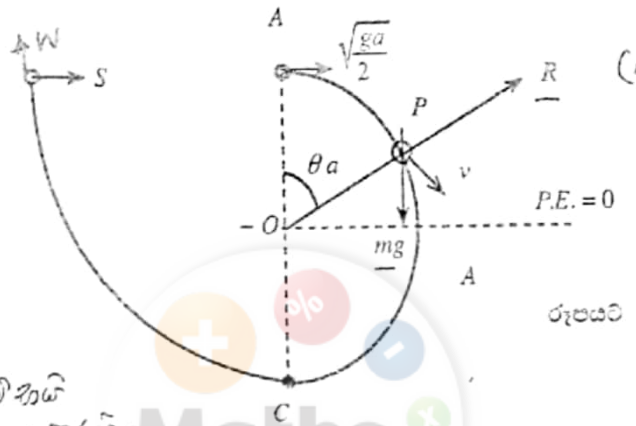
(m) $\nwarrow$ සඳහා $T - mg\sin\alpha = m(f + F\cos\alpha)$ (10) or zero

(m) හා (3m) $\leftarrow$ සඳහා $T = 3mF + m(F + f\cos\alpha)$ (15) or zero.

(2m) $\downarrow$ $S = ut + \frac{1}{2}at^2$

$a = \frac{1}{2}(f + F)t^2$, මෙහි t යනු ගන්නා කාලය වේ. (10) **80**

(b)



රූපයට (10) or zero

ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන් P.E. + K.E. + සමීකරණය (5) (5) (5)

$\frac{1}{2}mv^2 + mga\cos\theta = \frac{1}{2}m\left(\frac{ga}{2}\right) + mga.$

$\therefore\ 2v^2 + 4ga\cos\theta = 5ga$

$\therefore\ v^2 = \frac{ga}{2}(5 - 4\cos\theta)$ (5) **30**

වෘත්ත චලිතය සඳහා $\underline{F} = m\underline{a}$ $\nearrow$ යෙදීමෙන්

$R - mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{a}$ (10) or zero

$R = mg\cos\theta - \frac{mg}{2}(5 - 4\cos\theta)$ (5)

$= \frac{mg}{2}(6\cos\theta - 5)$

$0 < \theta < \alpha$; $R > 0$ හා $\alpha < \theta < \pi$; $R < 0$ මෙහි $\cos\alpha = \frac{5}{6}$ (5)

ඒ නයින්, පබළුව $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$ ලක්ෂ්‍යය පසු කරන විට ප්‍රතික්‍රියාව එහි දිශාව වෙනස් කර ගනියි. **20**

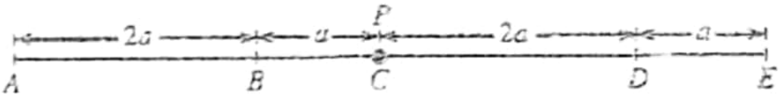
E හිදී ප්‍රවේගය w ලෙස ගනිමු.

A සිට E දක්වා ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්. $w = \sqrt{\frac{ga}{2}}\ \uparrow$. (10)

$\underline{F} = m\underline{a}$ $\longrightarrow$ යෙදීමෙන් (5)

$S = \frac{mw^2}{2a} = \frac{m\left(\sqrt{\frac{ga}{2}}\right)^2}{2a} = \frac{mg}{4}$ (5) **20**

13. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි $AB = 2a, BC = a, CD = 2a$ හා $DE = a$ වන පරිදි පුම්ට තිරස් මේසයක් මත A, B, C, D හා E ලක්ෂ්‍ය එම පිළිවෙළින් සරල රේඛාවක් මත පිහිටා ඇත.



ස්වභාවික දිග $2a$ හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය kmg වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් A ලක්ෂ්‍යයට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වන P අංශුවකට ඈඳා ඇත. ස්වභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය mg වන තවත් සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් E ලක්ෂ්‍යයට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර P අංශුවට ඈඳා ඇත.

P අංශුව C හි අල්ලා තබා මුදා හල විට, එය සමතුලිතතාවේ පවතී. k හි අගය සොයන්න.

දැන්, P අංශුව D ලක්ෂ්‍යයට ළඟා වන තෙක් AP තන්තුව ඇද නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. D සිට B දක්වා P හි චලිත සමීකරණය $\ddot{x} + \frac{3g}{a}x = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $CP = x$ වේ. $\dot{x}^2 = \frac{3g}{a}(c^2 - x^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් P අංශුව B ට ළඟා වන විට එහි ප්‍රවේගය $3\sqrt{ga}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි c යනු විස්තාරය වේ.

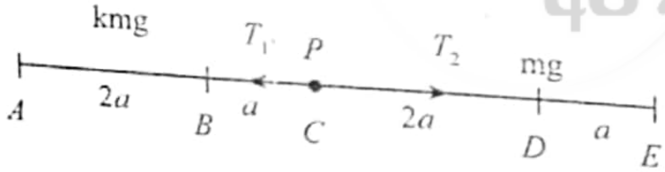
P අංශුව B වෙත ළඟා වන විට එයට ආවේගයක් දෙනු ලබන්නේ ආවේගයෙන් මොහොතකට පසු P හි ප්‍රවේගය $\overrightarrow{BA}$ දිශාවට $\sqrt{ag}$ වන පරිදි ය.

B පසු කිරීමෙන් පසු ක්ෂණික නිසලතාවට පත්වන තෙක් P හි චලිත සමීකරණය $\ddot{y} + \frac{g}{a}y = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $DP = y$ වේ.

D වලින් පටන් ගත් P අංශුව දෙවන වතාවට B වෙත පැමිණීමට ගන්නා මුළු කාලය $2\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right)$ බව පෙන්වන්න.

Maths අපි .com

13.



C හිදී P සමතුලිතතාවයේ පවතී.

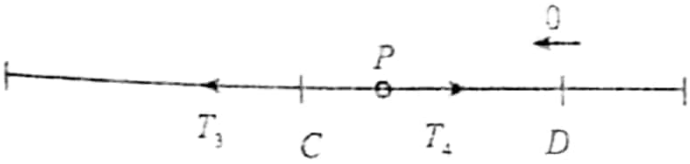
$\therefore\ T_1 - T_2 = 0$ (5)

$\therefore\ kmg \cdot \frac{a}{2a} = mg \cdot \frac{2a}{a}$ (10)

$\therefore\ k = 4$ (5)

20

Scanned with CamScanner



$\rightarrow \underline{F} = m\underline{a}$ (P) සඳහා :

$-T_3 + T_4 = m\ddot{x}$

$\therefore \quad -4mg.\dfrac{(a+x)}{2a} + mg.\dfrac{(2a-x)}{a} = m\ddot{x}$ (5) (5) (10) or zero

එවිට, $\dfrac{g}{a}\left\{-2a-2x+2a-x\right\} = \ddot{x}$.

$\therefore \quad \ddot{x} = \dfrac{-3g}{a}x$ (5)

$\therefore \quad \ddot{x} + \dfrac{3g}{a}x = 0$

මෙය $-a \le x \le 2a$ සඳහා වලංගු වේ.

25

මෙම ස. අ. ච. සඳහා කේන්ද්‍රය C ද $x = 2a$ වන විට $\dot{x} = 0$ වේ. (5)

$\ddot{x} = 0$ දී කේන්ද්‍රය
$F = 0$

$\therefore$ මෙම ස. අ. ච. හි විස්තාරය $2a$ වේ. (5)

$\therefore \quad \dot{x}^2 = \dfrac{3g}{a}(4a^2 - x^2)$ (5)

$B\ (x = -a)$ හි දී ප්‍රවේගය v යැයි ගනිමු.

එවිට $v^2 = \dfrac{3g}{a}(4a^2 - a^2)$ (5)

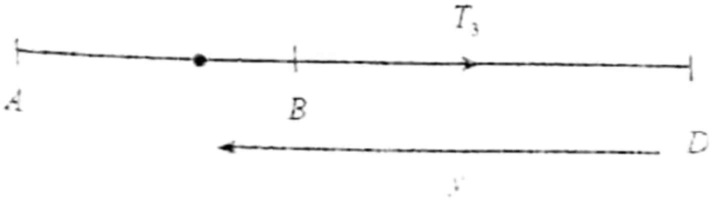
$= 9ga$

$v = 3\sqrt{ga}$ (5)

$\therefore$ P අංශුව පළමුවරට B ට ළඟාවන විට ප්‍රවේගය $3\sqrt{ga}$ $\leftarrow$ වේ.

25

ආවේගය නිසා, ආවේගයට මොහොතකට පසු ප්‍රවේගය $\sqrt{ga}$ වේ.



F = ma

$-T_1' = m\ddot{y}$ (5)

$-mg\frac{y}{a} = m\ddot{y}$ (5)

$\ddot{y} = 0$ වන විට $y = 0$

$y = 0$ දී කේන්ද්‍රය

$\therefore \ddot{y} = -\frac{g}{a}y$

හෝ $\ddot{y} + \frac{g}{a}y = 0$ (5)

15

මෙම ස. අ. ච. හි කේන්ද්‍රය D වේ. (5)

විස්තාරය c යැයි ගනිමු.

එවිට, $\dot{y}^2 = \frac{g}{a}(c_1^2 - y^2)$

$y = 3a$ වන විට $\dot{y} = \sqrt{ga}$ (5)

$ga = \frac{g}{a}(c_1^2 - 9a^2)$. (5)

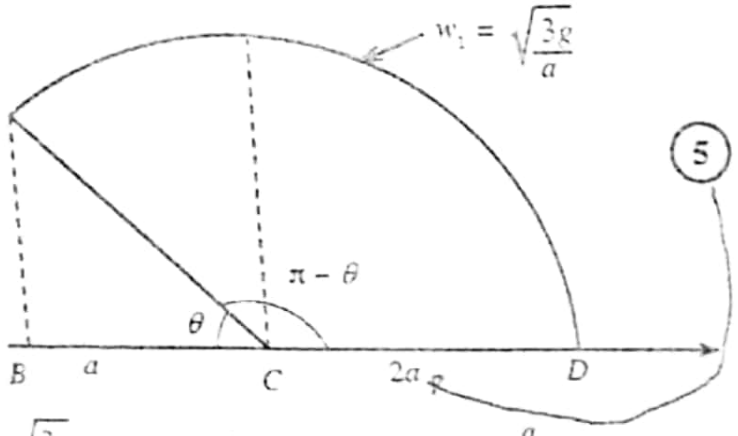
$\therefore c_1^2 = 10a^2$

$\therefore c_1 = \sqrt{10}\,a$ (5)

$3a < \underbrace{\sqrt{10}\,a}_{c} < 5a$ නිසා, P අංශුව B හා A අතර F ලක්ෂ්‍යයකදී ක්ෂණික නිසලතාවට පත්වේ.

20

D සිට B ට ගන්නා ලද කාලය τ_1 යැයි ගනිමු.



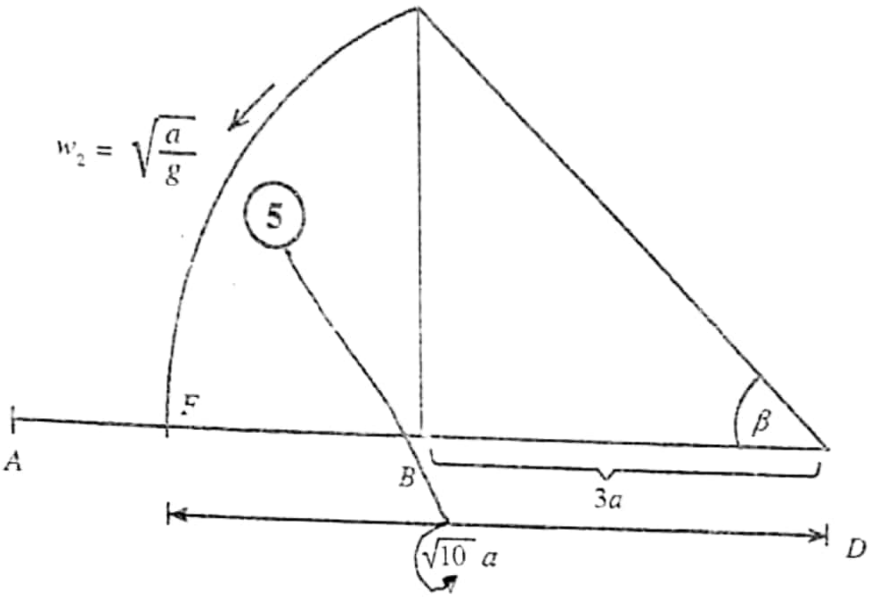
$\sqrt{\frac{3g}{a}}\,\tau_1 = \pi - \theta$. (5) මෙහි $\cos\theta = \frac{a}{2a}$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ (5)

Scanned with CamScanner

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{g}{3g}} \times \frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{a}{g}} \quad (5)$$



B සිට F ට ගන්නා ලද කාලය τ_2 යැයි ගනිමු.

$$\sqrt{\frac{g}{a}}\,\tau_2 = \beta \quad (5) \qquad \text{හා} \qquad \cos\beta = \frac{3a}{\sqrt{10}\,a}$$

$$\therefore \tau_2 = \sqrt{\frac{a}{g}}\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \quad (5) \qquad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

F සිට B ට ගන්නා ලද කාලය τ_3 යැයි ගනිමු. (දෙවන වතාවට B ට පැමිණීම.)

$$\tau_3 = \tau_2$$

$\therefore$ අවශ්‍ය කාලය $= \tau_1 + 2\tau_2$ (5)

$$= 2\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right\} \quad (5)$$

45

Scanned with CamScanner

14. (a) $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ යනු ඒකක දෛශික දෙකක් යැයි ගනිමු.

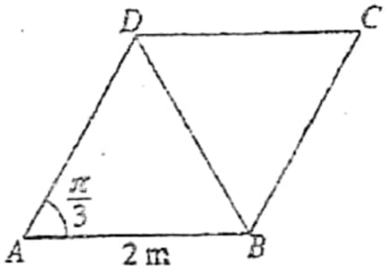
O මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A, B හා C ලක්ෂ්‍ය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $12\mathbf{a}$, $18\mathbf{b}$ හා $10\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ වේ.

$\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ ඇසුරෙන් $\overrightarrow{AC}$ හා $\overrightarrow{CB}$ ප්‍රකාශ කරන්න.

A, B හා C ඒක රේඛීය බව අපෝහනය කර, $AC : CB$ සොයන්න.

$OC = \sqrt{139}$ බව දී ඇත. $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(b) $ABCD$ යනු $AB = 2$ m හා $B\hat{A}D = \frac{\pi}{3}$ වූ රොම්බසයකි. විශාලත්වය 10 N, 2 N, 6 N, P N හා Q N වූ බල පිළිවෙළින් AD, BA, BD, DC හා CB දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය 10 N ද එහි දිශාව BC ට සමාන්තර B සිට C දෙසට වූ දිශාව බව ද දී ඇත. P හා Q හි අගයන් සොයන්න.



සම්ප්‍රයුක්ත බලයෙහි ක්‍රියා රේඛාව, දික් කරන ලද BA හමුවන ලක්ෂ්‍යයට A සිට ඇති දුර ද සොයන්න.

දැන්, සම්ප්‍රයුක්ත බලය A හා C ලක්ෂ්‍ය හරහා යන පරිදි වාමාවර්ත අතට ක්‍රියා කරන ඝූර්ණය M Nm වූ යුග්මයක් ද CB හා DC දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරන එක එකෙහි විශාලත්වය F N වූ බල දෙකක් ද පද්ධතියට එකතු කරනු ලැබේ. F හා M හි අගයන් සොයන්න.

Maths අපි.com

(a)

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$$

$$= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \quad (5)$$

$$= 10\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 12\mathbf{a}$$

$$= -2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \quad (5)$$

$$= 18\mathbf{b} - (10\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) = -10\mathbf{a} + 15\mathbf{b} \quad (5)$$

දෛශික ලකුණ දී ලම නැතිනම් ලකුණක් අඩු කරයි.

20

$$\overrightarrow{CB} = 5\overrightarrow{AC} \quad (5)$$

$\therefore$ A, B හා C ඒක රේඛීය වන අතර, (5)

$AC : CB = 1 : 5$ (5)

15

Scanned with CamScanner

$OC = \sqrt{139} \Rightarrow \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} = 139$ (5)

$(10\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (10\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) = 139$ (5)

$100\,|\mathbf{a}|^2 + 60\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 9\,|\mathbf{b}|^2 = 139$ (5)

$60\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 30$

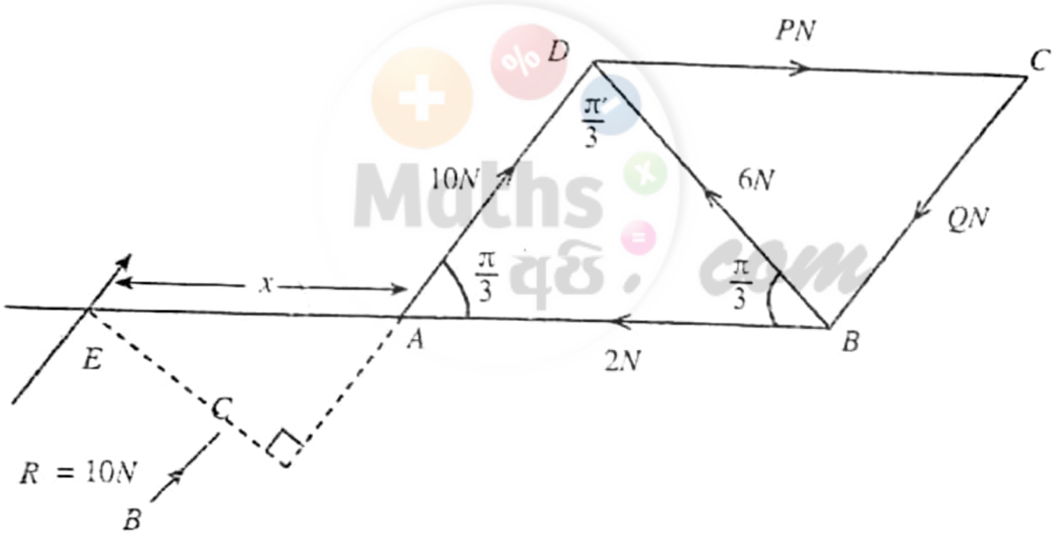
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}$ (5)

$|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\ \cos A\hat{O}B = \frac{1}{2}$ (5)

$\therefore A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ (5)

30

(b)



or zero
(10)

$\uparrow\ 10 \sin \frac{\pi}{3} = 10 \sin \frac{\pi}{3} - Q \sin \frac{\pi}{3} - 6 \sin \frac{\pi}{3}$ (10)

$\therefore Q = 6$ (5)

$\rightarrow\ 10 \cos \frac{\pi}{3} = P - 2 - 6 \cos \frac{\pi}{3} - 6 \cos \frac{\pi}{3} + 10 \cos \frac{\pi}{3}$ (10)

$\therefore P = 8$ (5)

$\frac{20}{40}$

40

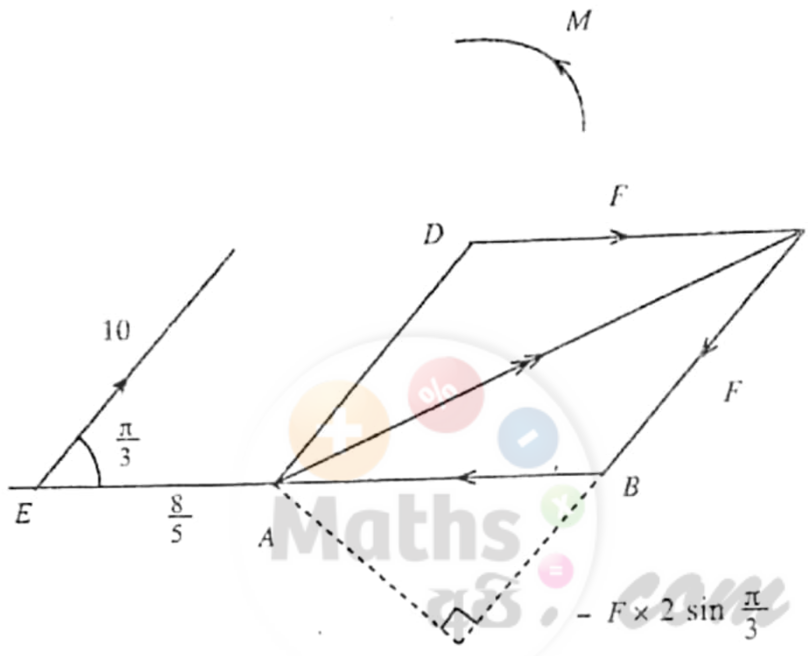
Scanned with CamScanner

$E \curvearrowright$ $\quad 10x \sin\frac{\pi}{3} - 6x\,(2+x)\sin\frac{\pi}{3} - 8x2\sin\frac{\pi}{3} + 6\,(2+x)\sin\frac{\pi}{3} = 0$ (10) or zero

$\therefore 10x\frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

$\therefore x = \frac{8}{5}$ m (5)

15



$A \curvearrowright$ $\quad -10 \times \frac{8}{5}\sin\frac{\pi}{3} + M - F \times 2\sin\frac{\pi}{3} = 0$ (10) or zero

Method marks given
answer marks not given

$M = F \times 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$ (5)

$C \curvearrowright$ $\quad M - 10\left(2 + \frac{8}{5}\right)\sin\frac{\pi}{3} = 0$ (5)

$M = 10 \times \frac{18}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

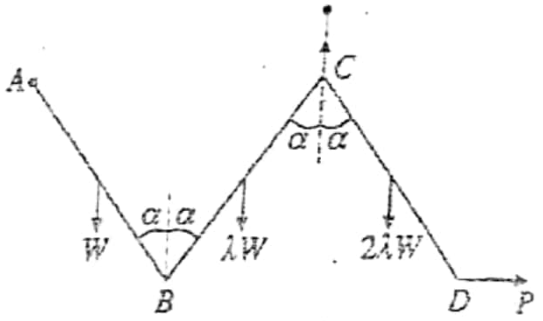
$= 18\sqrt{3}$ (5)

$F = \dfrac{18\sqrt{3} - 8\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 5.$ (5)

30

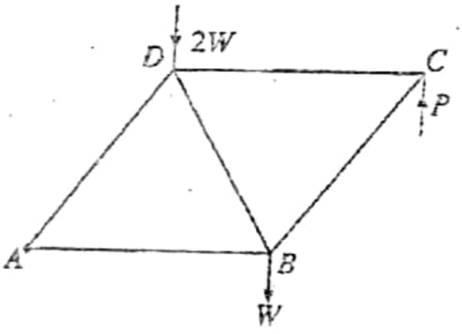
Scanned with CamScanner

15.(a) එක එකෙහි දිග $2a$ වන AB, BC හා CD ඒකාකාර දඬු තුනක් B හා C අන්තවල දී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB, BC හා CD දඬුවල බර පිළිවෙළින් $W, \lambda W$ හා $2\lambda W$ වේ. A කෙළවර අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි දඬු සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්තේ A හා C එකම තිරස් මට්ටමේ ද දඬු එක එකක් සිරස සමඟ α කෝණයක් සාදන පරිදි ද C සන්ධියට හා C ට සිරස්ව ඉහළින් වූ අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් හා D අන්තයට යෙදූ තිරස් P බලයක් මගිනි. $\lambda = \frac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න.



B හි දී CB මගින් AB මත ඇති කරන බලයේ තිරස් හා සිරස් සංරචක පිළිවෙළින් $\frac{W}{3}\tan\alpha$ හා $\frac{W}{6}$ බව ද පෙන්වන්න.

(b) යාබද රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ල සාදා ඇත්තේ A, B, C හා D හි දී නිදහසේ සන්ධි කරන ලද එක එකෙහි දිග $2a$ වන AB, BC, CD, DA හා BD සැහැල්ලු දඬු මගිනි. B හා D හි දී පිළිවෙළින් W හා $2W$ වන භාර ඇත. රාමු සැකිල්ල A හි දී සුමටව අචල ලක්ෂ්‍යයකට අසව් කර AB තිරස්ව ඇතිව සමතුලිතතාවේ තබා ඇත්තේ C හි දී සිරස්ව ඉහළට යොදන ලද P බලයක් මගිනි. W ඇසුරෙන් P හි අගය සොයන්න.



බෝ අංකනය භාවිතයෙන්, ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ ඒ නයින්, දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න සඳහන් කරමින් ඒවා සොයන්න.

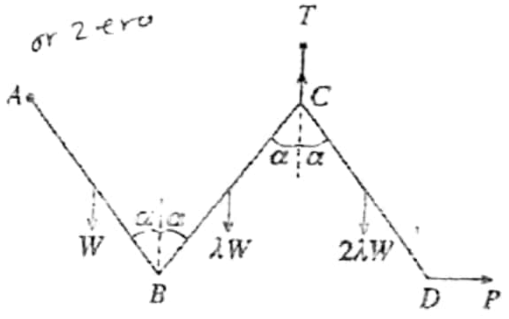
Maths අපි .com

(a) CD සඳහා C වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$C \curvearrowright \quad 2\lambda Wa \sin\alpha - P\, 2a\cos\alpha = 0$ (5)

or 2 zero

$\therefore P = \lambda W \tan\alpha$ (5)



BC හා CD සඳහා B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$B \curvearrowright \quad \lambda Wa\sin\alpha - T\, 2a\sin\alpha + 2\lambda W\, 3a\sin\alpha = 0$ (10) or 2 zero

$\therefore T = \frac{7}{2}\lambda W$ (5)

Scanned with CamScanner

AB, BC හා CD සඳහා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$A \curvearrowright \quad Wa\sin\alpha + \lambda W\,3a\sin\alpha - T\,4a\sin\alpha + 2\lambda W\,5a\sin\alpha - P\,2a\cos\alpha = 0$ (10)

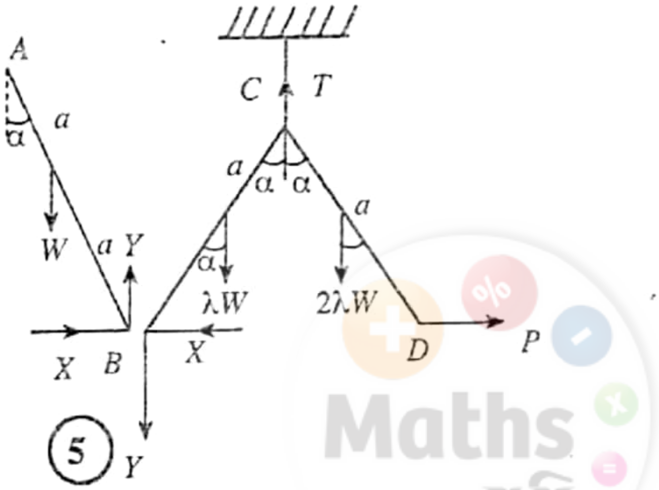
or zero

$W\sin\alpha + 13\lambda W\sin\alpha - 14\lambda W\sin\alpha - \lambda W\tan\alpha\; 2\cos\alpha = 0$ (5)

$1 - \lambda - 2\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$ (5)

45



Maths අපි.com

BC හා CD සඳහා

$\uparrow \quad Y + 3\lambda W - T = 0$

$\therefore Y = \frac{7}{2}\lambda W - 3\lambda W$ (5)

$= \frac{\lambda W}{2}$

$= \frac{W}{6}$

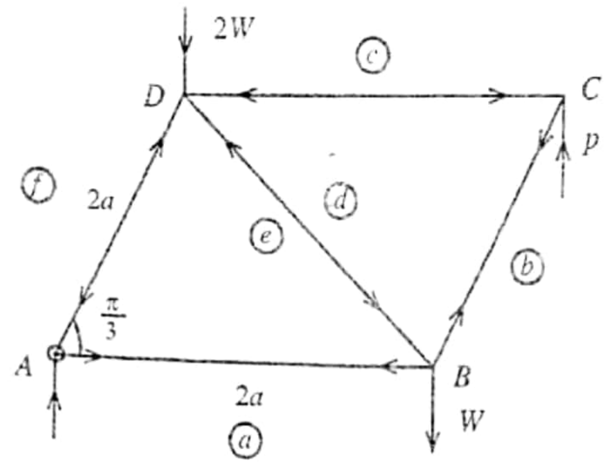
$\longleftarrow \quad X - P = 0$

$\therefore X = \frac{1}{3} W\tan\alpha$ (5)

15

Scanned with CamScanner

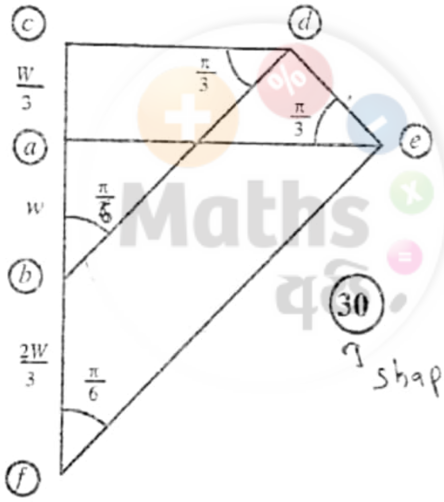
(b)



A ↻ $2Wa + W\,2a - P\,3a = 0$

$\therefore\ P = \frac{4W}{3}$ (10)

10



(30)

(එක් එක් සන්ධිය සඳහා 10)

30

දණ්ඩ	ආතතිය	තෙරපුම
AB	$\frac{5\sqrt{3}\,W}{9}$	–
BC	$\frac{8\sqrt{3}\,W}{9}$	–
CD	–	$\frac{4\sqrt{3}\,W}{9}$
DA	–	$\frac{10\sqrt{3}\,W}{9}$
BD	–	$\frac{2\sqrt{3}\,W}{9}$

(5) + (5)
(5) + (5)
(5) + (5)
(5) + (5)
(5) + (5)

50

Scanned with CamScanner

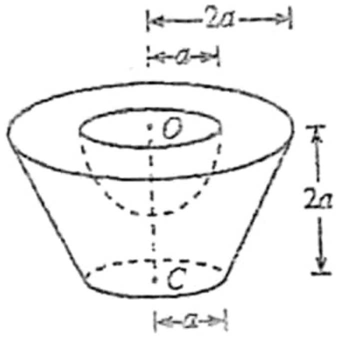
16. (i) පතුලේ අරය r හා උස h වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය පතුලේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{h}{4}$ දුරකින් ද

(ii) අරය r වන ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3r}{8}$ දුරකින් ද

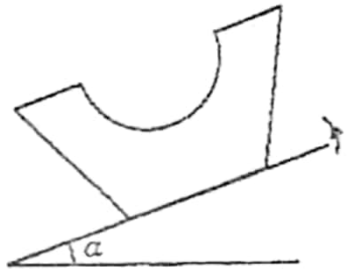
පිහිටන බව පෙන්වන්න.

පතුලේ අරය $2a$ හා උස $4a$ වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්ත කේතුවක ඡින්නකයකින් ඝන අර්ධ ගෝලයක් ඉවත් කර සාදා ඇති S වංගෙඩියක් යාබද රූපයේ දැක්වේ. ඡින්නකයේ ඉහළ වෘත්තාකාර මුහුණතේ අරය හා කේන්ද්‍රය පිළිවෙළින් $2a$ හා O වන අතර පහළ වෘත්තාකාර මුහුණත සඳහා ඒවා පිළිවෙළින් a හා C වේ. ඡින්නකයේ උස $2a$ වේ. ඉවත් කළ ඝන අර්ධ ගෝලයෙහි අරය හා කේන්ද්‍රය පිළිවෙළින් a හා O වේ.

S වංගෙඩියේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{41}{48}a$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

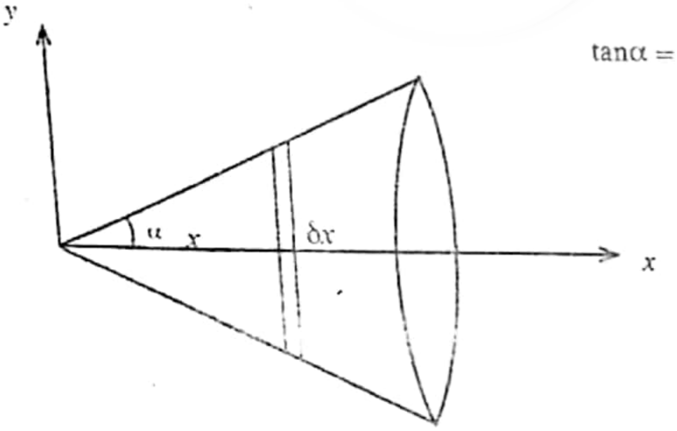


S වංගෙඩිය, එහි පහළ වෘත්තාකාර මුහුණත, තලය ස්පර්ශ කරමින් රළු තිරස් තලයක් මත තබා ඇත. දැන්, තලය සෙමෙන් උඩු අතට ඇල කරනු ලැබේ. වංගෙඩිය හා තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය 0.9 වේ. $\alpha < \tan^{-1}(0.9)$ නම්, වංගෙඩිය සමතුලිතතාවේ පවතින බව පෙන්වන්න; මෙහි α යනු තලයේ තිරසට ආනතිය වේ.



Maths අපි.com

(i) <u>ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්ත කේතුව</u>



$\tan\alpha = \frac{r}{h}$

සමමිතියට අනුව ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි. (5)

$\delta m = \pi (x\tan\alpha)^2\, \delta x\, \rho$, මෙහි ρ යනු ඝනත්වයයි.

Scanned with CamScanner

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h \pi \tan^2\alpha \, \rho x^2 . x \, dx}{\int_0^h \pi \tan^2\alpha \, \rho x^2 \, dx} \quad (5) \quad (5)$$

$$= \frac{\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^h}{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h} \quad (5) \quad (5)$$

$$= \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{3h}{4}.$$

∴ පතුලේ කේන්ද්‍රයේ සිට දුර $= h - \frac{3h}{4}$

$$= \frac{h}{4} \quad (5)$$

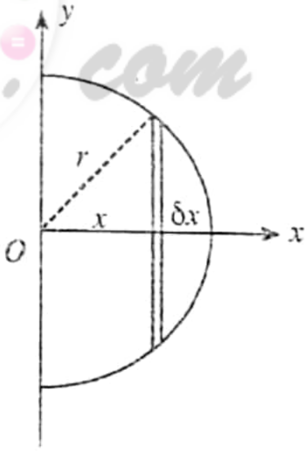
30

(i) ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලය

සමමිතිය අනුව ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි. (5)

$\delta m = \pi (r^2 - x^2) \, \delta x \, \sigma,$

මෙහි σ යනු ඝනත්වයයි.



$$\bar{x} = \frac{\int_0^r \pi (r^2 - x^2) \sigma x \, dx}{\int_0^r \pi (r^2 - x^2) \sigma \, dx} \quad (5) \quad (5)$$

$$= \frac{\left.\left(\frac{r^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\right|_0^r}{\left.\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^r} \quad (5) \quad (5)$$

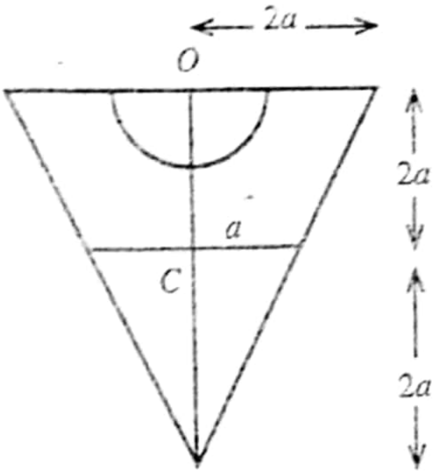
$$= \frac{\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4}}{r^3 - \frac{r^3}{3}}$$

$$= \frac{3r}{8} \quad (5)$$

30

Maths අපි .com

Scanned with CamScanner



ඝනත්වය ρ

වස්තුව	ස්කන්ධය	O සිට දුර ↓
	$\frac{16}{3}\pi a^3\rho$ (5)	a (5)
	$\frac{2}{3}\pi a^3\rho$ (5)	$\frac{5a}{2}$ (5)
	$\frac{2}{3}\pi a^3\rho$ (5)	$\frac{3a}{8}$ (5)
	$4\pi a^3\rho$ (5)	$\bar{x}$

සමමිතිය අනුව ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත පිහිටයි. (5)

$$4\pi a^3\rho\,\bar{x} = \frac{16}{3}\pi a^3\rho a - \frac{2}{3}\pi a^3\rho\,\frac{5a}{2} - \frac{2}{3}\pi a^3\rho a\,\frac{3a}{8}$$ (20)

1 වැරැද්දට (−5)
for 2 mistakes deduct (−10) marks

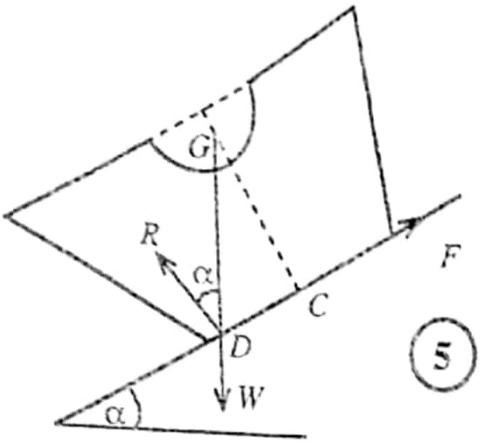
$$4\bar{x} = \frac{16}{3}a - \frac{5a}{2} - \frac{a}{4}$$

for 3 mistakes → no marks

$$\bar{x} = \frac{41a}{48}$$ (5)

65

Scanned with CamScanner



(5) ← බල

ලිස්සා යාම වැළැක්වීමට

$\mu \geq \tan\alpha$

$\therefore 0.9 \geq \tan\alpha$ (10)

එනම්, $\alpha \leq \tan^{-1}(0.9)$

(20)

පෙරළීම වැළැක්වීමට

$CD < a$

$\therefore CG \tan\alpha < a.$

එනම්, $\frac{55a}{48} \tan\alpha < a$ (10)

එනම්, $\alpha < \tan^{-1}\left(\frac{48}{55}\right)$

25

ලිස්සීමට හෝ පෙරළීමට 2 න් 1 ක් වත් ලියා ඇත්නම් ඉ - (20) දෙයි.

Maths අභි .com

Scanned with CamScanner

7.(a) එක්තරා කර්මාන්තශාලාවක අයිතමවලින් 50% ක් A යන්ත්‍රය නිපදවන අතර ඉතිරිය B හා C යන්ත්‍ර මගින් නිපදවනු ලැබේ. A, B හා C යන්ත්‍ර මගින් නිපදවනු ලබන අයිතමවලින් පිළිවෙළින් 1%, 3% හා 2% ක් දෝෂ සහිත බව දනිමු. සසම්භාවීව තෝරාගත් අයිතමයක් දෝෂ සහිත වීමේ සම්භාවිතාව 0.018 බව දී ඇත. B හා C යන්ත්‍ර මගින් නිපදවනු ලබන අයිතමවල ප්‍රතිශත සොයන්න.

සසම්භාවී ලෙස තෝරාගත් අයිතමයක් දෝෂ සහිත බව දී ඇති විට, එය A යන්ත්‍රය මගින් නිපදවන ලද එකක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b) එක්තරා කර්මාන්තශාලාවක සේවකයින් 100 දෙනකු තම නිවසේ සිට සේවා ස්ථානයට ගමන් කිරීමට ගනු ලබන කාලය (මිනිත්තුවලින්) පහත වගුවේ දී ඇත:

ගනු ලබන කාලය	සේවකයින් ගණන
0 – 20	10
20 – 40	30
40 – 60	40
60 – 80	10
80 – 100	10

ඉහත දී ඇති ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය, සම්මත අපගමනය හා මාතය නිමානය කරන්න.

පසුව, 80 – 100 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සිටි සියලු ම සේවකයින් කර්මාන්තශාලාව ආසන්නයේ පදිංචියට ගොස් ඇත. එයින්, 80 – 100 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සංඛ්‍යාතය 10 සිට 0 දක්වා ද 0 – 20 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සංඛ්‍යාතය 10 සිට 20 දක්වා ද වෙනස් විය.

නව ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය, සම්මත අපගමනය හා මාතය නිමානය කරන්න.

Maths අපි.com

(a)

	A	B	C
නිෂ්පාදන සම්භාවිතාව	$\frac{1}{2}$	p	$\frac{1}{2} - p$
දෝෂ ඇතිවීමේ සම්භාවිතාව	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{2}{100}$

D – සම්භාවිතාව තෝරාගත් අයිතමයක් දෝෂ සහිත එකක් වීම

$$P(D) = P(D/A)\,P(A) + P(D/B)\,P(B) + P(D/C)\,P(C)$$

$$0.018 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{100} \times p + \frac{2}{100} \times \left(\frac{1}{2} - p\right) \quad (10)$$

/ Total probability Th^m (05) Can be given then stop work. or zero

$$3.6 = 1 + 6p + 2 - 4p$$

$$\therefore p = 0.3 \quad (5)$$

$\therefore$ B යන්ත්‍රය මගින් නිපදවන ලද භාණ්ඩවල ප්‍රතිශතය 30% (5)

$\therefore$ C යන්ත්‍රය මගින් නිපදවන ලද භාණ්ඩවල ප්‍රතිශතය 20% (5)

25

Scanned with CamScanner

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)\,P(A)}{P(D)} \quad (10)$$

$$= \frac{\frac{1}{100} \times \frac{1}{2}}{0.018} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{100 \times 2}$$

$$= \frac{1}{\frac{18}{1000}}$$

$$= \frac{5}{18} \quad (5)$$

25

ගතවන කාලය	f	මධ්‍ය අගය x (5)	$y = \frac{1}{10}x$	y^2	fy (5)	fy^2 (5)
0 - 20	10	10	1	1	10	10
20 - 40	30	30	3	9	90	270
40 - 60	40	50	5	25	200	1000
60 - 80	10	70	7	49	70	490
80 - 100	10	90	9	81	90	810
	100				$\sum fy = 460$ (5)	$\sum fy^2 = 2580$ (5)

column එකක් වැරදි නම්
column marks will be not given.

$$\mu_y = \frac{\sum fy}{\sum f} = \frac{460}{100} = \frac{23}{5} \quad (5)$$

හා

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum fy^2}{\sum f} - \mu_y^2$$

$$= \frac{2580}{100} - \left(\frac{23}{5}\right)^2 \quad (5)$$

$$= \frac{116}{25}$$

$$\therefore \sigma_y = \sqrt{\frac{116}{25}} \quad (5)$$

$$= \frac{2\sqrt{29}}{5}$$

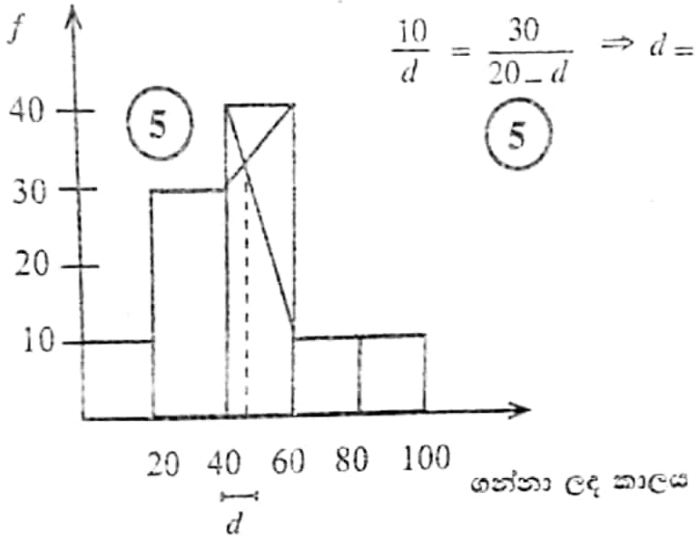
වැරදුන අනුව ක්‍රමයට ලකුණු දෙන්.

Scanned with CamScanner

$\therefore$ මධ්‍යනය $\mu_x = 10\mu_y = 10 \times \frac{23}{5} = 46$ (5)

$\therefore$ සම්මත අපගමනය $\sigma_x = 10\sigma_y = 10 \times \frac{2\sqrt{29}}{5} = 4\sqrt{29} \approx 21.54$ (5)

මාතය



$\frac{10}{d} = \frac{30}{20-d} \Rightarrow d = 5$ (5) $\therefore$ මාතය $= 40 + d = 45$ (5)

65

(b) නව ව්‍යාප්තිය සඳහා :

$$\mu_y = \frac{1}{100}\left[\sum_{1}^{5} fy - f_1 y_1 - f_5 y_5 + 20 \times 1\right]$$

$$= \frac{1}{100}[460 - 10 - 90 + 20] = \frac{380}{100}$$ (5)

$$= \frac{19}{5}$$

මේ ක්‍රමය නොකර Mean සොයාවිට ම - (10)

$\therefore$ නව මධ්‍යනය $= 10 \times \frac{19}{5} = 38$ (5)

$$\sigma_y^2 = \left[\sum_{1}^{5} fy^2 - f_1 y_1^2 - f_5 y_5^2 + 20 \times 1^2\right] - \left(\frac{19}{5}\right)^2$$

$$= \frac{1}{100}[2580 - 10 - 810 + 20] - \frac{361}{25}$$ (5)

$$= \frac{1780}{100} - \frac{361}{25}$$

$$= \frac{84}{25}$$

Method — 10
final answer — 05

Maths අපි.com

Scanned with CamScanner

$\therefore \quad \sigma_y = \frac{\sqrt{84}}{5} = \frac{2\sqrt{21}}{5}$ (5)

$\therefore$ නව සම්මත අපගමනය $= 10 \times \frac{2\sqrt{21}}{5} = 4\sqrt{21} \approx 18.33$ (5)

මාතය වෙනස් නොවේ. (10) ($\because$ මාත පන්තියේ දෙපස සංඛ්‍යාත වෙනස් නොවේ.)

35

Maths අපි. com

Scanned with CamScanner

පැරණි නිර්දේශය

Maths අපි.com

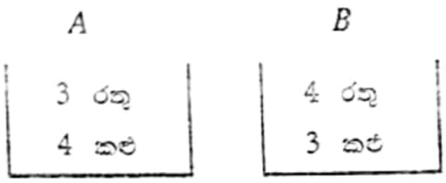
Scanned with CamScanner

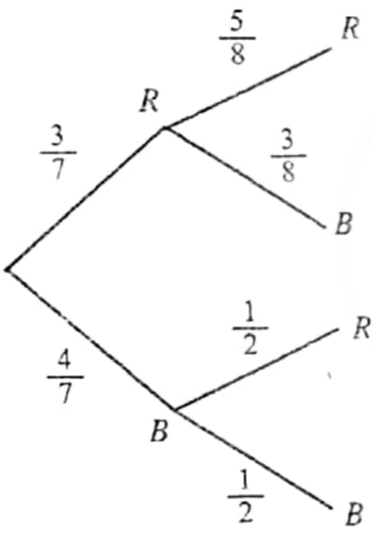
8. A බෑගයක රතු පාට බෝල 3 ක් හා කළු පාට බෝල 4 ක් ද තවත් B බෑගයක රතු පාට බෝල 4 ක් හා කළු පාට බෝල 3 ක් ඇත. A බෑගයේ හා B බෑගයේ ඇති බෝල, පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින්ම සමාන වේ. A බෑගයෙන් සසම්භාවී ලෙස බෝලයක් ඉවතට ගෙන B බෑගය තුළට දමනු ලැබේ. දැන්, B බෑගයෙන් සසම්භාවී ලෙස බෝලයක් ඉවතට ගනු ලැබේ.

(i) B බෑගයෙන් ඉවතට ගත් බෝලය කළු පාට එකක් වීමේ

(ii) A බෑගයෙන් ඉවතට ගත් බෝලය රතු පාට එකක් බව දී ඇති විට, B බෑගයෙන් ඉවතට ගත් බෝලය කළු පාට එකක් වීමේ

සම්භාවිතාව සොයන්න.





Maths අපි.com

(i) $P(B$ ගෙන් ගත් බෝලය කළු පාට එකක් වීම$) = \frac{3}{7} \times \frac{3}{8} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{56} + \frac{16}{56} = \frac{25}{56}$ (5) (5) (5)

(ii) $P(B$ ගෙන් කළු $|$ A ගෙන් රතු$) = \dfrac{P(B \text{ ගෙන් කළු හා } A \text{ ගෙන් රතු})}{P(A \text{ ගෙන් රතු})}$

$$= \frac{\frac{3}{7} \times \frac{3}{8}}{\frac{3}{7}}$$

$$= \frac{3}{8}$$ (10)

Scanned with CamScanner

10. සංඛ්‍යානය ප්‍රශ්න පත්‍රයකට පන්තියක සිටින සිසුන් විසින් ලබාගත් ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් 40 හා 15 වේ. $t = \frac{1}{3}(70+2x)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් මෙම ලකුණු පරිණාමනය කර ඇත; මෙහි x යනු මුල් ලකුණයි. පරිණාමනය කරන ලද ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය සොයන්න.
පරිණාමිත ලකුණුවල මධ්‍යස්ථය 55 වේ. මුල් ලකුණුවල මධ්‍යස්ථය සොයන්න.

$$\mu_t = \frac{1}{3}(70 + 2\mu_0) = \frac{1}{3}(70 + 80) = 50$$ (5) (5)

$$\sigma_t = \frac{2}{3}\sigma_0 = \frac{2}{3} \times 15 = 10$$ (5)

$$M_t = \frac{1}{3}(70 + 2M_0)$$ (5)

$$55 = \frac{1}{3}(70 + 2M_0)$$

$$M_0 = \frac{95}{2} = 47.5$$ (5)

25

Maths අපි.com

Scanned with CamScanner