නව නිර්දේශය/புதிய பாடத்திட்டம்/New Syllabus

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2020
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2020
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2020

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

※ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) $f(x)=x^2+px+c$ හා $g(x)=2x^2+qx+c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q\in\mathbb{R}$ හා $c>0$ වේ. $f(x)=0$ හා $g(x)=0$ සඳහා α පොදු මූලයක් ඇති බව දී ඇත. $\alpha=p-q$ බව පෙන්වන්න.

p හා q ඇසුරෙන් c සොයා,

(i) $p>0$ නම් $p<q<2p$ බව,

(ii) $f(x)=0$ හි විවේචකය $(3p-2q)^2$ බව

අපෝහනය කරන්න.

β හා γ යනු පිළිවෙළින් $f(x)=0$ හි හා $g(x)=0$ හි අනික් මූල යැයි ගනිමු. $\beta=2\gamma$ බව පෙන්වන්න.
තව ද β හා γ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $2x^2+3(2p-q)x+(2p-q)^2=0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(b) $h(x)=x^3+ax^2+bx+c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b, c\in\mathbb{R}$ වේ. x^2-1 යන්න $h(x)$ හි සාධකයක් බව දී ඇත. $b=-1$ බව පෙන්වන්න.

$h(x)$ යන්න x^2-2x මගින් බෙදූ විට ශේෂය $5x+k$ බව ද දී ඇත; මෙහි $k\in\mathbb{R}$ වේ. k හි අගය සොයා $h(x)$ යන්න $(x-\lambda)^2(x-\mu)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $\lambda, \mu\in\mathbb{R}$ වේ.

12. (a) පියානෝ වාදකයින් පස්දෙනකු, ගිටාර් වාදකයින් පස්දෙනකු, ගායිකාවන් තුන්දෙනකු හා ගායකයින් හත්දෙනකු අතුරෙන් **හරියටම** පියානෝ වාදකයින් දෙදෙනකු ද **අඩු තරමින්** ගිටාර් වාදකයින් හතරදෙනකු ද ඇතුළත් වන පරිදි සාමාජිකයන් එකොළොස්දෙනකුගෙන් සමන්විත සංගීත කණ්ඩායමක් තෝරා ගැනීමට අවශ්‍යව ඇත. තෝරා ගත හැකි එවැනි වෙනස් සංගීත කණ්ඩායම් ගණන සොයන්න.
මේවා අතුරෙන් හරියටම ගායිකාවන් දෙදෙනකු සිටින සංගීත කණ්ඩායම් ගණන ද සොයන්න.

(b) $r\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r=\dfrac{3r-2}{r(r+1)(r+2)}$ හා $V_r=\dfrac{A}{r+1}-\dfrac{B}{r}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $A, B\in\mathbb{R}$ වේ.

$r\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r=V_r-V_{r+1}$ වන පරිදි A හා B හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $n\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}U_r=\dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty}U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

දැන්, $r\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $W_r=U_{r+1}-2U_r$ යැයි ගනිමු. $\sum_{r=1}^{n}W_r=U_{n+1}-U_1-\sum_{r=1}^{n}U_r$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty}W_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව **අපෝහනය** කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} - \mathbf{I} = \mathbf{C}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

$\mathbf{C}^{-1}$ පවතින්නේ $a \neq 0$ **ම නම් පමණක්** බව ද පෙන්වන්න.

දැන්, $a = 1$ යැයි ගනිමු. $\mathbf{C}^{-1}$ ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{CPC} = 2\mathbf{I} + \mathbf{C}$ වන පරිදි $\mathbf{P}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(*b*) $z, w \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු. $|z|^2 = z\bar{z}$ බව පෙන්වා, එය $z - w$ ට යෙදීමෙන්

$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z\bar{w} + |w|^2$ බව පෙන්වන්න.

$|1 - z\bar{w}|^2$ සඳහා ද එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වා, $|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = -\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right)$ බව පෙන්වන්න.

$|w| = 1$ හා $z \neq w$ නම් $\left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $1+\sqrt{3}i$ යන්න $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වේ.

$(1+\sqrt{3}i)^m(1-\sqrt{3}i)^n = 2^8$ බව දී ඇත; මෙහි m හා n ධන නිඛිල වේ.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්, m හා n හි අගයන් නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබා ගන්න.

14. (*a*) $x \neq 3$ සඳහා $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq 3$ සඳහා $f'(x) = \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

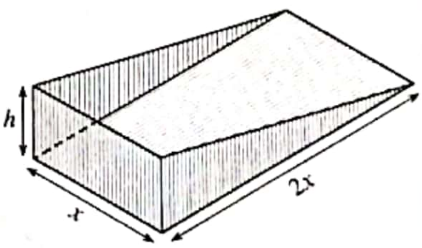
$f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

$x \neq 3$ සඳහා $f''(x) = \dfrac{18x}{(x-3)^4}$ **බව දී ඇත.**

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) යාබද රූපයෙන් දූවිලි එකතු කරනයක මිට රහිත කොටස දැක්වේ. සෙන්ටිමීටරවලින් එහි මාන රූපයේ දැක්වේ. එහි පරිමාව x^2h cm^3 යන්න 4500 cm^3 බව දී ඇත.
එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S cm^2 යන්න $S = 2x^2 + 3xh$ මගින් දෙනු ලැබේ. S අවම වන්නේ $x = 15$ වන විට බව පෙන්වන්න.



15.(a) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^3 + 13x - 16 = A(x^2+9)(x+1) + B(x^2+9) + 2(x+1)^2$

වන පරිදි A හා B නියත පවතින බව දී ඇත.

A හා B හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}$ යන්න භින්න භාගවලින් ලියා දක්වා,

$\displaystyle\int \frac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}\,dx$ සොයන්න.

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x\,dx$ අගයන්න.

(c) a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos^6 x\sin^3 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \cos^6 x\sin^3 x\,dx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos^6 x\sin^3 x\,dx = \frac{2\pi}{63}$ බව පෙන්වන්න.

16. $A \equiv (1, 2)$ හා $B \equiv (3, 3)$ යැයි ගනිමු.

A හා B ලක්ෂ්‍ය හරහා යන l සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

එක එකක් l සමඟ $\frac{\pi}{4}$ ක සුළු කෝණයක් සාදමින් A හරහා යන l_1 හා l_2 සරල රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න.

l මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(1+2t, 2+t)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $t \in \mathbb{R}$ වේ.

l_1 හා l_2 යන දෙකම ස්පර්ශ කරන හා කේන්ද්‍රය l මත වූ මුළුමනින්ම පළමුවන වෘත්ත පාදකයේ පිහිටන අරය $\frac{\sqrt{10}}{2}$ වන, C_1 වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 - 6x - 6y + \frac{31}{2} = 0$ බව ද පෙන්වන්න.

විෂ්කම්භයක අන්ත A හා B වූ C_2 වෘත්තයේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

C_1 හා C_2 වෘත්ත ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ දැයි නිර්ණය කරන්න.

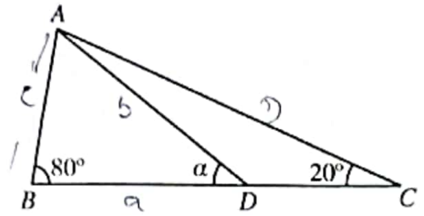
17. (*a*) $\sin A, \cos A, \sin B$ හා $\cos B$ ඇසුරෙන් $\sin(A-B)$ ලියා දක්වන්න.

(i) $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$, හා

(ii) $2\sin 10^\circ = \cos 20^\circ - \sqrt{3}\,\sin 20^\circ$

බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*b*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.



රූපයේ දක්වා ඇති ABC ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C = 80^\circ$ හා $A\hat{C}B = 20^\circ$ වේ. D ලක්ෂ්‍යය BC මත පිහිටා ඇත්තේ $AB = DC$ වන පරිදි ය. $A\hat{D}B = \alpha$ යැයි ගනිමු.

සුදුසු ත්‍රිකෝණ සඳහා **සයින් නීතිය** භාවිතයෙන්, $\sin 80^\circ \sin(\alpha - 20^\circ) = \sin 20^\circ \sin\alpha$ බව පෙන්වන්න.

$\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$ වන්නේ ඇයිදැයි පැහැදිලි කර, **ඒ නයින්**, $\tan\alpha = \dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - 2\sin 10^\circ}$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත (a)(ii) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $\alpha = 30^\circ$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $\tan^{-1}(\cos^2 x) + \tan^{-1}(\sin x) = \dfrac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න.

***

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}(4r+1) = n(2n+3)$ බව සාධනය කරන්න.

$n = 1$ සඳහා, ව. පැ. $= 4 + 1 = 5$ හා

ද. පැ. $= 1(2+3) = 5$ වේ.

$\therefore$ $n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

ඕනෑම $k \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන $n = k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම්, $\sum_{r=1}^{k} (4r+1) = k(2k+3)$ වේ. 5

Substitute $n = k+1$

දැන්, $\sum_{r=1}^{k+1} (4r+1) = \sum_{r=1}^{k} (4r+1) + \{4(k+1)+1\}$

$= k(2k+3) + (4k+5)$ 5

$= 2k^2 + 7k + 5$

$= (k+1)(2k+5)$ 5

$= (k+1)[2(k+1)+3]$

ඒ නයින්, $n = k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම්, $n = k+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. $n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව ඉහත පෙන්වා ඇත.

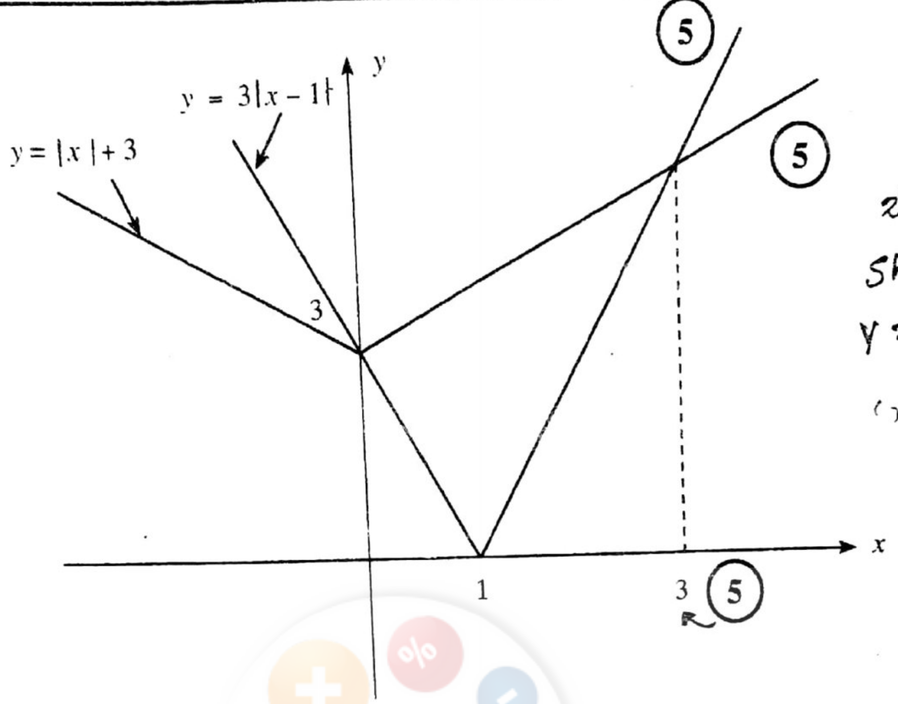
ඒ නයින්, ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

5

25

2. එක ම රූප සටහනක $y = 3|x-1|$ හා $y = |x|+3$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $3|2x-1| > 2|x|+3$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්වික අගයන් සොයන්න.



එක හැඩයක් නම් 5.

Shapes - 10

Y අක්ෂයේදී කැපිය යුතු

(, 3 not nescessary

එක් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයක x – ඛණ්ඩාංකය $x = 0$ වේ. අනෙක් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ x – ඛණ්ඩාංකය $x > 1$ සඳහා $3(x-1) = x + 3$ මගින් දෙනු ලැබේ.

මෙය $x = 3$ ලබා දෙයි.

දැන්, $3|2x-1| > 2|x| + 3$

$\Leftrightarrow \quad 3|u-1| > |u| + 3$, මෙහි $u = 2x$.   5

$\Leftrightarrow \quad u < 0$ හෝ $u > 3$ (ප්‍රස්තාරවලට අනුව)

$\Leftrightarrow \quad x < 0$ හෝ $x > \frac{3}{2}$.   5

$\boxed{25}$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

විකල්ප ක්‍රමය I :

පෙර පරිදිම ප්‍රස්තාර සඳහා 5 + 5

x හි අගයන් සඳහා විකල්ප ක්‍රමයක් :

$$3\,|2x-1| > 2\,|x| + 3$$

(i) අවස්ථාව $\boxed{x \geq \frac{1}{2}}$

එවිට, $3\,|2x-1| > 2\,|x|+3 \Leftrightarrow 3(2x-1) > 2x+3$

$$\Leftrightarrow 6x - 3 > 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$$

ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේ දී විසඳුම් වන්නේ $x > \frac{3}{2}$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ.

(ii) අවස්ථාව $\boxed{0 \leq x < \frac{1}{2}}$

එවිට, $3\,|2x-1| > 2\,|x|+3 \Leftrightarrow -6x+3 > 2x+3$

$$\Leftrightarrow 0 > 8x$$

$$\Leftrightarrow 0 > x$$

ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේ දී විසඳුම් නොමැත.

නිවැරදි විසඳුම් සමග අවස්ථා 3 ම සඳහා 10
නිවැරදි විසඳුම් සමග අවස්ථා 2ක් පමණක් සඳහා 5

(iii) අවස්ථාව $\boxed{x < 0}$

එවිට, $3\,|2x-1| > 2\,|x|+3 \Leftrightarrow -6x+3 > -2x+3$

$$\Leftrightarrow 0 > 4x$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$

ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේ දී විසඳුම් වන්නේ $x < 0$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ.

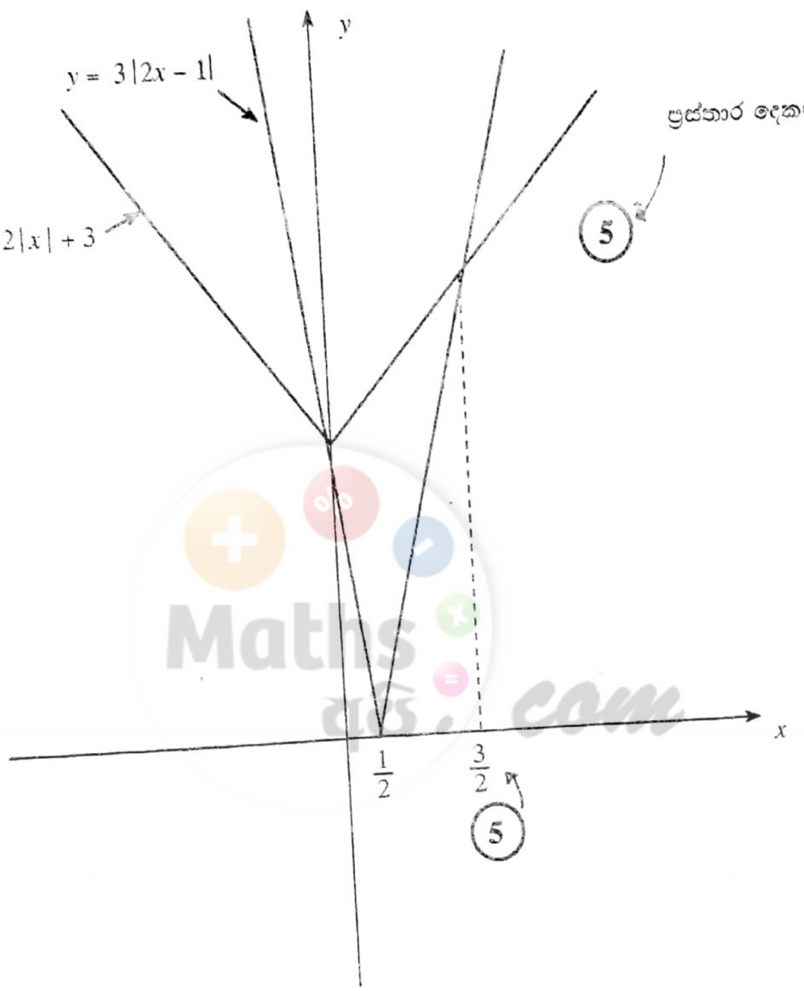
$\therefore$ දී ඇති අසමානතාවයෙහි විසඳුම් වන්නේ $x < 0$ හෝ $x > \frac{3}{2}$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ. 5

25

විකල්ප ක්‍රමය II :

පෙර පරිදිම ප්‍රස්තාර සඳහා 5 + 5.

x හි අගයන් සඳහා විකල්ප ක්‍රමයක් :



ප්‍රස්තාර වලින් ,

$3|2x-1| > 2|x| + 3$

$\Leftrightarrow \quad x < 0$ or $x > \frac{3}{2}$. 5

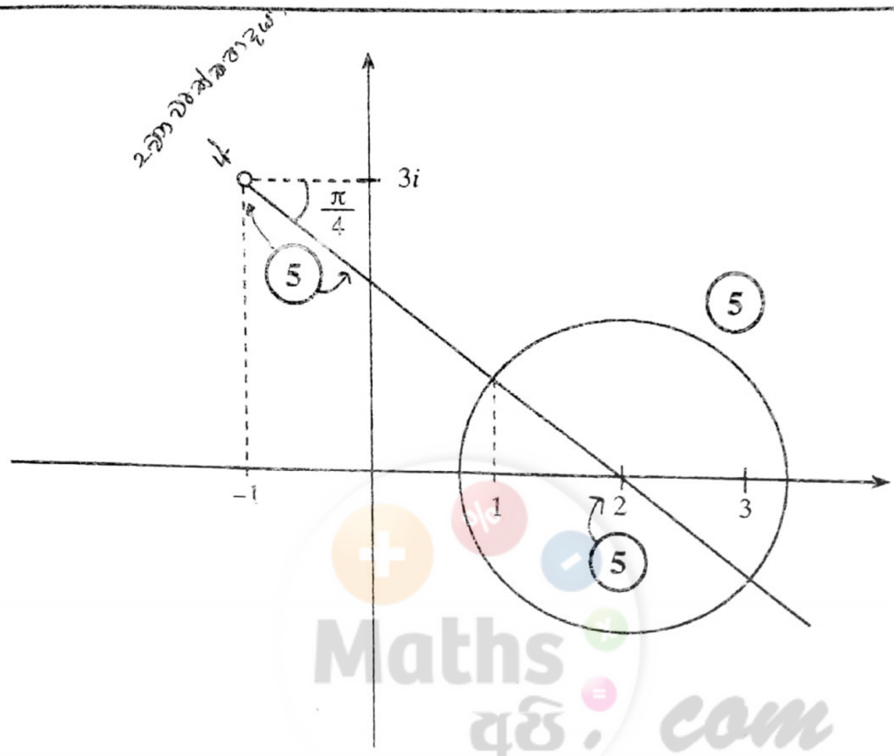
3. එක ම ආගන්ඩ් සටහනක,

(i) $\operatorname{Arg}(z+1-3i) = -\frac{\pi}{4}$ හා

(ii) $|z-2| = \sqrt{2}$

සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයන්හි දළ සටහන් අඳින්න.

ඒ නයින්, මෙම පථයන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ලියා දක්වන්න.



අවශ්‍ය සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $1 + i$ 5 හා $3 - i$ වේ. 5

25

4. $n \in \mathbb{Z}^{+}$ යැයි ගනිමු. x හි ආරෝහණ බලවලින් $(1+x)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න. ඉහත ප්‍රසාරණයේ අනුයාත පද දෙකක සංගුණක සමාන නම්, n ඔත්තේ වන බව පෙන්වන්න.

$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r$, මෙහි ${}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ $r = 1, 2, \ldots, n$ සඳහා 5 5

1st term, rth, last term

ආරෝහණ

හා ${}^nC_0 = 1.$

අනුයාත පද දෙකක් ${}^nC_r$ හා ${}^nC_{r+1}$ ලෙස ගත හැක.

${}^nC_r = {}^nC_{r+1}$; 5 මෙහි $r \in \{0, 1, \ldots n-1\}$.

$\Leftrightarrow \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!}$ 5 දෙකටම

$\Leftrightarrow \frac{1}{n-r} = \frac{1}{r+1}$

$\Leftrightarrow n - r = r + 1$

$\Leftrightarrow n = 2r + 1.$ 5

$\therefore n$ ඔත්තේ වේ.

25

<u>**වෙනත් ක්‍රමයක් :**</u>

අනුයාත පද දෙකක් ${}^nC_{r-1}$ හා ${}^nC_r$ ලෙස ගත හැක.

${}^nC_{r-1} = {}^nC_r$; 5 මෙහි $r \in \{1, 2, 3 \ldots, n\}$.

$\Leftrightarrow \frac{n!}{[n-(r-1)]!\,(r-1)!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ 5

$\Leftrightarrow \frac{1}{n-(r-1)} = \frac{1}{r}$

$\Leftrightarrow n - r + 1 = r$

$\Leftrightarrow n = 2r - 1.$ 5

$\therefore n$ ඔත්තේ වේ.

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi}\right)} = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{3}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi}\right)} \times \frac{\left(\sqrt{3x}+\sqrt{\pi}\right)}{\left(\sqrt{3x}+\sqrt{\pi}\right)} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{(3x-\pi)} \cdot \left(\sqrt{3x}+\sqrt{\pi}\right) \quad 5$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{3x}+\sqrt{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \cdot \left(\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi}\right)$$

5 5

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2\sqrt{\pi} = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \quad 5$$

25

විකල්ප ක්‍රමය :

25

$$\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} \times \frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 5$$

$$= \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}\right] \cdot \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)}\right] \frac{1}{\sqrt{3}}$$

5 5

$$= \left[\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u}\right]\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)\right] \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= 1 \cdot 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 5$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \quad 5$$

25

6. $y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, $x = 0$, $x = \ln 3$ හා $y = 0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස x–අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\dfrac{\pi}{4}(4\ln 2 - 1)$ බව පෙන්වන්න.

අවශ්‍ය පරිමාව $= \pi \displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}\,dx$ 5

$= \pi \displaystyle\int_2^{4} \frac{u-1}{u^2}\,du$; මෙහි $u = 1 + e^x$. 5

$= \pi \displaystyle\int_2^{4} \left\{\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right\} du$ 5

$= \pi \left\{\ln|u| + \dfrac{1}{u}\right\}\Big|_2^4$ 5

$= \pi \left\{\ln 4 - \ln 2 + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\right\}$

$= \dfrac{\pi}{4}\{4\ln 2 - 1\}$ 5

25

වලින්

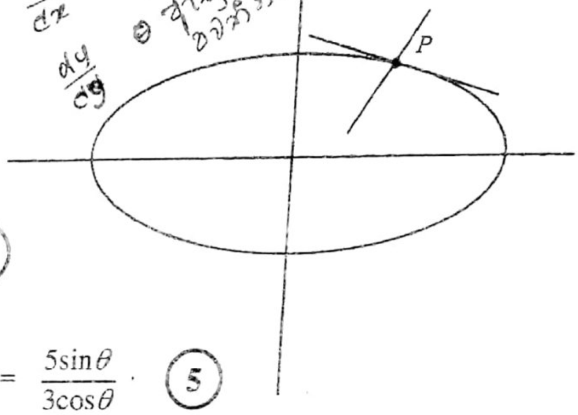
7. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ ඉලිප්සයට එය මත $P \equiv (5\cos\theta,\ 3\sin\theta)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී වූ අභිලම්බ රේඛාවෙහි සමීකරණය $5\sin\theta\, x - 3\cos\theta\, y = 16\sin\theta\cos\theta$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත ඉලිප්සයට එය මත $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අභිලම්බ රේඛාවේ $y-$අන්තඃඛණ්ඩය සොයන්න.

$x = 5\cos\theta,\ y = 3\sin\theta$

Implicit integration $\dfrac{dy}{dx}$ 5

$\dfrac{dy}{d\theta}$ θ ආශ්‍රිත ගත්තත් 10



$\dfrac{dx}{d\theta} = -5\sin\theta,\quad \dfrac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta$. 5 (2 වම)

$\sin\theta \neq 0$ සඳහා $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \dfrac{3\cos\theta}{-5\sin\theta}$ 5

$\cos\theta \neq 0$ සඳහා P හි දී ඇඳි අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය $= \dfrac{5\sin\theta}{3\cos\theta}$. 5

අවශ්‍ය සමීකරණය,

$\cos\theta \neq 0$ සඳහා $y - 3\sin\theta = \dfrac{5\sin\theta}{3\cos\theta}(x - 5\cos\theta)$ වේ. 5

$5\sin\theta x - 3\cos\theta y = 16\sin\theta\cos\theta$. → not neccessary.

25

$\cos\theta = 0$ වන විට ද මෙම සමීකරණය වලංගු වේ. (P යන්න $y-$ අක්ෂය මත පිහිටන විට)

$y-$ අන්තඃඛණ්ඩය සඳහා : $y = -\dfrac{16}{3}\sin\theta$.

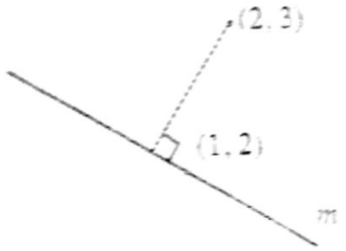
නමුත්, $3\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore\ y = -\dfrac{8}{\sqrt{3}}$. 5

$\therefore$ අවශ්‍ය $y-$ අන්තඃඛණ්ඩය $\left(0, -\dfrac{8}{\sqrt{3}}\right)$ වේ.

25

8. $m \in \mathbb{R}$ හා l යනු $A \equiv (1, 2)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන අනුක්‍රමණය m වූ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු.
l හි සමීකරණය m ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.
$B \equiv (2, 3)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට l රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර ඒකක $\frac{1}{\sqrt{5}}$ බව දී ඇත.
m හි අගයන් සොයන්න.



l හි සමීකරණය

$y - 2 = m(x - 1)$ වේ. 5

එනම් $y - mx - 2 + m = 0$ වේ.

l නැත්නම් 5 නැත.

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{|3 - 2m - 2 + m|}{\sqrt{1 + m^2}} \quad 5$$

Modulus

$$\Leftrightarrow \quad 1 + m^2 = 5(1 - m)^2 \quad 5$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + m^2 = 5(1 - 2m + m^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4m^2 - 10m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2m^2 - 5m + 2 = 0 \quad 5$$

$$\Leftrightarrow \quad (2m - 1)(m - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m = \frac{1}{2} \text{ or } m = 2. \quad 5$$

25

Scanned with CamScanner

9. කේන්ද්‍රය $(-2, 0)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි තිබෙන හා $(-1, \sqrt{3})$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන S වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. $A \equiv (1, -1)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට S වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.
ඒ නයින්, A සිට S ට ඇඳි ස්පර්ශකයන්හි ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යවල x–ඛණ්ඩාංක $5x^2 + 8x + 2 = 0$ සමීකරණය තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න.

$S : (x+2)^2 + y^2 = r^2$ (5)

මෙය $(-1, \sqrt{3})$ හරහා යයි.

$\therefore \; 1 + 3 = r^2.$

$\therefore \; 4 = r^2.$

ඒ නයින් S හි සමීකරණය $(x+2)^2 + y^2 = 4.$ (5)

එනම් $x^2 + y^2 + 4x = 0.$ .... (1)

$A \equiv (1, -1)$ සිට S ට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යාය $x - y + 2(x+1) = 0$ වේ. (5)

සුළු කිරීම අවශ්‍ය නැත.

එනම්, $3x - y + 2 = 0.$

ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය සඳහා $y = 3x + 2$, (1) හි ආදේශ කරමු. (5)

එවිට, $x^2 + (3x+2)^2 + 4x = 0.$

ඒ නයින්, $10x^2 + 12x + 4 + 4x = 0$ හා එබැවින් $5x^2 + 8x + 2 = 0$ වේ. (5)

25

25

10. $n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ සර්වසාම්‍යය භාවිතයෙන්, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ බව පෙන්වන්න.

$\sec\theta + \tan\theta = \frac{4}{3}$ බව දී ඇත. $\sec\theta - \tan\theta = \frac{3}{4}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

ඒ නයින්, $\cos\theta = \frac{24}{25}$ බව පෙන්වන්න.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ .... (1)

$\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ යන්න $\cos^2\theta \neq 0$ ලබා දෙයි.

ඒ නයින්, (1) න්, $1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$ ලැබේ. 5

$\therefore \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$. 5

දැන්, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ මගින්

සාධක

$(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$ ලබා දෙයි. 5

එබැවින් $\sec\theta + \tan\theta = \frac{4}{3}$, $\sec\theta - \tan\theta = \frac{3}{4}$. 5

ආදේශයට

$\therefore 2\sec\theta = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}$.

$\therefore \cos\theta = \frac{24}{25}$. 5 පිළිතුර

25

11.(*a*) $f(x) = x^2 + px + c$ හා $g(x) = 2x^2 + qx + c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q \in \mathbb{R}$ හා $c > 0$ වේ. $f(x) = 0$ හා $g(x) = 0$ සඳහා α පොදු මූලයක් ඇති බව දී ඇත. $\alpha = p - q$ බව පෙන්වන්න.

p හා q ඇසුරෙන් c සොයා,

(i) $p > 0$ නම් $p < q < 2p$ බව,

(ii) $f(x) = 0$ හි විවේචකය $(3p - 2q)^2$ බව

අපෝහනය කරන්න.

β හා γ යනු පිළිවෙළින් $f(x) = 0$ හි හා $g(x) = 0$ හි අනික් මූල යැයි ගනිමු. $\beta = 2\gamma$ බව පෙන්වන්න.

තව ද β හා γ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $2x^2 + 3(2p - q)x + (2p - q)^2 = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(*b*) $h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b, c \in \mathbb{R}$ වේ. $x^2 - 1$ යන්න $h(x)$ හි සාධකයක් බව දී ඇත. $b = -1$ බව පෙන්වන්න.

$h(x)$ යන්න $x^2 - 2x$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $5x + k$ බව ද දී ඇත; මෙහි $k \in \mathbb{R}$ වේ. k හි අගය සොයා $h(x)$ යන්න $(x - \lambda)^2 (x - \mu)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ වේ.

(*a*) α යනු $f(x) = 0$ හා $g(x) = 0$ හි පොදු මූලයක් බැවින්

$\alpha^2 + p\alpha + c = 0$ — 1 හා 5 $2\alpha^2 + q\alpha + c = 0$ වේ. 5 2

2 − 1 ⇒ $\therefore\ \alpha^2 + (q - p)\alpha = 0$ හා එබැවින් $\alpha\,[\alpha - (p - q)] = 0$ වේ.

5

ඒනයින්, $\alpha = p - q$. 5 $(\because\ c > 0 \Rightarrow \alpha \neq 0)$

20

25

1 $\Rightarrow c = -\alpha(\alpha + p)$ 5

$= -(p - q)(2p - q)$ 5 (α සඳහා ආදේශයෙන්

$= -(q - p)(q - 2p)$.

10

(i) $c > 0, \Rightarrow (q - p)(q - 2p) < 0$. 5

$\therefore$ p හා $2p$ අතර q පිහිටයි.

$p > 0$ නම් $p < 2p$ වන බැවින් $p < q < 2p$ වේ. 5

10

(ii) $\Delta = p^2 - 4c.$ 5

$= p^2 + 4(q-p)(q-2p)$ 5

$= p^2 + 4[q^2 - 3pq + 2p^2]$

$= 9p^2 - 12pq + 4q^2$

$= (3p-2q)^2.$ 5

15

$\alpha + \beta = -p.$ 5

$\alpha + \gamma = -\dfrac{q}{2}.$ 5

$\therefore \beta - 2\gamma = -p - \alpha + q + 2\alpha$

$= -p + q + \alpha$

$= 0.$ 5 $\quad (\because \alpha = p - q)$

$\therefore \beta = 2\gamma$

විකල්ප ක්‍රමයක්

$\alpha\beta = c$ 5

$\alpha\gamma = \dfrac{c}{2}$ 5

එබැවින් $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ වන බැවින්,

$\dfrac{\beta}{\gamma} = 2$ 5

$\beta = 2\gamma$

15

අවශ්‍ය සමීකරණය $(x-\beta)(x-\gamma) = 0$ වේ.

මෙය $x^2 - (\beta+\gamma)x + \gamma\beta = 0$ ලබා දෙයි. 10 or 0

තවද, $\beta + \gamma = -p - \dfrac{q}{2} - 2\alpha = -p - \dfrac{q}{2} - (2p - 2q) = \dfrac{3}{2}(q-2p).$ 5

දැන්, $\alpha^2\beta\gamma = \dfrac{c^2}{2}.$

$\therefore \beta\gamma = \dfrac{c^2}{2(p-q)^2} = \dfrac{(q-p)^2(q-2p)^2}{2(p-q)^2} = \dfrac{1}{2}(q-2p)^2.$ 5

$x^2 - \dfrac{3}{2}(q-2p)x + \dfrac{1}{2}(q-2p)^2 = 0.$ 5

$2x^2 + 3(2p-q)x + (2p-q)^2 = 0.$

25

Scanned with CamScanner

(b) (x^2-1) යන්න $h(x)$ හි සාධකයක් වන බැවින්,

$(x-1)$ හා $(x+1)$ යන දෙකම $h(x)$ හි සාධක වේ.

සාධක ප්‍රමේයය අනුව $h(1)=0$ හා $h(-1)=0$ වේ. 5

$h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$

$\therefore h(1) = 1 + a + b + c = 0$ — ① හා $h(-1) = -1 + a - b + c = 0$ — ② වේ.

5 5

① − ② මගින් $2 + 2b = 0$ ලැබේ.

$\therefore \; b = -1.$ 5

20

$h(x) = p(x).(x^2-2x) + 5x + k$ 5

$h(0) = k.$ 5 $h(2) = 8 + 4a + 2(-1) + c = 10 + k$ 5

$\therefore \; k = c.$ $4a + c = 4 + k$

$a = 1$ 5

15

① + ②, මගින් $a = -c$ ලැබේ.

$\therefore c = -1.$

එනයින්, $k = -1.$ 5

25

$h(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

$= (x+1)x^2 - (x+1)$

$= (x+1)(x^2-1)$ 5

$= (x+1)^2(x-1).$ 5

25

$(\lambda = -1, \mu = 1.)$

10

---

12. (*a*) පියානෝ වාදකයින් පස්දෙනකු, ගිටාර් වාදකයින් පස්දෙනකු, ගායිකාවන් තුන්දෙනකු හා ගායකයින් හත්දෙනකු අතුරෙන් **හරියටම** පියානෝ වාදකයින් දෙදෙනකු ද **අඩු තරමින්** ගිටාර් වාදකයින් හතරදෙනකු ද ඇතුළත් වන පරිදි සාමාජිකයන් එකොළොස්දෙනකුගෙන් සමන්විත සංගීත කණ්ඩායමක් තෝරා ගැනීමට අවශ්‍යව ඇත. තෝරා ගත හැකි එවැනි වෙනස් සංගීත කණ්ඩායම් ගණන සොයන්න.

මේවා අතුරෙන් හරියටම ගායිකාවන් දෙදෙනකු සිටින සංගීත කණ්ඩායම් ගණන ද සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{3r-2}{r(r+1)(r+2)}$ හා $V_r = \dfrac{A}{r+1} - \dfrac{B}{r}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $A, B \in \mathbb{R}$ වේ.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = V_r - V_{r+1}$ වන පරිදි A හා B හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

දැන්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $W_r = U_{r+1} - 2U_r$ යැයි ගනිමු. $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} W_r = U_{n+1} - U_1 - \sum_{r=1}^{n} U_r$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව **අපෝහනය** කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

12. (*a*) P = පියානෝ වාදකයින් (5), G = ගිටාර් වාදකයින් (5), ගායකයින් (10)

FS – ගායිකාවන් (3)

MS – ගායකයන් (7)

P	G	S	ආකාර ගණන
2	4	5	$^5C_2\ ^5C_4\ ^{10}C_5 = 12600$ (10) (5)
2	5	4	$^5C_2\ ^5C_5\ ^{10}C_4 = 2100$ (10) (5)

අවශ්‍ය ආකාර ගණන $= 12600 + 2100$

$= 14700$ (5)

35

P	G	FS	MS	ආකාර ගණන
2	4	2	3	10 ${}^{5}C_{2}\,{}^{5}C_{4}\,{}^{3}C_{2}\,{}^{7}C_{3} = 5250$ 5
2	5	2	2	10 ${}^{5}C_{2}\,{}^{5}C_{5}\,{}^{3}C_{2}\,{}^{7}C_{2} = 630$ 5

අවශ්‍ය ආකාර ගණන $= 5250 + 630$

$= 5880$ 5

$\boxed{35}$

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$$U_r = \frac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} \text{ හා } V_r = \frac{A}{(r+1)} - \frac{B}{r}.$$

එබැවින්, $U_r = V_r - V_{r+1}$ මගින් $\dfrac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} = \dfrac{A}{r+1} - \dfrac{B}{r} - \dfrac{A}{r+2} + \dfrac{B}{r+1}$ ලැබේ. 5

$$\therefore \frac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} = \frac{A}{(r+1)(r+2)} - \frac{B}{r(r+1)} \text{ හා}$$

ඒ නයින්, $3r - 2 = Ar - B(r+2)$ $\quad r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

5

r හි බලවල සංගුණක සැසඳීමෙන්:

$$\left.\begin{array}{ll} r^1: & 3 = A - B \\ r^0: & -2 = -2B \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} A = 4 \;\; 5 \\ B = 1 \;\; 5 \end{array}\right\}$$

කුමන ක්‍රමයකින් ලබා ගත්තද කමක් නැත.

$\boxed{20}$

$\boxed{35}$

$$U_r = V_r - V_{r+1}$$

$r = 1;\quad U_1 = V_1 - \cancel{V_2}$

$r = 2;\quad U_2 = \cancel{V_2} - \cancel{V_3}$ 5

$\vdots$

$r = n-1;\quad U_{n-1} = \cancel{V_{n-1}} - \cancel{V_n}$

$r = n;\quad U_n = \cancel{V_n} - V_{n+1}$ 5

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = V_1 - V_{n+1} \quad 5$$

$$= 1 - \left(\frac{4}{(n+2)} - \frac{1}{(n+1)}\right) \quad 5$$

$$= \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \quad 5$$

බැරදිනම්
15

25

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\right\} \quad 5$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right\}$$

$$= 1. \quad 5$$

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r = 1$

එමනිසා $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන අතර ඓක්‍යය 1 වේ. 5

15

$$W_r = U_{r+1} - 2U_r$$

$$\sum_{r=1}^{n} W_r = \sum_{r=1}^{n} (U_{r+1} - 2U_r)$$

$$= \left[\sum_{r=1}^{n} U_r - U_1 + U_{n+1}\right] - 2\sum_{r=1}^{n} U_r \quad 5$$

$$= U_{n+1} - U_1 - \sum_{r=1}^{n} U_r . \quad 5$$

10

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} W_r = \lim_{n\to\infty} U_{n+1} - U_1 - \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} U_r$$

$$= 0 - \frac{1}{6} - 1 \quad 5$$

$$= -\frac{7}{6}.$$

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අභිසාරී වන අතර ඓක්‍යය $-\frac{7}{6}$ වේ. 5

$\boxed{10}$ සෑම.

A හා B කොටස් නම් මුදුම අනුව ලබා දේ.

13. (a) $A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ හා $C = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$A^T B - I = C$ බව පෙන්වන්න; මෙහි I යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

C^{-1} පවතින්නේ $a \neq 0$ ම නම් පමණක් බව ද පෙන්වන්න.

දැන්, $a = 1$ යැයි ගනිමු. C^{-1} ලියා දක්වන්න.

$CPC = 2I + C$ වන පරිදි P න්‍යාසය සොයන්න.

(b) $z, w \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු. $|z|^2 = z\bar{z}$ බව පෙන්වා, එය $z - w$ ට යෙදීමෙන්

$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\text{Re}\, z\bar{w} + |w|^2$ බව පෙන්වන්න.

$|1-z\bar{w}|^2$ සඳහා ද එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වා, $|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = -(1-|z|^2)(1-|w|^2)$ බව පෙන්වන්න.

$|w| = 1$ හා $z \neq w$ නම් $\left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

(c) $1+\sqrt{3}i$ යන්න $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ වේ.

$(1+\sqrt{3}i)^m (1-\sqrt{3}i)^n = 2^8$ බව දී ඇත; මෙහි m හා n ධන නිඛිල වේ.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්, m හා n හි අගයන් නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබා ගන්න.

(a) $A^T B = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ (5)

$= \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix}$ (5)

$\therefore A^T B - I = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5)

$= \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix} = C$ (5) $\boxed{20}$

C^{-1} පවතී $\Leftrightarrow |C| \neq 0$ (5)

$\Leftrightarrow 2a - a \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq 0$ (5) $\boxed{10}$

$a = 1$ වන විට $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. 5

$\therefore\ C^{-1} = \frac{1}{2-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. 5

C^{-1} නිවැරදි ... 10

10

$CPC = 2I + C$

$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + C^{-1}C$ 5 L.H.S $\times C^{-1}$

$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + I$

$\Leftrightarrow P = 2C^{-1}C^{-1} + C^{-1}$ 5 $\times$ R.H.S $\times C^{-1}$

$\therefore\ P = 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= 2\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 5

$= \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ 5

20

(b) $z = x + iy$ යැයි ගනිමු. $x, y \in \mathbb{R}$.

$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy)$ 5

$= x^2 - i^2y^2$

$= x^2 + y^2$

$= |z|^2$

$\therefore\ |z|^2 = z\bar{z}$. 5

10

$$|z-w|^2 = (z-w)\overline{(z-w)} \quad 5$$

$$= (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) \quad 5$$

$$= z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w}$$

$$= |z|^2 - (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) + |w|^2 \quad 5$$

$$= |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \longrightarrow 1$$

$\boxed{15}$

$$|1-\bar{z}w|^2 = 1 - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |z\bar{w}|^2 \longrightarrow 2 \quad 5$$

1 − 2 මගින්;

$|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 1 - |z\bar{w}|^2$ ලැබේ. 5

$$= -(1 - |w|^2 - |z|^2 + |z|^2|w|^2) \quad 5$$

$$= -(1-|z|^2)(1-|w|^2) \quad 5 \longrightarrow 3$$

$|z\bar{\omega}| = |z||\bar{\omega}|$

$|\bar{\omega}| = |\omega|$

$\boxed{20}$

$|w| = 1$, බැවින් 3 න් $|z-w|^2 - |1-\bar{z}w|^2 = 0$ ලැබේ. 5

$\therefore\ |z-w| = |1-z\bar{w}|$.

$w \cdot \bar{\omega} = 1$

$w \times \frac{1}{w} = 1$

ඒ නයින්, $\dfrac{|z-w|}{|1-z\bar{w}|} = 1$. $\left[\begin{array}{l} \because z \neq w \\ \Rightarrow z\bar{w} \neq 1 \end{array}\right]$

$$\therefore \left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1 \quad 5$$

$\boxed{10}$

(c) $1+\sqrt{3}\,i = 2\left\{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ 5

මාපාංකය = 5
විස්තාරය = 5.

$= 2\left\{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right\}$ 5

10

$(1+\sqrt{3}\,i)^m\,(1-\sqrt{3}\,i)^n = 2^m\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^m 2^n\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^n$ 5

$= 2^{m+n}\left(\cos\frac{m\pi}{3} + i\sin\frac{m\pi}{3}\right)\left(\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\right)$ 5

$= 2^{m+n}\left(\cos(m-n)\frac{\pi}{3} + i\sin(m-n)\frac{\pi}{3}\right)$ 5

$\therefore 2^{m+n}\left(\cos(m-n)\frac{\pi}{3} + i\sin(m-n)\frac{\pi}{3}\right) = 2^8$

$|\cos\theta + i\sin\theta| = 1$

$\theta \in \mathbb{R}$

$= 2^8.$

$\Rightarrow m+n = 8$ හා $(m-n)\frac{\pi}{3} = 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}.$

5 5

$2^{m+n}\,|\cos(m-n)\frac{\pi}{3} + i\sin(m-n)$

$\cos(m-n)\frac{\pi}{3} = 1$ හා $i\sin(m-n)\frac{\pi}{3} = 0$

$m+n = 8.$

25

$m+n = 8$

$m-n = 2k\pi.$

20

10

14. (a) $x \neq 3$ සඳහා $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq 3$ සඳහා $f'(x) = \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

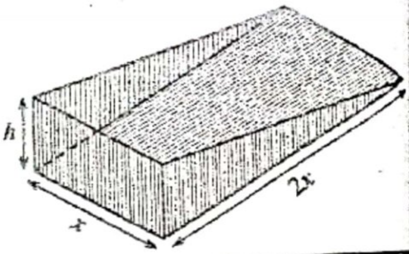
$f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

$x \neq 3$ සඳහා $f''(x) = \dfrac{18x}{(x-3)^4}$ බව දී ඇත.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(b) යාබද රූපයෙන් දූවිලි එකතු කරනයක මිට රහිත කොටස දැක්වේ. සෙන්ටිමීටරවලින් එහි මාන රූපයේ දැක්වේ. එහි පරිමාව $x^2h\ cm^3$ යන්න $4500\ cm^3$ බව දී ඇත. එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $S\ cm^2$ යන්න $S = 2x^2 + 3xh$ මගින් දෙනු ලැබේ. S අවම වන්නේ $x = 15$ වන විට බව පෙන්වන්න.



[illegible] (-5)
two mistake (-10)

(a) $x \neq 3$; සඳහා $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$

එවිට, $f'(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}\left[2x-3+2x\right] - \dfrac{2x(2x-3)}{(x-3)^3}$ (20)

$= \dfrac{(x-3)(4x-3) - 2x(2x-3)}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{4x^2 - 15x + 9 - 4x^2 + 6x}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$. (5)

$\boxed{25}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$ (5)

	$-\infty < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(−)	(+)	(−)
$f(x)$ is	↘ අඩුවේ.	↗ වැඩිවේ.	↘ අඩුවේ.
	(5)	(5)	(5)

රේඛල වුවත් කමක් නැත.
~~5~~ (10) ලකුණු එකතු නම්

$\boxed{20}$

$\therefore f(x)$ යන්න $[1, 3)$ මත වැඩි වන අතර $(-\infty, 1]$ හා $(3, \infty)$ මත අඩුවේ.

හැරුම් ලක්ෂ්‍යය : $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$ අවමයක් වේ. 5

05

$x \neq 3$; සඳහා $f''(x) = \dfrac{18x}{(x-3)^4}$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. 5

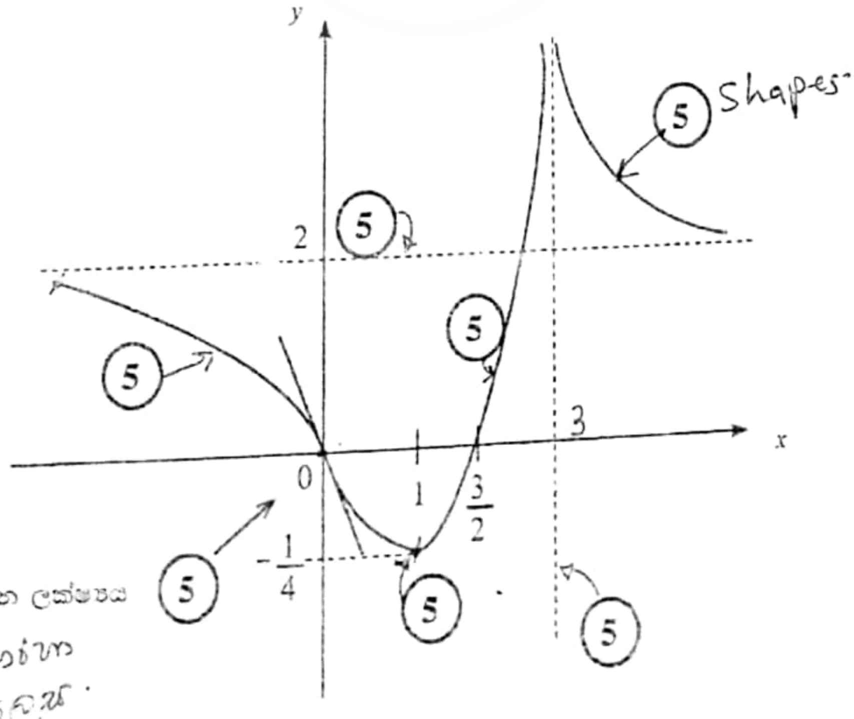
	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 3$
$f''(x)$ හි ලකුණ	(−)	(+)
අවතලභාවය	පහලට අවතල වේ. 5	ඉහලට අවතල වේ. 5

$\therefore$ නති වර්තන ලක්ෂ්‍යය = (0, 0). 5

20

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 2 \quad \therefore y = 2$ 5

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය $\therefore x = 3$. 5



නති වර්තන ලක්ෂ්‍යය 5

(0, 0) හරහා යන වලක්

45

(b) $x^2 h = 4500.$

ඒ නයින්, $S = 2x^2 + 3xh$

$= 2x^2 + 3x \cdot \dfrac{4500}{x^2}$; $x > 0$ සඳහා

(5)

$\therefore \quad \dfrac{dS}{dx} = 4x - 3 \times 4500 \left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{4(x^3 - 3375)}{x^2}.$

(5)

$\dfrac{dS}{dx} = 0$ (10) $\Leftrightarrow x = 15.$ (5)

$0 < x < 15$ සඳහා, $\dfrac{ds}{dr} < 0$ හා $x > 15$ සඳහා $\dfrac{ds}{dr} > 0.$ (5)

$\therefore\ x = 15$ වන විට S අවම වේ. (5)

$\boxed{35}$

15. (*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^3 + 13x - 16 = A(x^2+9)(x+1) + B(x^2+9) + 2(x+1)^2$

වන පරිදි A හා B නියත පවතින බව දී ඇත.

A හා B හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}$ යන්න භින්න භාගවලින් ප්‍රකාශ කරන්න ලියා දක්වා,

$\displaystyle\int \frac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}\,dx$ සොයන්න.

(*b*) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x\, dx$ අගයන්න.

(*c*) a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos^6 x \sin^3 x\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x\, dx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos^6 x \sin^3 x\, dx = \frac{2\pi}{63}$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$

$x^3 + 13x - 16 = A(x^2+9)(x+1) + B(x^2+9) + 2(x+1)^2$

x හි බලවල සංගුණක සැසඳූ විට ;

x^3 : $1 = A$. 5

x^0 : $-16 = 9A + 9B + 2 \Rightarrow B = -3$.

5 5

without working (-5) ඇතුලත් කරයි

විකල්ප ක්‍රමයක්:

ආදේශයෙන්

$x = -1$: $-30 = 10B \Rightarrow B = -3$

$x = 0$: $-16 = 9A + 9B + 2 \Rightarrow A$

15

$\therefore \dfrac{x^2+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)} = \dfrac{1}{(x+1)} - \dfrac{3}{(x+1)^2} + \dfrac{2}{x^2+9}$. 10

$\displaystyle\int \frac{x^2+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx - 3\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$

Modulus need.

$= \ln|x+1| + \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2}{3}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{3}\right) + C$. 5

5 5 5

C ඇති කරන්න | ක් ලකුණු ...

30

(b)

$$\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x \; dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^x(1 - \cos 2\pi x)\; dx \quad 5$$

$$= \frac{1}{2} e^x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^1 e^x \cos 2\pi x \; dx}_{I}$$

5

$$= \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2} I . \qquad \text{———} \; (1)$$

5

ඇත්, $I = \int_0^1 e^x \cos 2\pi x \quad dx$

$$= \underbrace{e^x \frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\Big|_0^1}_{} - \frac{1}{2\pi}\int_0^1 e^x \sin 2\pi x \; dx$$

5 5

$$= 0 - \frac{1}{2\pi}\left[\left(-e^x \frac{\cos 2\pi x}{2\pi}\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^1 e^x \cos 2\pi x \; dx}_{} \right]$$

5 5

කොටස් වශයෙන් I
අනුකලනය

$$= \frac{1}{4\pi^2}\left[e - 1\right] - \frac{1}{4\pi^2} I .$$

5 5

$$\therefore I\left(1 + \frac{1}{4\pi^2}\right) = \frac{1}{4\pi^2}(e-1).$$

$$\therefore I = \frac{(e-1)}{4\pi^2 + 1} . \quad 5$$

$\therefore$ (1) න්, $\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x \; dx = \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2}\frac{(e-1)}{(4\pi^2+1)}$ 5 + 5

$$= \frac{(e-1)}{2}\left[\frac{4\pi^2}{4\pi^2+1}\right]$$

$$= \frac{2(e-1)\pi^2}{1 + 4\pi^2} .$$

60

(c) $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos^6 x \sin^3 x \, dx$

x ට (π−x) ආදේශය

$= \displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - x) \underbrace{\cos^6(\pi - x)}_{\cos^6 x} \underbrace{\sin^3(\pi - x)}_{\sin^3 x} dx = \int_0^{\pi} (\pi - x)\cos^6 x \sin^3 x$ (5) (5)

$= \pi \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x \, dx - \underbrace{\int_0^{\pi} x\cos^6 x \sin^3 x \, dx}_{I}$ (5)

$\therefore I = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x \, dx.$ (5)

20

$I = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x \, dx$　　sin ඔත්තේ බලයක්.

$= \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^2 x \sin x \, dx$

$= \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^6 x (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$ (5)

$= \dfrac{\pi}{2}\left[\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^6 x \sin x \, dx - \int_0^{\pi} \cos^8 x \sin x \, dx\right]$ (5)

$= \dfrac{\pi}{2}\left[\left.\dfrac{-\cos^7 x}{7}\right|_0^{\pi} + \left.\dfrac{\cos^9 x}{9}\right|_0^{\pi}\right]$ (5) (5)

$= \dfrac{\pi}{2}\left[\dfrac{2}{7} - \dfrac{2}{9}\right]$ (5)

$= \dfrac{2\pi}{63}.$

25

50

16. $A \equiv (1, 2)$ හා $B \equiv (3, 3)$ යැයි ගනිමු.

A හා B ලක්ෂ්‍ය හරහා යන l සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

එක එකක් l සමග $\frac{\pi}{4}$ ක සුළු කෝණයක් සාදමින් A හරහා යන l_1 හා l_2 සරල රේඛා

l මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(1 + 2t, 2 + t)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙ

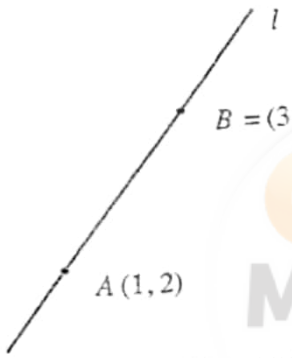
l_1 හා l_2 යන දෙකම ස්පර්ශ කරන හා කේන්ද්‍රය l මත වූ මුළුමනින්ම පළමුවන

අරය $\frac{\sqrt{10}}{2}$ වන, C_1 වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 - 6x - 6y + \frac{31}{2} = 0$ බව ද පෙන්

විෂ්කම්භයක අන්ත A හා B වූ C_2 වෘත්තයේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

C_1 හා C_2 වෘත්ත ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ දැයි නිර්ණය කරන්න.

(16)



අනුක්‍රමණය $= \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$. 5 ← gradient

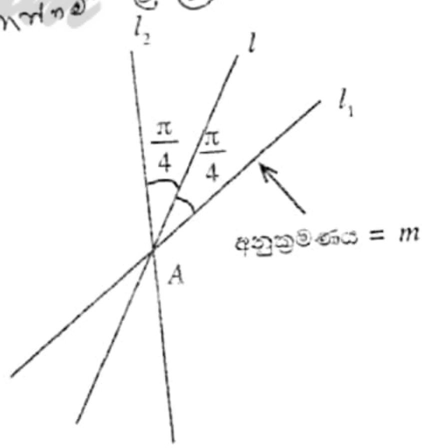
l හි සමීකරණය : $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$. 5 = ඍජු

මෙය $x - 2y + 3 = 0$ වේ. not necessary.

10

---

modulus නැත්නම් ඉ. 5



$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}\right| \quad 10$$

$$\therefore\ 1 = \left|\frac{2m - 1}{2 + m}\right|$$
5

$\Leftrightarrow\ 2 + m = \pm(2m - 1)$ 5

$\Leftrightarrow\ 2 + m = 2m - 1$ හෝ $2 + m = -2m + 1$

$\Leftrightarrow\ m = 3$ හෝ $m = -\frac{1}{3}$.

5 5

modulus නැත්නම් ~~45~~ කී දැනුවේ.
×20

$l_1 : y - 2 = 3(x - 1)$ හා $l_2 : y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1)$.

$l_1 : 3x - y - 1 = 0$ හා $l_2 : x + 3y - 7 = 0$.

5 5

40

$l : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = t$ (යැයි ගනිමු). 5 for substituting give 5 mark

එවිට, $x = 1 + 2t$, $y = 2 + t$, මෙහි $t \in \mathbb{R}$. 5

10

C_1 සඳහා

$P \equiv (1 + 2t, 2 + t)$ සිට l_1 ට ලම්බ දුර C_1 හි අරයට සමාන වේ.

එනම්, $\frac{|3(1+2t) - (2+t) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. 10 5 ← for eq^{1}

එනම්, $|3 + 6t - 2 - t - 1| = 5$. 5

$|5t| = 5$.

$t = \pm 1$ 5

$P \equiv (3, 3) = B$, බැවින් $P \equiv (-1, 1)$ සුදුසු නොවේ. entire 1st quadron

5 5

$C_1 : (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = \frac{5}{2}$. 5

එනම්, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 18 = \frac{5}{2}$

එනම්, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + \frac{31}{2} = 0$ 5

45

C_2 හි සමීකරණය

$(x - 1)(x - 3) + (y - 2)(y - 3) = 0$. 15

කේන්ද්‍රය 5, අරය 5, සමීකරණය 5

15

$$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = 2(-3)(-2) + 2(-3)\left(-\frac{5}{2}\right) = 27. \quad 5$$

5 5

$$c_1 + c_2 = \frac{31}{2} + 9 = \frac{49}{2}. \quad 5$$

$$\therefore\ 2g_1g_2 + 2f_1f_2 \neq c_1 + c_2. \quad 5$$

$\therefore$ C_1 හා C_2 ප්‍රලම්බ ඡේදනය නොවේ. 5

30

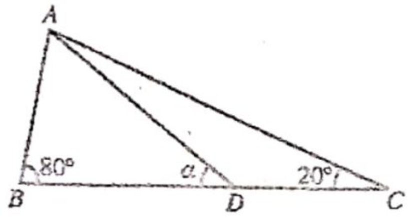
17. (*a*) $\sin A, \cos A, \sin B$ හා $\cos B$ ඇසුරෙන් $\sin(A-B)$ ලියා දක්වන්න.

(i) $\sin(90^\circ-\theta) = \cos\theta$, හා

(ii) $2\sin 10^\circ = \cos 20^\circ - \sqrt{3}\,\sin 20^\circ$

බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*b*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න.



රූපයේ දක්වා ඇති ABC ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C = 80^\circ$ හා $A\hat{C}B = 20^\circ$ වේ. D ලක්ෂ්‍යය BC මත පිහිටා ඇත්තේ $AB = DC$ වන පරිදි ය. $A\hat{D}B = \alpha$ යැයි ගනිමු.

සුදුසු ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $\sin 80^\circ \sin(\alpha-20^\circ) = \sin 20^\circ \sin\alpha$ බව පෙන්වන්න.

$\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$ වන්නේ ඇයිදැයි පැහැදිලි කර, ඒ නයින්, $\tan\alpha = \dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - 2\sin 10^\circ}$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත (*a*)(ii) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $\alpha = 30^\circ$ බව අපෝහනය කරන්න.

(*c*) $\tan^{-1}(\cos^2 x) + \tan^{-1}(\sin x) = \dfrac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න.

(*a*) $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B.$ (10)

10

(i) $\sin(90^\circ-\theta) = \sin 90^\circ\cos\theta - \cos 90^\circ\,\sin\theta$ (5)

$= \cos\theta.$ (5) $(\because \sin 90^\circ = 1$ හා $\cos 90^\circ = 0.)$

[illegible]

10

(ii) $2\sin 10^\circ = 2\sin(30^\circ - 20^\circ)$ (5)

$= 2\sin 30^\circ\cos 20^\circ - 2\cos 30^\circ\sin 20^\circ$ (5)

$= \cos 20^\circ - \sqrt{3}\,\sin 20^\circ.$ (5) $\left(\because \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}\right.$ හා $\left.\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

15

(b) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, 5 + 5

10

මෙහි $BC = a, CA = b$ හා $AB = c$.

සයින් නීතිය භාවිතයෙන් :

ABD ත්‍රිකෝණය සඳහා ; $\dfrac{AB}{\sin \alpha} = \dfrac{AD}{\sin 80^\circ}$. ← 10

ADC ත්‍රිකෝණය සඳහා ; $\dfrac{DC}{\sin(\alpha - 20^\circ)} = \dfrac{AD}{\sin 20^\circ}$. ← 10

$\therefore \dfrac{\sin(\alpha - 20^\circ)}{\sin \alpha} = \dfrac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}$.

$\therefore \sin 80^\circ \sin(\alpha - 20^\circ) = \sin 20^\circ \sin \alpha$. 5

25

$\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ$ 5 5

දැන්, $\sin 80^\circ \sin(\alpha - 20^\circ) = \sin 20^\circ \sin \alpha$ මගින්,

$\cos 10^\circ \sin(\alpha - 20^\circ) = 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ \sin \alpha$ දෙනු ලැබේ. 5 5

$\therefore \sin\alpha \cos 20^\circ - \cos\alpha \sin 20^\circ = 2 \sin 10^\circ \sin \alpha$. 5

$\therefore \tan \alpha (\cos 20^\circ - 2 \sin 10^\circ) = \sin 20^\circ$ 5 හා ඒ නයින්, $\tan \alpha = \dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - 2 \sin 10^\circ}$. 5

35

(a)(ii) මගින්, $\tan\alpha = \dfrac{\sin 20^\circ}{\sqrt{3}\sin 20^\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ලැබේ. 5

$\therefore\ \alpha = 30^\circ$. 5 $(20^\circ < \alpha < 90^\circ)$

10

(c) $\tan^{-1}(\cos^2 x) + \tan^{-1}(\sin x) = \dfrac{\pi}{4}$.

$\alpha = \tan^{-1}(\cos^2 x)$ හා $\beta = \tan^{-1}(\sin x)$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\alpha = \dfrac{\pi}{4} - \beta$.

$\therefore\ \tan\alpha = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \beta\right)$ 5

$= \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\beta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\beta}$. 5

$\Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$. 5

$\cos^2 x\,(1 + \sin x) = (1 - \sin x)$

$(1 - \sin^2 x)(1 + \sin x) = (1 - \sin x)$ 5

$(1 - \sin x)(1 + \sin x)^2 = 1 - \sin x$

$\Rightarrow \sin x = 1$ හෝ $1 + \sin x = \pm 1$

$\Rightarrow \sin x = 1$ හෝ $\sin x = 0$ 5 $(\because \sin x \neq -2)$

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}$ 5 හෝ $m \in \mathbb{Z}$ සඳහා $x = m\pi$ 5

$m, n \in \mathbb{Z}$ නැත්නම් ල 5 ක් අඩු කරයි.

35

විකල්ප ක්‍රමයක් :

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan\frac{\pi}{4} \quad (5)$$

$$\therefore \quad \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 1 \quad (5)$$

$$\therefore \cos^2 x + \sin x = 1 - \cos^2 x \sin x \quad (5)$$

$$1 - \sin^2 x + \sin x = 1 - (1 - \sin^2 x)\sin x$$

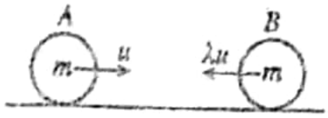
$$\sin x(1 - \sin x)(2 + \sin x) = 0 \quad (5)$$

$\Rightarrow \sin x = 1$ හෝ $\sin x = 0$ (5) $\quad (\because \sin x \neq -2)$

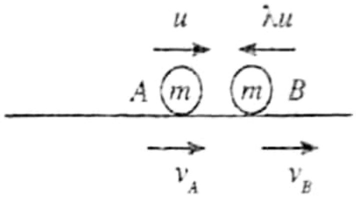
$\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}$ (5) හෝ $x = m\pi;\ m \in \mathbb{Z}$. (5)

35

එක එකෙහි ස්කන්ධය m වූ A හා B අංශු දෙකක් සුමට තිරස් මේසයක් මත එකම සරල රේඛාවේ එකෙක් ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවලට චලනය වෙමින් සරල ලෙස ගැටේ. ගැටුමට මොහොතකට පෙර A හි හා B හි ප්‍රවේග පිළිවෙළින් u හා λu වේ. A හා B අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ. ගැටුමට මොහොතකට පසු A හි ප්‍රවේගය සොයා $\lambda > \frac{1}{3}$ නම්, A හි චලිත දිශාව ප්‍රතිවිරුද්ධ වන බව පෙන්වන්න.



A හා B සඳහා $\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$, $\rightarrow$ යෙදීමෙන් :



$$(mv_A + mv_B) - (mu - m\lambda u) = 0.$$

$$\therefore v_A + v_B = (1 - \lambda)u \quad (1) \qquad 10$$

ඒකක Momentum හරිනම් ල (05)

නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමයෙන් :

$$v_B - v_A = \frac{1}{2}(u + \lambda u) \quad (2) \qquad 5$$

$$(1) - (2) : \quad 2v_A = u - \lambda u - \frac{1}{2}u - \frac{\lambda}{2}u$$

$$v_A = \frac{1}{4}(1 - 3\lambda)u \qquad 5$$

$\lambda > \frac{1}{3}$, නම් එවිට $v_A < 0$. 5

$\therefore$ A හි චලිත දිශාව ප්‍රතිවිරුද්ධ වේ.

25

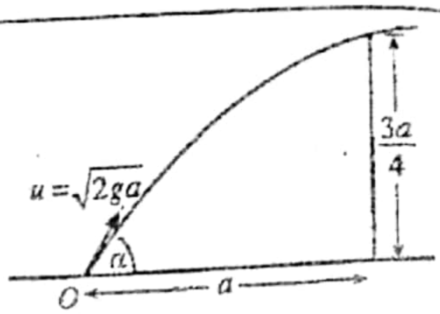
ශ. ස. ත ලොකු කාල පරාසයක් සඳහා වඩාත් යෝග්‍ය.

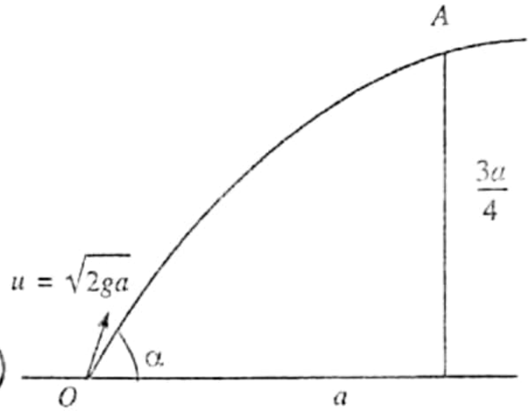
J = ΔmV සංකල්ප භාවිතා වෙනස්.

2. අංශුවක් තිරස් ගෙබිමක් මත වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට $u = \sqrt{2ga}$ ආරම්භක ප්‍රවේගයකින් හා තිරසට $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව, O සිට a තිරස් දුරකින් පිහිටි උස $\frac{3a}{4}$ වූ සිරස් බිත්තියකට යාන්තමින් ඉහළින් යයි.

$\sec^2\alpha - 4\tan\alpha + 3 = 0$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\alpha = \tan^{-1}(2)$ බව පෙන්වන්න.





O සිට A දක්වා ගතවූ කාලය t යැයි ගනිමු.

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්,

$\rightarrow \quad a = u\cos\alpha\, t$ ——— (1)   5

$\uparrow \quad \frac{3a}{4} = u\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$ ——— (2)   5

(1) $\Rightarrow t = \dfrac{a}{u\cos\alpha}$

දැන්, (2) $\Rightarrow \dfrac{3a}{4} = a\tan\alpha - \dfrac{1}{2}g\dfrac{a^2}{2\,ga\cos^2\alpha}$ 5

$\Rightarrow \dfrac{3}{4} = \tan\alpha - \dfrac{1}{4}\sec^2\alpha$

$\Rightarrow \sec^2\alpha - 4\tan\alpha + 3 = 0$ 5

$\Rightarrow (1 + \tan^2\alpha) - 4\tan\alpha + 3 = 0$

$\Rightarrow \tan^2\alpha - 4\tan\alpha + 4 = 0$

$\Rightarrow (\tan\alpha - 2)^2 = 0$

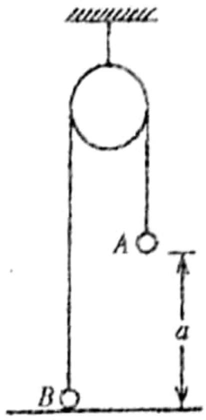
$\therefore \tan\alpha = 2$ 5

$\therefore \alpha = \tan^{-1}(2)$.

$\boxed{25}$

3. එක එකෙහි ස්කන්ධය m වූ A හා B අංශු දෙකක්, අචල සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈදා, රූපයේ දැක්වෙන පරිදි A අංශුව තිරස් ගෙබිමක සිට a උසකින් ඇතිවද B අංශුව ගෙබිම ස්පර්ශ කරමින් ද සමතුලිතතාවයේ පිහිටා ඇත. දැන්, A අංශුවට සිරස්ව පහළට mu ආවේගයක් දෙනු ලැබේ. ආවේගයෙන් මොහොතකට පසු A අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයන්න.

A ට ගෙබිම වෙත ළඟා වීමට ගතවන කාලය ලියා දක්වන්න.

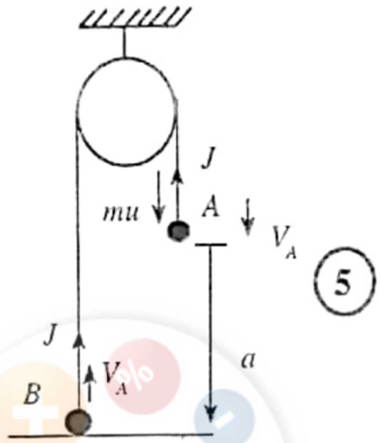


$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්,

$A \downarrow \quad mu - J = mV_A$ (5)

$B \uparrow \quad J = mV_A$ (5)

$\therefore \quad V_A = \dfrac{u}{2}$ (5)



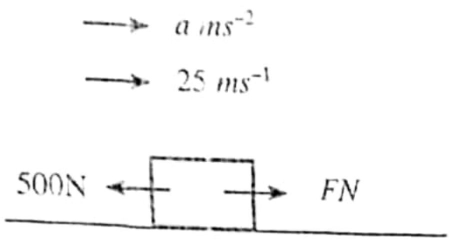
$T = \dfrac{a}{V_A} = \dfrac{2a}{u}$ (5)

25

$V_B = V_A$ තන්තුව තදව තිබීමට අවශ්‍යතාවය.

ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් යයි.

4. ස්කන්ධය 1500 kg වූ කාරයක්, විශාලත්වය 500 N වූ නියත ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව සෘජු තිරස් මාර්ගයක ධාවනය වේ. කාරයේ එන්ජිම 50 kW ජවයකින් ක්‍රියාකරමින් කාරය 25 m s^{-1} වේගයෙන් ධාවනය වන විට එහි ත්වරණය සොයන්න.
මෙම මොහොතේ දී කාරයේ එන්ජිම ක්‍රියා විරහිත කරනු ලැබේ. එන්ජිම ක්‍රියා විරහිත කළ මොහොතේ සිට තත්පර 50 කට පසු කාරයේ වේගය සොයන්න.



ජවය = 50kW නිසා,

$50 \times 10^3 = F \times 25$ 5　　　P = FV

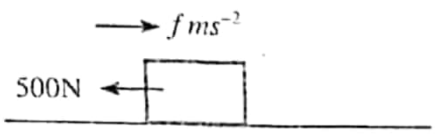
$\therefore F = 2000$

$\underline{F} = m\underline{a} \longrightarrow$ යෙදීමෙන්

$F - 500 = 1500\,a.$ 5

$\therefore a = 1$ 5

කාරයේ එන්ජිම නැවතුණු විට,



$\underline{F} = m\underline{a} \longrightarrow$

$-500 = 1500 f$ 5

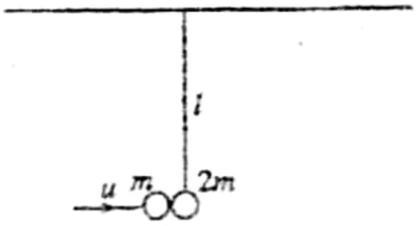
$\therefore f = -\frac{1}{3}$

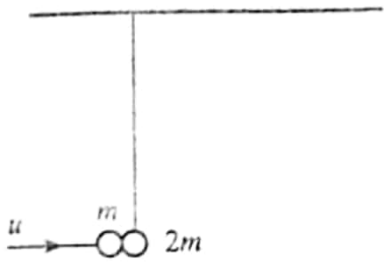
$v = u + at \longrightarrow$ යෙදීමෙන්

$v = 25 - \frac{1}{3} \times 50$

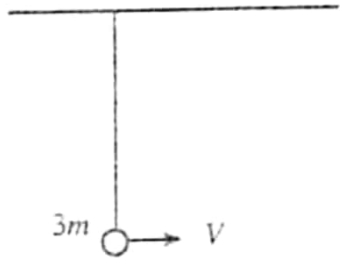
$v = \frac{25}{3}\, ms^{-1}$ 5

5. දිග l වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මඟින් තිරස් සිවිලිමක නිදහසේ එල්ලා ඇති ස්කන්ධය $2m$ වූ P අංශුවක් සමතුලිතතාවයේ පවතී. u ප්‍රවේගයෙන් තිරස් දිශාවකින් චලනය වන ස්කන්ධය m වූ තවත් අංශුවක්, P අංශුව සමඟ ගැටී එයට හා වේ. ගැටුමට පසුව ද තන්තුව තදව පවතින අතර සංයුක්ත අංශුව සිවිලිමට යාන්තමින් ළඟා වේ. $u = \sqrt{18gl}$ බව පෙන්වන්න.





වි.ශ. $= 0$



$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන් : m හා $2m$ $\longrightarrow$

$0 = 3mV - mu$ (5)

$\therefore V = \dfrac{u}{3}$ (5)

සංයුක්ත අංශුව සඳහා ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්.

P.E (5) K.E = (5)

$\dfrac{1}{2}(3m)V^2 - 3mgl = 0.$ (10)

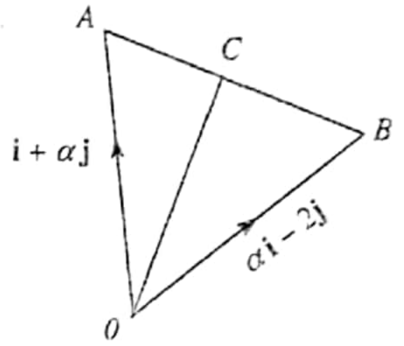
$\therefore V^2 = 2gl$

$\therefore \dfrac{u^2}{9} = 2gl$

ඒ නයින්, $u = \sqrt{18gl}$ (5)

25

6. $\alpha > 0$ හා සුපුරුදු අංකනයෙන්, O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{i}+\alpha\mathbf{j}$ හා $\alpha\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ යැයි ගනිමු. C යනු $AC : CB = 1:2$ වන පරිදි AB මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. AB ට OC ලම්බ යැයි දී ඇත. α හි අගය සොයන්න.



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$

$$= -(\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}) + (\alpha\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) \quad 5$$

දිශා නිර්ණය අවශ්‍ය නැ.

$$= (\alpha - 1)\mathbf{i} - (\alpha + 2)\mathbf{j}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad 5$$

$$= (\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}) + \frac{1}{3}[(\alpha - 1)\mathbf{i} - (\alpha + 2)\mathbf{j}] \quad 5$$

$$= \frac{1}{3}[(\alpha + 2)\mathbf{i} + 2(\alpha - 1)\mathbf{j}]$$

$$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad 5$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha + 2) - 2(\alpha + 2)(\alpha - 1) = 0$$

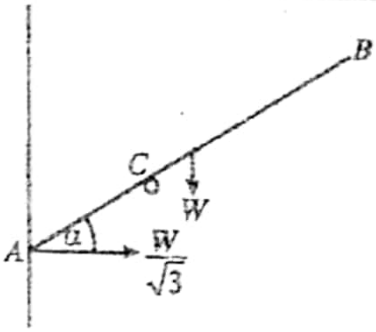
$$\Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha + 2) = 0$$

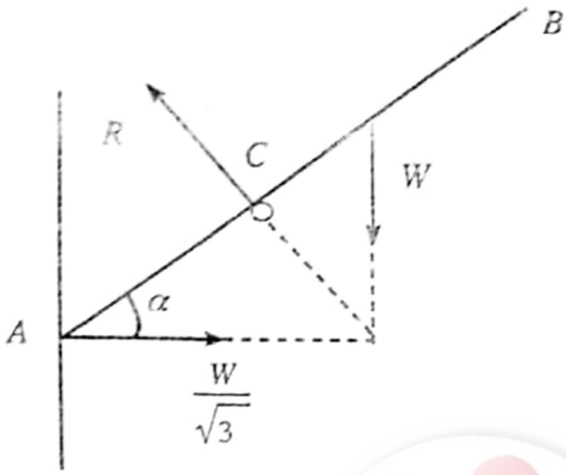
$$\Leftrightarrow \alpha = 1 \quad 5 \quad (\because \alpha > 0)$$

25

7. දිග $2a$ හා බර W වූ ACB ඒකාකාර දණ්ඩක් රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි A කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට එරෙහි ව C හි තබා ඇති සුමට නාදැත්තක් මගින් සමතුලිතතාවේ තබා ඇත. A හි දී බිත්තිය මගින් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව $\frac{W}{\sqrt{3}}$ බව දී ඇත. දණ්ඩ තිරස සමග සාදන α කෝණය $\frac{\pi}{6}$ බව පෙන්වන්න.

$AC = \frac{3}{4}a$ බව ද පෙන්වන්න.





දණ්ඩේහි සමතුලිතතාව සඳහා

π oversin

$\rightarrow \quad R\sin\alpha = \frac{W}{\sqrt{3}}$ —— (1) (5)

$\uparrow \quad R\cos\alpha = W$ —— (2) (5)

$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$ (5)

ඇත්, (1) $\Rightarrow R = \frac{2W}{\sqrt{3}}$

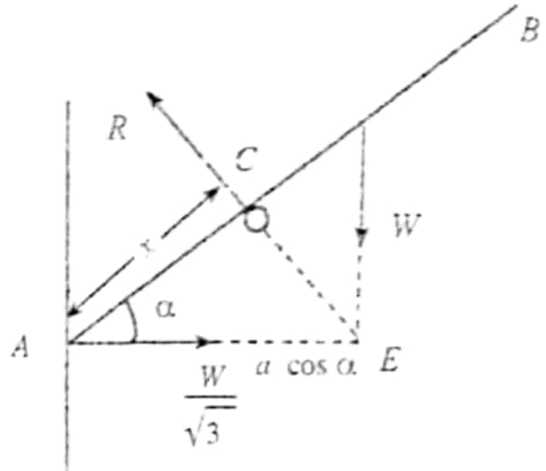
$\overset{\curvearrowright}{A} \quad R \times AC = W \times a\cos\frac{\pi}{6}$ (හෝ $Wa\cos\alpha$) (5)

$\frac{2W}{\sqrt{3}} \times AC = W \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$AC = \frac{3}{4}a$ (5)

$\boxed{25}$

වෙනත් ක්‍රමයක් 1



$\nearrow AB$ $\quad \frac{W}{\sqrt{3}} \cos\alpha = W \sin\alpha$ (10)

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$ (5)

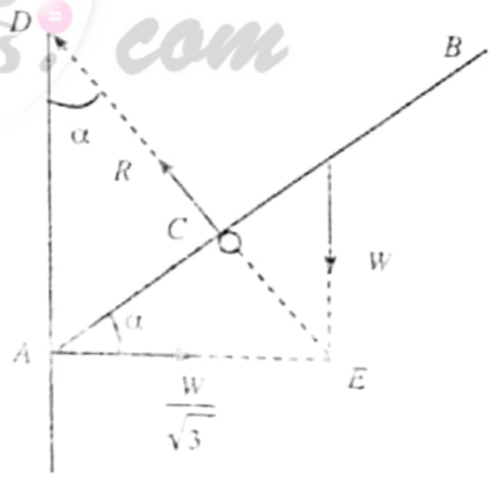
$\overset{\curvearrowleft}{C}$ $\quad \frac{W}{\sqrt{3}} \times x \sin\frac{\pi}{6} = W \times (a - x)\cos\frac{\pi}{6}$ (5) හෝ $x = AE\cos\alpha$

$\frac{1}{\sqrt{3}} \times x \times \frac{1}{2} = (a - x)\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = 3(a - x)$

$x = \frac{3}{4}a$ (5)

වෙනත් ක්‍රමයක් 2



ADE බල ත්‍රිකෝණයක් වේ. (5)

$\frac{\frac{W}{\sqrt{3}}}{AE} = \frac{W}{AD}$

$\frac{AE}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (5)

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

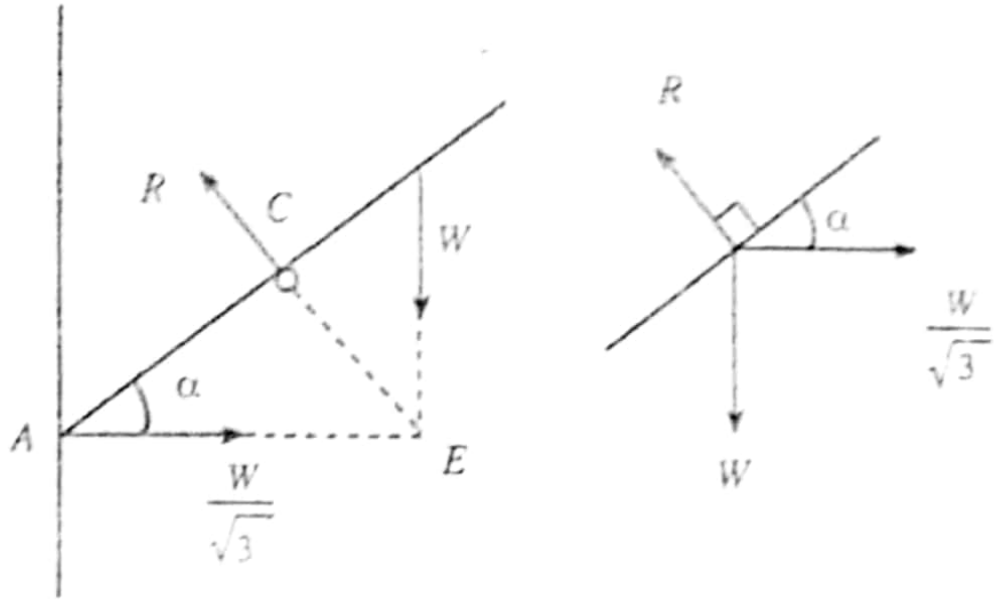
$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$ (5)

$\therefore AE = a\cos\frac{\pi}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (5)

$AC = AE\cos\frac{\pi}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{3}{4}a$ (5)

වෙනත් ක්‍රමයක් 3



ලාමි නියමයෙන්,

$$\frac{W}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{\frac{W}{\sqrt{3}}}{\sin(\pi-\alpha)} \quad 5$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}\sin\alpha} \quad 5$$

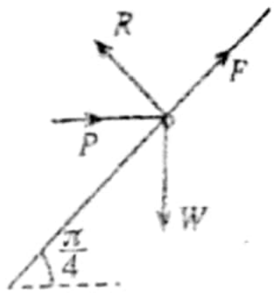
$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

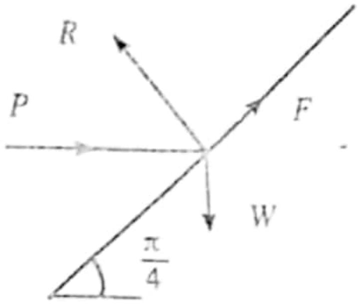
$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \quad 5$$

$AC = AE\cos\alpha$ මගින් $AC = \frac{3}{4}a$ ලැබේ. 5 + 5

8. බර W වූ කුඩා පබළුවක් තිරසට $\frac{\pi}{4}$ කෝණයකින් ආනත අචල, රළු, සෘජු කම්බියකට අමුණා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි විශාලත්වය P වූ තිරස් බලයක් මගින් පබළුව සමතුලිතව තබා ඇත. පබළුව හා කම්බිය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ. පබළුව මත ඝර්ෂණ බලය F හා අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව R නිර්ණය කිරීම සඳහා ප්‍රමාණවත් සමීකරණ P හා W ඇසුරෙන් ලබා ගන්න.

$\frac{F}{R} = \frac{W-P}{W+P}$ බව දී ඇත. $\frac{W}{3} \leq P \leq 3W$ බව පෙන්වන්න.





$$F = \frac{W-P}{W+P}$$

පබළුවේ සමතුලිතතාව සඳහා

$\nearrow$ $F - \frac{W}{\sqrt{2}} + \frac{P}{\sqrt{2}} = 0.$ 5 ($\cos\frac{\pi}{4}$ හෝ $\sin\frac{\pi}{4}$ සමග)

$\nwarrow$ $R - \frac{W}{\sqrt{2}} - \frac{P}{\sqrt{2}} = 0.$ 5 ($\cos\frac{\pi}{4}$ හෝ $\sin\frac{\pi}{4}$ සමග)

$$\mu \geq \frac{|F|}{R}$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{|W-P|}{W+P}$$ 10

සංඛ්‍යාත්මක අගය නොමැති 5 පමණි.

$$\therefore |W-P| \leq \frac{1}{2}(W+P)$$

$$\therefore -\frac{1}{2}(W+P) \leq W-P \leq \frac{1}{2}(W+P)$$

ඒ නයින් $\frac{W}{3} \leq P \leq 3W$ 5

25

9. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A)=\frac{3}{5}$, $P(B|A)=\frac{1}{4}$ හා $P(A\cup B)=\frac{4}{5}$ බව දී ඇත. $P(B)$ සොයන්න.

A හා B සිද්ධි ස්වායත්ත නොවන බව පෙන්වන්න.

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow \quad P(A\cap B) = \frac{3}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{20} \quad 5$$

දැන්, $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ මගින් 5

$\frac{4}{5} = \frac{3}{5} + P(B) - \frac{3}{20}$ ලැබේ.

$$\therefore P(B) = \frac{16}{20} - \frac{12}{20} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20} \quad 5$$

එවිට $P(A)\,.\,P(B) = \frac{3}{5}\times\frac{7}{20} = \frac{21}{100}$ 5.

$$\therefore \quad P(A\cap B) \neq P(A)\,.\,P(B) \quad 5$$

$\therefore$ A හා B ස්වායත්ත නොවේ.

25

10. එක එකක් 10 ට අඩු හෝ සමාන ධන නිඛිලමය නිරීක්ෂණ 5 ක කුලකයක මධ්‍යන්‍යය, මධ්‍යස්ථය හා මාතය යන එක එකක් 6 ට සමාන වේ. නිරීක්ෂණවල පරාසය 9 වේ. මෙම නිරීක්ෂණ පහ සොයන්න.

මාතය $= 6 \Rightarrow$ 6, 6 සංඛ්‍යාවලින් අවම වශයෙන් දෙකක් වේ. (5)

පරාසය $= 9$ හා සංඛ්‍යා ධන නිඛිල ≤ 10 වේ. කුඩාම සංඛ්‍යාව 1 හා විශාලම සංඛ්‍යාව 10 වේ. (5)

මධ්‍යස්ථය 6 වන නිසා, සංඛ්‍යා

$$\left.\begin{array}{l} 1, a, 6, 6, 10 \quad \text{හෝ} \\ 1, 6, 6, a, 10. \end{array}\right\} \text{විය යුතුය.}$$ (5)

මධ්‍යන්‍යය $= \dfrac{a+23}{5} = 6$ ලබා දෙයි. (5)

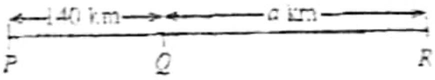
$\therefore \; a = 7$ (5)

$\therefore$ සංඛ්‍යා 1, 6, 6, 7, 10 වේ.

without methods just writing numbers ⟶ given 10 marks.

25

11\. (a) රූපයෙහි පෙන්වා ඇති පරිදි P, Q හා R දුම්රිය ස්ථාන තුනක් $PQ = 140$ km හා $QR = a$ km වන පරිදි සරල රේඛාවක පිහිටා ඇත. කාලය $t = 0$ දී A දුම්රියක් P හි දී නිශ්චලතාවයෙන් ආරම්භ කර Q දෙසට f km h^{-2} නියත ත්වරණයෙන් පැය භාගයක් ගමන් කර කාලය $t = \frac{1}{2}$ h හි දී එයට තිබූ ප්‍රවේගය පැය තුනක කාලයක් පවත්වාගෙන යයි. ඉන්පසු එය f km h^{-2} නියත මන්දනයෙන් ගමන් කර Q හි දී නිශ්චලතාවට පැමිණෙයි. කාලය $t = 1$ h හි දී තවත් B දුම්රියක් R හි දී නිශ්චලතාවයෙන් ආරම්භ කර Q දෙසට පැය T කාලයක් $2f$ km h^{-2} නියත ත්වරණයෙන් ද ඉන්පසු f km h^{-2} නියත මන්දනයෙන් ද ගමන් කර Q හි දී නිශ්චලතාවට පැමිණෙයි. දුම්රිය දෙකම එකම මොහොතේ දී නිශ්චලතාවට පැමිණේ. එකම රූපසටහනක A හා B හි චලිත සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.



ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $f = 80$ බව පෙන්වා, T හි හා a හි අගයන් සොයන්න.

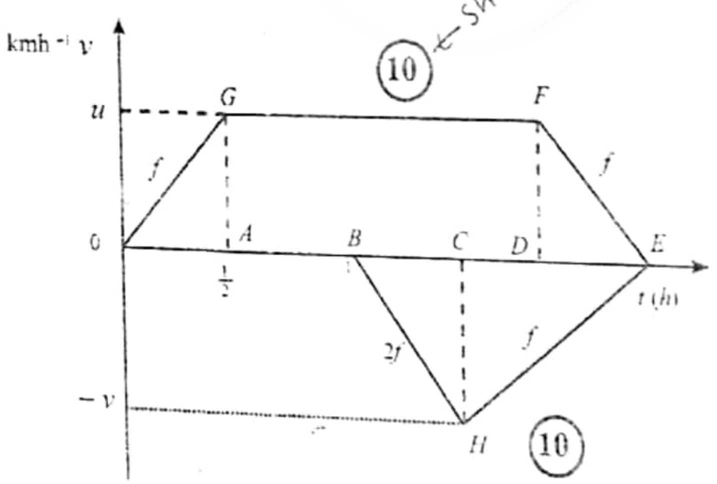
(b) නැවක් පොළොවට සාපේක්ෂව u ඒකාකාර වේගයෙන් බටහිර දෙසට යාත්‍රා කරන අතර බෝට්ටුවක් පොළොවට සාපේක්ෂව $\frac{u}{2}$ ක ඒකාකාර වේගයෙන් සරල රේඛීය පෙතක යාත්‍රා කරයි. එක්තරා මොහොතක දී, බෝට්ටුවෙන් d දුරකින් උතුරෙන් නැගෙනහිරට $\frac{\pi}{3}$ ක කෝණයකින් නැව පිහිටයි.

(i) බෝට්ටුව පොළොවට සාපේක්ෂව උතුරෙන් බටහිරට $\frac{\pi}{6}$ ක කෝණයක් සාදන දිශාවට යාත්‍රා කරයි නම් බෝට්ටුවට නැව අල්ලාගත හැකි බව පෙන්වා, එයට නැව අල්ලා ගැනීමට ගතවන කාලය $\frac{2d}{\sqrt{3}u}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) බෝට්ටුව පොළොවට සාපේක්ෂව උතුරෙන් නැගෙනහිරට $\frac{\pi}{6}$ ක කෝණයක් සාදන දිශාවට යාත්‍රා කරයි නම් නැවට සාපේක්ෂව බෝට්ටුවේ වේගය $\frac{\sqrt{7}u}{2}$ බව පෙන්වා, නැව සහ බෝට්ටුව අතර කෙටිම දුර $\frac{d}{2\sqrt{7}}$ බව පෙන්වන්න.

(a)

දෙකම -10
-5



20

$\underline{\Delta\, OAG}$

$$f = \frac{u}{\frac{1}{2}}$$

$\therefore\ f = 2u$ (5)

$\Delta\, OAG \equiv \Delta\, DEF$

$\therefore\ DE = \frac{1}{2}$ (5)

$OEFG$ තුපීසියමේ වර්ගඵලය $= 140$ (5)

$\frac{1}{2}(4+3)\,u = 140$ (5)

$\therefore\ u = 40$

$\therefore\ f = 80.$ (5)

25

$\underline{\Delta\, BHC}$

$2f = \frac{V}{T} \Rightarrow 160 = \frac{V}{T}$ (5)

$\underline{\Delta\, ECH}$

$f = \frac{V}{CE} \Rightarrow 80 = \frac{V}{CE}$ (5)

$\therefore\ CE = 2T$ (5)

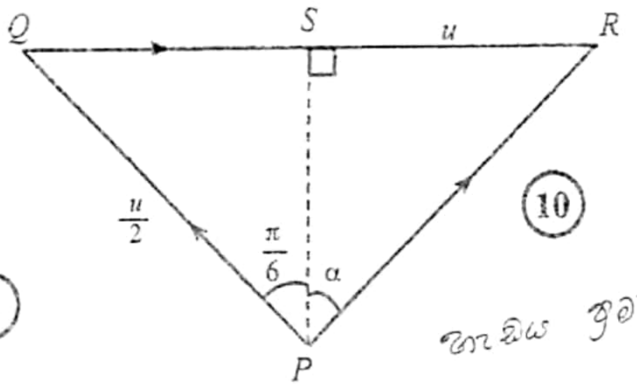
$\therefore\ 3T = 3$ හා $T = 1.$ (5) තව ද $V = 160.$

$a = BHE$ ත්‍රිකෝණයෙහි වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times 3 \times 160$

$= 240$ (5)

25

(b) $\mathbf{V}(S, E) = \leftarrow u$ 5



හැඩය ප්‍රමාණවත්

no arrows needed to get 10 marks.

(i) $\mathbf{V}(B, E) = \frac{u}{2} \nwarrow \frac{\pi}{6}$ 5

$\mathbf{V}(B, S) = \mathbf{V}(B, E) + \mathbf{V}(E, S)$ 5

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

$= \overrightarrow{PR}$

$QS = \frac{u}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{u}{4}$

$\therefore SR = \frac{3u}{4}$

$SP = \frac{u}{2} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}u}{4}$

$\tan\alpha = \frac{SR}{SP} = \frac{3u}{4} \times \frac{4}{\sqrt{3}u} = \sqrt{3}$ 5 + 5

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$ 5

∴ බෝට්ටුවට නැව අල්ලා ගත හැකිය.

$\boxed{40}$

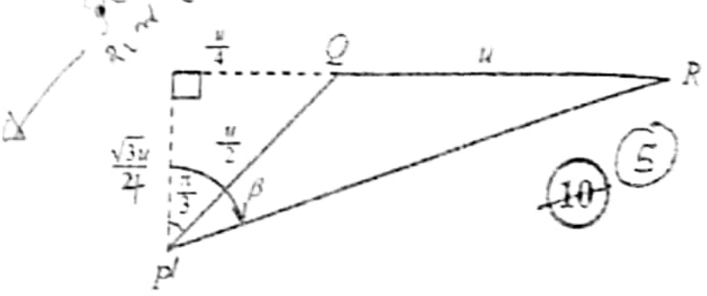
$Q\hat{P}R = \frac{\pi}{2}$

$\therefore PR = \frac{\sqrt{3}u}{2}$ 5

$t = \frac{d}{PR} = \frac{2d}{\sqrt{3}u}$ 5

$\boxed{10}$

(ii) $V(B, E) =$  5

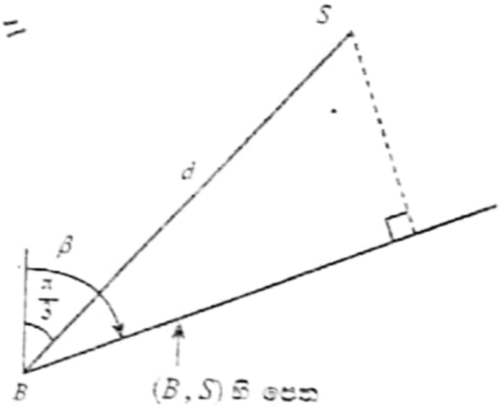


$V(B, S) = V(B, E) + V(E, S)$

$= \overrightarrow{P'Q} + \overrightarrow{QR}$

$= \overrightarrow{P'R}$

$\overrightarrow{P'R} =$



ලබමින් ත්‍රිකෝණයෙන්,

$\sin\beta = \dfrac{5}{2\sqrt{7}}$ හා $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ වේ.

කෙටිම දුර $= d\sin\left(\beta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ 5

$= d\left(\sin\beta\cos\dfrac{\pi}{3} - \cos\beta\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ ~~5~~

$= d\left(\dfrac{5}{4\sqrt{7}} - \dfrac{3}{4\sqrt{7}}\right)$

$= \dfrac{d}{2\sqrt{7}}$ 5

30

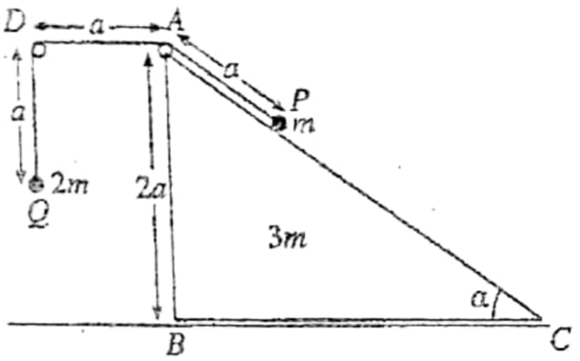
$(P'R)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}u}{4}\right)^2 + \left(u + \dfrac{u}{4}\right)^2$ — 05

$= \dfrac{3u^2}{16} + \dfrac{25u^2}{16}$

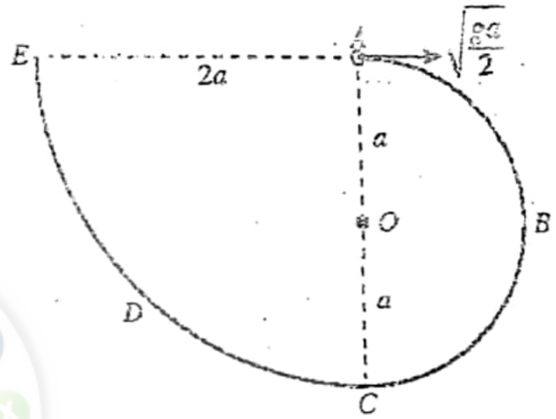
$= \dfrac{28u^2}{16} = \dfrac{7u^2}{4}$

$P'R = \dfrac{\sqrt{7}u}{2}$ — 05

12.(a) රූපයෙහි ABC ත්‍රිකෝණය, $A\hat{C}B=\alpha$, $A\hat{B}C=\frac{\pi}{2}$ හා $AB=2a$ වූ BC අඩංගු මුහුණත සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත තබන ලද ස්කන්ධය $3m$ වන සුමට ඒකාකාර කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය තුළින් වූ සිරස් හරස්කඩ වේ. AC රේඛාව, එය අඩංගු මුහුණතෙහි උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් වේ. D ලක්ෂ්‍යය, AD තිරස් වන පරිදි ABC තලයෙහි වූ අචල ලක්ෂ්‍යයකි. A හා D හි සවිකර ඇති සුමට කුඩා කප්පි දෙකක් මතින් යන දිග $3a$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට පිළිවෙළින් ස්කන්ධය m හා $2m$ වූ P හා Q අංශු දෙක ඇඳා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි P අංශුව AC මත අල්වා තබා $AP=AD=DQ=a$ වන පරිදි Q අංශුව නිදහසේ එල්ලෙමින් පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. Q අංශුව ගෙබිමට ළඟා වීමට ගන්නා කාලය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබා ගන්න.



(b) රූපයේ දැක්වෙන පරිදි $ABCDE$ සුමට තුනී කම්බියක් සිරස් තලයක සවි කර ඇත. ABC කොටස O කේන්ද්‍රය හා අරය a වූ අර්ධ වෘත්තයක් වන අතර CDE කොටස කේන්ද්‍රය A හා අරය $2a$ වූ වෘත්තයකින් හතරෙන් කොටසකි. A හා C ලක්ෂ්‍ය O හරහා යන සිරස් රේඛාවේ පිහිටන අතර, AE රේඛාව තිරස් වේ. ස්කන්ධය m වූ කුඩා සුමට P පබළුවක් A හි තබා තිරස්ව $\sqrt{\frac{ga}{2}}$ ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබන අතර එය කම්බිය දිගේ චලිතය ආරම්භ කරයි.

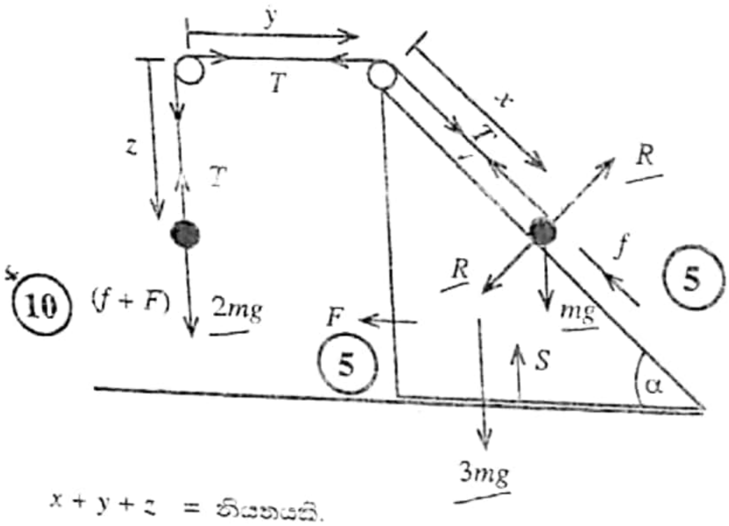


$\overrightarrow{OA}$ සමඟ $\theta\ (0\le\theta\le\pi)$ කෝණයක් $\overrightarrow{OP}$ සාදන විට P පබළුවේ v වේගය, $v^2=\frac{ga}{2}(5-4\cos\theta)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඉහත පිහිටීමේ දී කම්බිය මගින් P පබළුව මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයා, P පබළුව $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$ වූ ලක්ෂ්‍යය පසු කරන විට එය එහි දිශාව වෙනස් කරන බව පෙන්වන්න.

P පබළුව E හි දී කම්බියෙන් ඉවත් වීමට මොහොතකට පෙර එහි ප්‍රවේගය ලියා දක්වා එම මොහොතේ දී කම්බිය මගින් P පබළුව මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

(a)



බල 15

කුඤ්ඤයේ කාර්ය
අංශු ... බල
S නැතුව ඉතිරි බල
R නැති නම් −5 අඩුම
Less S

$x+y+z$ = නියතයකි.

$\ddot{z}=-\ddot{x}-\ddot{y}$

$=f+F$

f + F වෙනුවට f දැම්මොත් ... කරයි
... නොවේ ... නැති ... ක්
→ ... ... නම්

f ලකුණු නැත.

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

(2m) $\downarrow$ සඳහා $2mg - T = 2m(f + F)$ (10) or 0

(m) $\nwarrow$ සඳහා $T - mg\sin\alpha = m(f + F\cos\alpha)$ (10) or zero

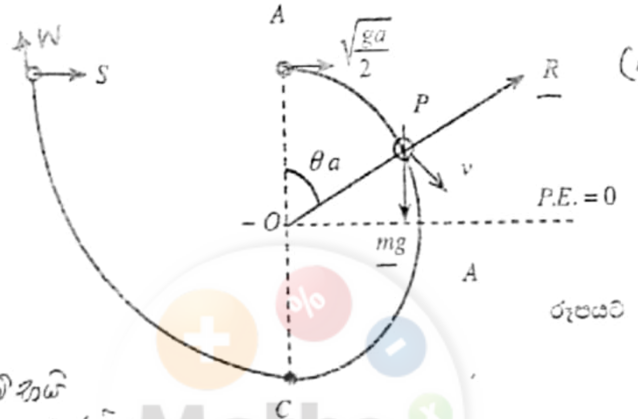
(m) හා (3m) $\leftarrow$ සඳහා $T = 3mF + m(F + f\cos\alpha)$ (15) or zero.

(2m) $\downarrow$ $S = ut + \frac{1}{2}at^2$

$a = \frac{1}{2}(f + F)t^2$, මෙහි t යනු ගත්තා කාලය වේ. (10) $\leftarrow$ f වෙනුවට ලකුණු දෙයි.

$\boxed{80}$

(b)



(R ඇතිවීම)

වක්‍රයෙන් ඉවත්ව මාර්ගයක් ඇතිනොවේ

රූපයට (10) $\leftarrow$ R, mg. or zero

R වලිතයට ලම්බයි
∴ කාර්යක් නොකරයි.

P.E. + K.E. + සමීකරණය

ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන් (5) (5) (5)

$$\frac{1}{2}mv^2 + mga\cos\theta = \frac{1}{2}m\left(\frac{ga}{2}\right) + mga.$$

$$\therefore 2v^2 + 4ga\cos\theta = 5ga$$

$$\therefore v^2 = \frac{ga}{2}(5 - 4\cos\theta) \quad (5)$$

$\boxed{30}$

වෘත්ත චලිතය සඳහා $\underline{F} = m\underline{a}$ $\nearrow$ යෙදීමෙන්

$$R - mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{a} \quad (10) \text{ or zero}$$

$$R = mg\cos\theta - \frac{mg}{2}(5 - 4\cos\theta) \quad (5)$$

$$= \frac{mg}{2}(6\cos\theta - 5)$$

R = 0
$\alpha = \cos^{-1}\frac{5}{6}$ ලෙස හෝ.

$0 < \theta < \alpha$; $R > 0$ හා $\alpha < \theta < \pi$; $R < 0$ මෙහි $\cos\alpha = \frac{5}{6}$ (5)

ඒ නයින්, පබළුව $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$ ලක්ෂ්‍යය පසු කරන විට ප්‍රතික්‍රියාව එහි දිශාව වෙනස් කර ගනියි. $\boxed{20}$

E හිදී ප්‍රවේගය w ලෙස ගනිමු.

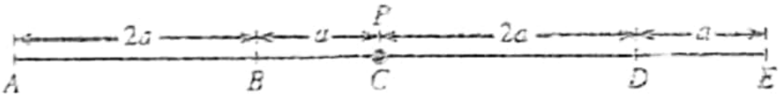
A සිට E දක්වා ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්, $w = \sqrt{\frac{ga}{2}}$ $\uparrow$. (10)

$\underline{F} = m\underline{a}$ $\longrightarrow$ යෙදීමෙන් (5)

$$S = \frac{mw^2}{2a} = \frac{m\left(\sqrt{\frac{ga}{2}}\right)^2}{2a} = \frac{mg}{4} \quad (5)$$

$\boxed{20}$

13. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි $AB = 2a, BC = a,$ $CD = 2a$ හා $DE = a$ වන පරිදි සුමට තිරස් මේසයක් මත A, B, C, D හා E ලක්ෂ්‍ය එම පිළිවෙළින් සරල රේඛාවක් මත පිහිටා ඇත. ස්වභාවික දිග $2a$ හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය kmg වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් A ලක්ෂ්‍යයට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වන P අංශුවකට ඈඳා ඇත. ස්වභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය mg වන තවත් සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් E ලක්ෂ්‍යයට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර P අංශුවට ඈඳා ඇත.



P අංශුව C හි අල්වා තබා මුදා හල විට, එය සමතුලිතතාවේ පවතී. k හි අගය සොයන්න.

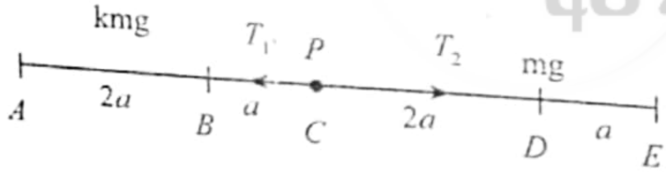
දැන්, P අංශුව D ලක්ෂ්‍යයට ළඟා වන තෙක් AP තන්තුව ඇද නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. D සිට B දක්වා P හි චලිත සමීකරණය $\ddot{x}+\frac{3g}{a}x=0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $CP = x$ වේ. $\dot{x}^2=\frac{3g}{a}(c^2-x^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් P අංශුව B ට ළඟා වන විට එහි ප්‍රවේගය $3\sqrt{ga}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි c යනු විස්තාරය වේ.

P අංශුව B වෙත ළඟා වන විට එයට ආවේගයක් දෙනු ලබන්නේ ආවේගයෙන් මොහොතකට පසු P හි ප්‍රවේගය $\overrightarrow{BA}$ දිශාවට $\sqrt{ag}$ වන පරිදි ය.

B පසු කිරීමෙන් පසු ක්ෂණික නිසලතාවට පත්වන තෙක් P හි චලිත සමීකරණය $\ddot{y}+\frac{g}{a}y=0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $DP = y$ වේ.

D වලින් පටන් ගත් P අංශුව දෙවන වතාවට B වෙත පැමිණීමට ගන්නා මුළු කාලය $2\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right)$ බව පෙන්වන්න.

13.



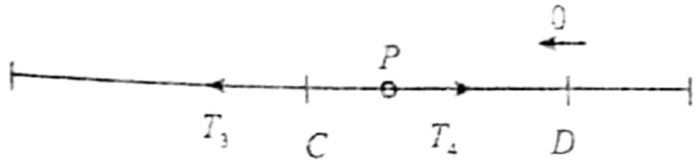
C හිදී P සමතුලිතතාවයේ පවතී.

$\therefore\ T_1 - T_2 = 0$ (5)

$\therefore\ kmg \cdot \frac{a}{2a} = mg \cdot \frac{2a}{a}$ (10) T_1 - ල (05) $T_2 \to$ ල (5)

$\therefore\ k = 4$ (5)

$\boxed{20}$



$\rightarrow \underline{F} = m\underline{a}$ (P) සඳහා :

$-T_3 + T_4 = m\ddot{x}$

$\therefore \quad -4mg.\dfrac{(a+x)}{2a} + mg.\dfrac{(2a-x)}{a} = m\ddot{x}$ (10) or zero

(5) (5)

එවිට, $\dfrac{g}{a}\left\{-2a-2x+2a-x\right\} = \ddot{x}$.

$\therefore \quad \ddot{x} = \dfrac{-3g}{a}x$ (5)

$\therefore \quad \ddot{x} + \dfrac{3g}{a}x = 0$

මෙය $-a \le x \le 2a$ සඳහා වලංගු වේ. ([illegible])

25

මෙම ස. අ. ච. සඳහා කේන්ද්‍රය C ද $x = 2a$ වන විට $\dot{x} = 0$ වේ. $\ddot{x} = 0$ දී කේන්ද්‍රය පිහිටයි
F = 0

(5)

$\therefore$ මෙම ස. අ. ච. හි විස්තාරය $2a$ වේ. (5)

$\therefore \quad \dot{x}^2 = \dfrac{3g}{a}(4a^2 - x^2)$ (5)

B ($x = -a$) හි දී ප්‍රවේගය v යැයි ගනිමු.

එවිට $v^2 = \dfrac{3g}{a}(4a^2 - a^2)$ (5) විකාශනය ලියලනම් ල (20) දෙයි.

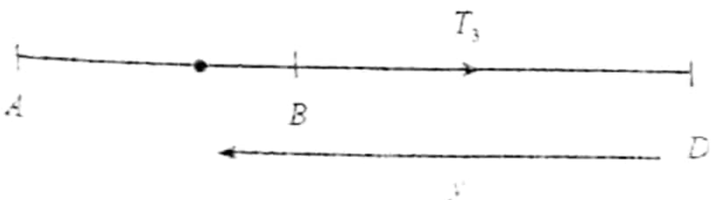
$= 9ga$

$v = 3\sqrt{ga}$ (5)

$\therefore$ P අංශුව පළමුවරට B ට ළඟාවන විට ප්‍රවේගය $3\sqrt{ga}$ $\leftarrow$ වේ.

25

ආවේගය නිසා, ආවේගයට මොහොතකට පසු ප්‍රවේගය $\sqrt{ga}$ වේ.



$$-T_1 = m\ddot{y} \quad 5$$

$$-mg\frac{y}{a} = m\ddot{y} \quad 5$$

$\ddot{y} = 0$ වන්නේ $y = 0$

$y = 0$ දී කේන්ද්‍රය

$$\therefore \ddot{y} = -\frac{g}{a}y$$

$$5$$

$$\text{හෝ } \ddot{y} + \frac{g}{a}y = 0$$

$\boxed{15}$

මෙම ස. අ. ච. හි කේන්ද්‍රය D වේ. 5

විස්තාරය c යැයි ගනිමු.

$$\text{එවිට, } \dot{y}^2 = \frac{g}{a}(c_1^2 - y^2)$$

$$y = 3a \text{ වන විට } \dot{y} = \sqrt{ga} \quad 5$$

$$ga = \frac{g}{a}(c_1^2 - 9a^2). \quad 5$$

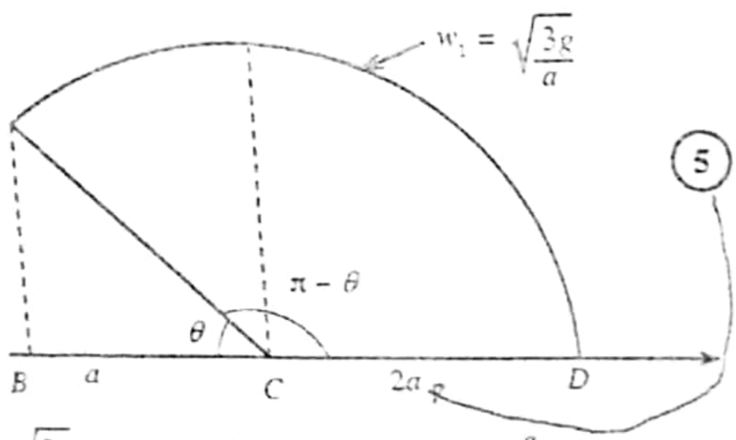
$$\therefore c_1^2 = 10a^2$$

$$\therefore c_1 = \sqrt{10}\,a \quad 5$$

$3a < \underbrace{\sqrt{10}\,a}_{c} < 5a$ නිසා, P අංශුව B හා A අතර F ලක්ෂ්‍යයකදී ක්ෂණික නිසලතාවට පත්වේ.

$\boxed{20}$

D සිට B ට ගන්නා ලද කාලය τ_1 යැයි ගනිමු.



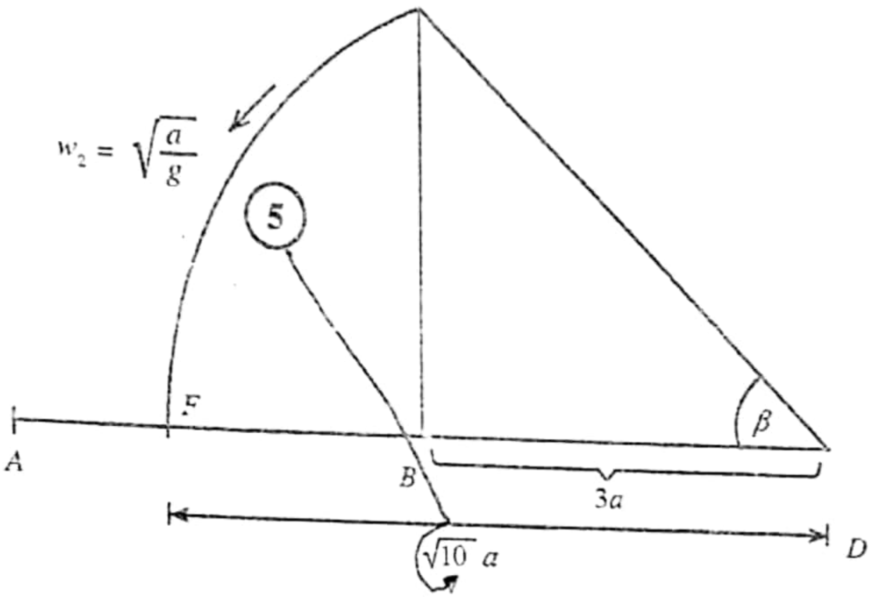
$$\sqrt{\frac{3g}{a}}\,\tau_1 = \pi - \theta. \qquad \text{මෙහි } \cos\theta = \frac{a}{2a}$$

$$5$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad 5$$

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{g}{3g}} \times \frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{a}{g}} \quad (5)$$



B සිට F ට ගන්නා ලද කාලය τ_2 යැයි ගනිමු.

$\sqrt{\frac{g}{a}}\,\tau_2 = \beta$ (5) හා $\cos\beta = \frac{3a}{\sqrt{10}\,a}$

$\therefore \tau_2 = \sqrt{\frac{a}{g}}\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ (5) $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

F සිට B ට ගන්නා ලද කාලය τ_3 යැයි ගනිමු. (දෙවන වතාවට B ට පැමිණීම.)

$\tau_3 = \tau_2$

$\therefore$ අවශ්‍ය කාලය $= \tau_1 + 2\tau_2$ (5)

$$= 2\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right\} \quad (5)$$

45

14. (a) $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ යනු ඒකක දෛශික දෙකක් යැයි ගනිමු.

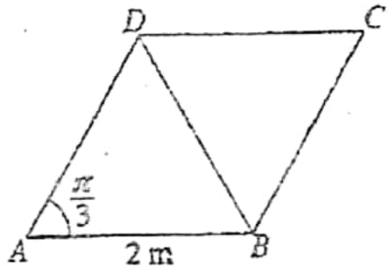
O මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A, B හා C ලක්ෂ්‍ය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $12\mathbf{a}$, $18\mathbf{b}$ හා $10\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ වේ.

$\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ ඇසුරෙන් $\overrightarrow{AC}$ හා $\overrightarrow{CB}$ ප්‍රකාශ කරන්න.

A, B හා C ඒක රේඛීය බව අපෝහනය කර, $AC : CB$ සොයන්න.

$OC = \sqrt{139}$ බව දී ඇත. $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(b) $ABCD$ යනු $AB = 2$ m හා $B\hat{A}D = \frac{\pi}{3}$ වූ රොම්බසයකි. විශාලත්වය 10 N, 2 N, 6 N, P N හා Q N වූ බල පිළිවෙළින් AD, BA, BD, DC හා CB දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය 10 N ද එහි දිශාව BCට සමාන්තර B සිට C දක්වා වූ දිශාව බව ද දී ඇත. P හා Q හි අගයන් සොයන්න.



සම්ප්‍රයුක්ත බලයෙහි ක්‍රියා රේඛාව, දික් කරන ලද BA හමුවන ලක්ෂ්‍යයට A සිට ඇති දුර ද සොයන්න.

දැන්, සම්ප්‍රයුක්ත බලය A හා C ලක්ෂ්‍ය හරහා යන පරිදි වාමාවර්ත අතට ක්‍රියා කරන ඝූර්ණය M Nm වූ යුග්මයක් ද CB හා DC දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරන එක එකෙහි විශාලත්වය F N වූ බල දෙකක් ද පද්ධතියට එකතු කරනු ලැබේ. F හා M හි අගයන් සොයන්න.

(a)
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$$
$$= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \quad (5)$$
$$= 10\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 12\mathbf{a}$$
$$= -2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} \quad (5)$$

දෙනිත ලකුණු
දීලම නැතිනම්
ලකුණක් අඩු කරයි.

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \quad (5)$$
$$= 18\mathbf{b} - (10\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) = -10\mathbf{a} + 15\mathbf{b} \quad (5)$$

$\boxed{20}$

$$\overrightarrow{CB} = 5\overrightarrow{AC} \quad (5)$$

$\therefore A, B$ හා C ඒක රේඛීය වන අතර. (5)

$AC : CB = 1 : 5$ (5)

$\boxed{15}$

$OC = \sqrt{139} \Rightarrow \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} = 139$ (5)

$(10\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (10\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) = 139$ (5)

$100|\mathbf{a}|^2 + 60\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 9|\mathbf{b}|^2 = 139$ (5)

$60\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 30$

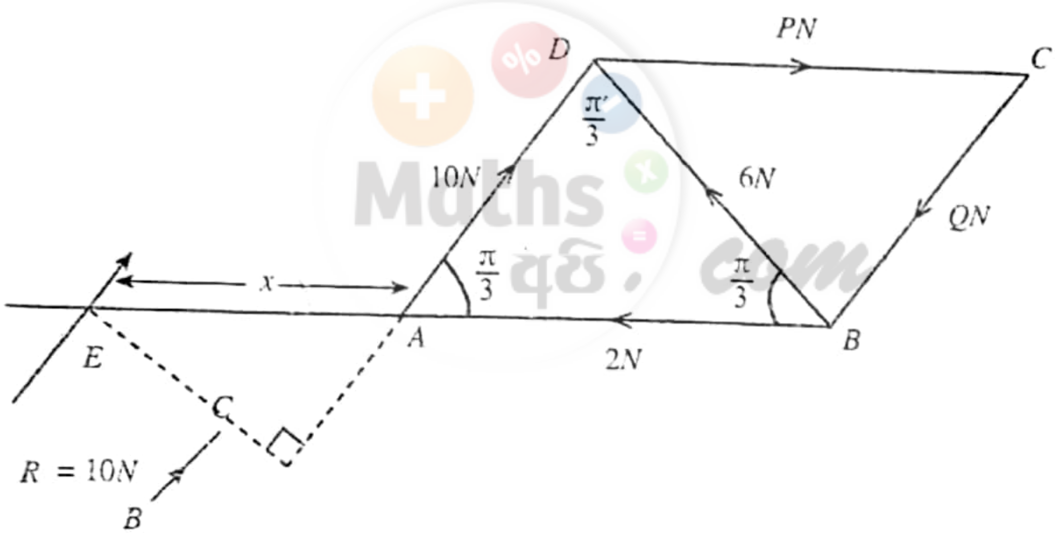
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}$ (5)

$|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\ \cos A\hat{O}B = \frac{1}{2}$ (5)

$\therefore A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ (5)

$\boxed{30}$

(b)



(10) ශූන්‍ය හෝ zero වන බල ලකුණු කිරීම

$\uparrow\ 10 \sin\frac{\pi}{3} = 10 \sin\frac{\pi}{3} - Q \sin\frac{\pi}{3} - 6 \sin\frac{\pi}{3}$ (10) ← එක mistake ට (5) ක් අඩු කරන්න.

$\therefore Q = 6$ (5)

$\rightarrow\ 10 \cos\frac{\pi}{3} = P - 2 - 6 \cos\frac{\pi}{3} - 6 \cos\frac{\pi}{3} + 10 \cos\frac{\pi}{3}$ (10)

$\frac{20}{40}$ ← ලකුණු 20 වෙනුවට

$\therefore P = 8$ (5)

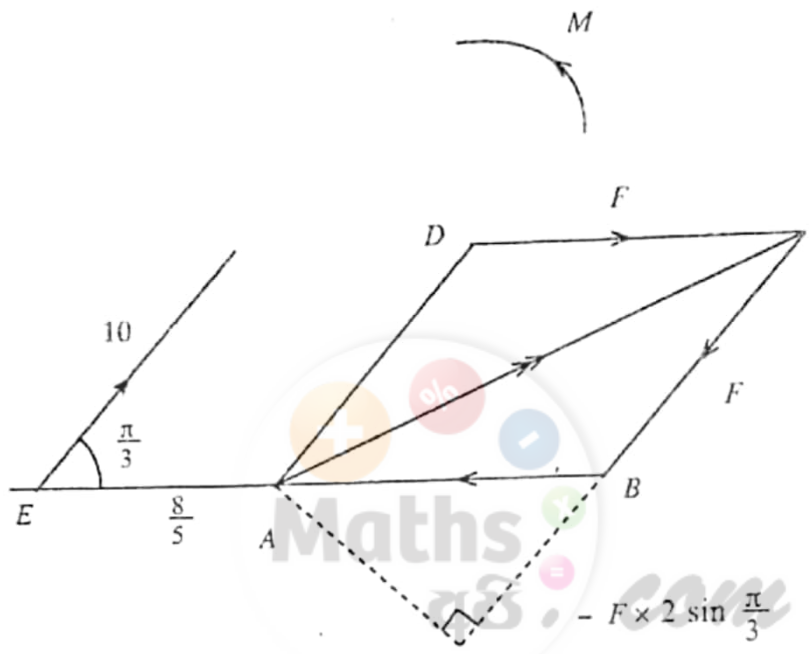
$\boxed{40}$

$E \curvearrowright \quad 10x \sin\frac{\pi}{3} - 6x\,(2+x)\sin\frac{\pi}{3} - 8x2\sin\frac{\pi}{3} + 6\,(2+x)\sin\frac{\pi}{3} = 0$ (10) or zero

$\therefore 10x\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

$\therefore x = \frac{8}{5}$ m (5)

$\boxed{15}$



$A \curvearrowright \quad -10 \times \frac{8}{5}\sin\frac{\pi}{3} + M - F \times 2\sin\frac{\pi}{3} = 0$ (10) or zero Method marks given answer marks not given

$M = F \times 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$ (5)

$C \curvearrowright \quad M - 10\left(2 + \frac{8}{5}\right)\sin\frac{\pi}{3} = 0$ (5)

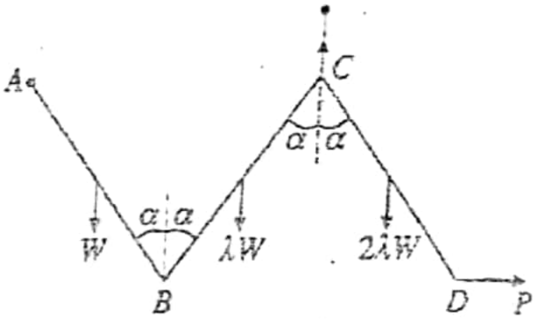
$M = 10 \times \frac{18}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 18\sqrt{3}$ (5)

$F = \frac{18\sqrt{3} - 8\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 5.$ (5)

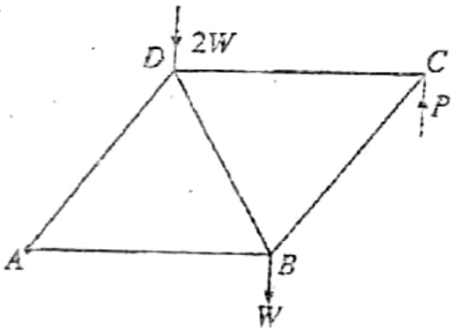
$\boxed{30}$

15.(a) එක එකෙහි දිග $2a$ වන AB, BC හා CD ඒකාකාර දඬු තුනක් B හා C අන්තවල දී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB, BC හා CD දඬුවල බර පිළිවෙළින් $W, \lambda W$ හා $2\lambda W$ වේ. A කෙළවර අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි දඬු සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්තේ A හා C එකම තිරස් මට්ටමේ ද දඬු එක එකක් සිරස සමග α කෝණයක් සාදන පරිදි ද C සන්ධියට හා C ට සිරස්ව ඉහළින් වූ අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් හා D අන්තයට යෙදූ තිරස් P බලයක් මගිනි. $\lambda = \frac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න.



B හි දී CB මගින් AB මත ඇති කරන බලයේ තිරස් හා සිරස් සංරචක පිළිවෙළින් $\frac{W}{3}\tan\alpha$ හා $\frac{W}{6}$ බව ද පෙන්වන්න.

(b) යාබද රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ල සාදා ඇත්තේ A, B, C හා D හි දී නිදහසේ සන්ධි කරන ලද එක එකෙහි දිග $2a$ වන AB, BC, CD, DA හා BD සැහැල්ලු දඬු මගිනි. B හා D හි දී පිළිවෙළින් W හා $2W$ වන භාර ඇත. රාමු සැකිල්ල A හි දී සුමටව අචල ලක්ෂ්‍යයකට අසව් කර AB තිරස්ව ඇතිව සමතුලිතතාවේ තබා ඇත්තේ C හි දී සිරස්ව ඉහළට යොදන ලද P බලයක් මගිනි. W ඇසුරෙන් P හි අගය සොයන්න.



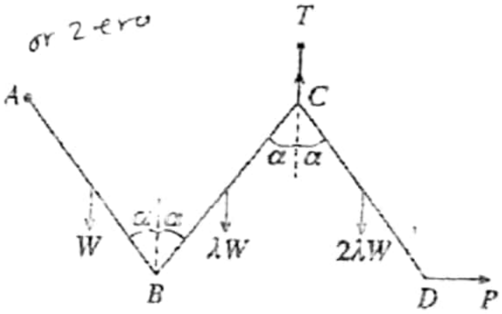
බෝ අංකනය භාවිතයෙන්, ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ ඒ ඇසින්, දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න සඳහන් කරමින් ඒවා සොයන්න.

(a) CD සඳහා C වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$C \curvearrowright \quad 2\lambda W a \sin\alpha - P\,2a\cos\alpha = 0 \qquad 5$$

or 2-ero

$$\therefore P = \lambda W \tan\alpha \qquad 5$$



BC හා CD සඳහා B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$B \curvearrowright \quad \lambda W a \sin\alpha - T\,2a\sin\alpha + 2\lambda W\,3a\sin\alpha = 0 \qquad 10$$

or 2-ero

$$\therefore T = \frac{7}{2}\lambda W \qquad 5$$

AB, BC හා CD සඳහා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

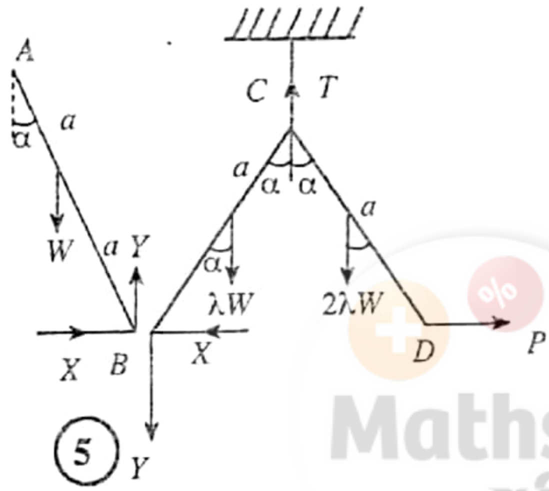
$A \curvearrowright$ $Wa \sin \alpha + \lambda W\, 3a \sin \alpha - T\, 4a \sin \alpha + 2\lambda W\, 5a \sin \alpha - P\, 2a \cos \alpha = 0$ (10) or zero

$W \sin \alpha + 13\lambda W \sin \alpha - 14\lambda W \sin \alpha - \lambda W \tan \alpha\ 2 \cos \alpha = 0$ (5)

$1 - \lambda - 2\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$ (5)

45



(5)

BC හා CD සඳහා

$\uparrow$ $Y + 3\lambda W - T = 0$

$\therefore Y = \frac{7}{2}\lambda W - 3\lambda W$ (5)

$= \frac{\lambda W}{2}$

$= \frac{W}{6}$

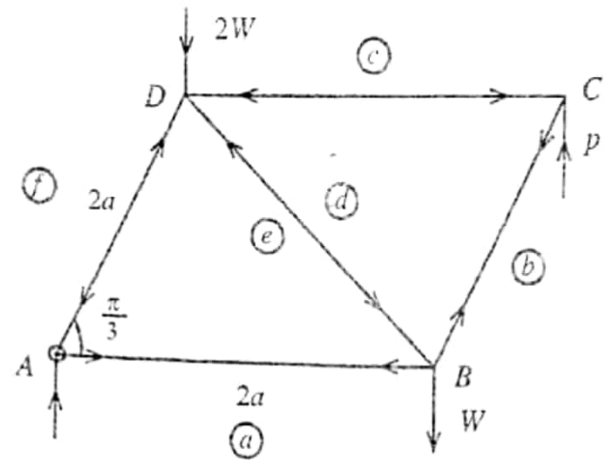
$\leftarrow$ $X - P = 0$

$\therefore X = \frac{1}{3} W \tan \alpha$ (5)

15

Scanned with CamScanner

(b)

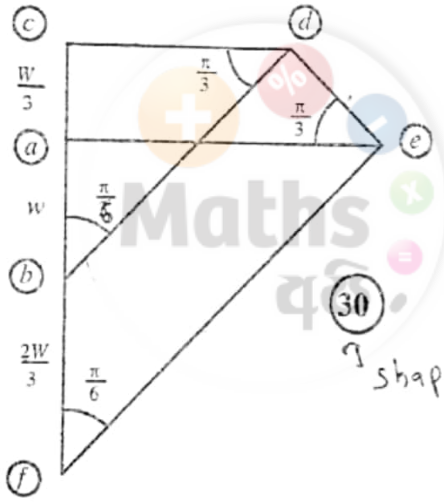


$$\overset{\curvearrowright}{A} \quad 2Wa + W\,2a - P\,3a = 0$$

$$\therefore\ P = \frac{4W}{3} \quad (10)$$

වරදක් නම් ල (-5)

10



(එක් එක් සන්ධිය සඳහා 10)

(30)

7 shape.

වෙන වෙනම ඇඳ ඇත්නම් -5 බැගින් අඩු කරන්න.

30

දණ්ඩ	ආතතිය	තෙරපුම	
AB	$\frac{5\sqrt{3}\,W}{9}$	–	(5) + (5)
BC	$\frac{8\sqrt{3}\,W}{9}$	–	(5) + (5)
CD	–	$\frac{4\sqrt{3}\,W}{9}$	(5) + (5)
DA	–	$\frac{10\sqrt{3}\,W}{9}$	(5) + (5)
BD	–	$\frac{2\sqrt{3}\,W}{9}$	(5) + (5)

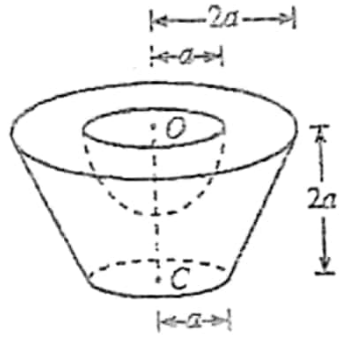
50

---

16. (i) පතුලේ අරය r හා උස h වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය පතුලේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{h}{4}$ දුරකින් ද

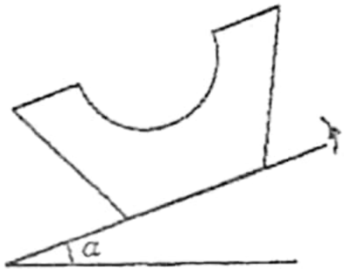
(ii) අරය r වන ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3r}{8}$ දුරකින් ද

පිහිටන බව පෙන්වන්න.



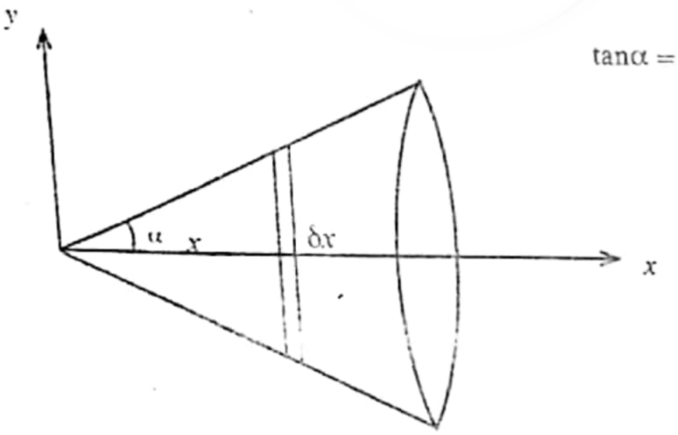
පතුලේ අරය $2a$ හා උස $4a$ වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්ත කේතුවක ඡින්නකයකින් ඝන අර්ධ ගෝලයක් ඉවත් කර සාදා ඇති S වංගෙඩියක් යාබද රූපයේ දැක්වේ. ඡින්නකයේ ඉහළ වෘත්තාකාර මුහුණතේ අරය හා කේන්ද්‍රය පිළිවෙළින් $2a$ හා O වන අතර පහළ වෘත්තාකාර මුහුණත සඳහා ඒවා පිළිවෙළින් a හා C වේ. ඡින්නකයේ උස $2a$ වේ. ඉවත් කළ ඝන අර්ධ ගෝලයෙහි අරය හා කේන්ද්‍රය පිළිවෙළින් a හා O වේ.

S වංගෙඩියේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{41}{48}a$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



S වංගෙඩිය, එහි පහළ වෘත්තාකාර මුහුණත, තලය ස්පර්ශ කරමින් රළු තිරස් තලයක් මත තබා ඇත. දැන්, තලය සෙමෙන් උඩු අතට ඇල කරනු ලැබේ. වංගෙඩිය හා තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය 0.9 වේ. $\alpha < \tan^{-1}(0.9)$ නම්, වංගෙඩිය සමතුලිතතාවේ පවතින බව පෙන්වන්න; මෙහි α යනු තලයේ තිරසට ආනතිය වේ.

(i) ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්ත කේතුව



$\tan\alpha = \frac{r}{h}$

සමමිතියට අනුව ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි. 5

$\delta m = \pi (x\tan\alpha)^2\,\delta x\,\rho$, මෙහි ρ යනු ඝනත්වයයි.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h \pi \tan^2\alpha\, \rho x^2 . x\, dx}{\int_0^h \pi \tan^2\alpha\, \rho x^2\, dx} \quad 5 \quad 5$$

$$= \frac{\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^h}{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h} \quad 5 \quad 5$$

$$= \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{3h}{4}.$$

$\therefore$ පතුලේ කේන්ද්‍රයේ සිට දුර $= h - \dfrac{3h}{4}$

$$= \frac{h}{4} \quad 5$$

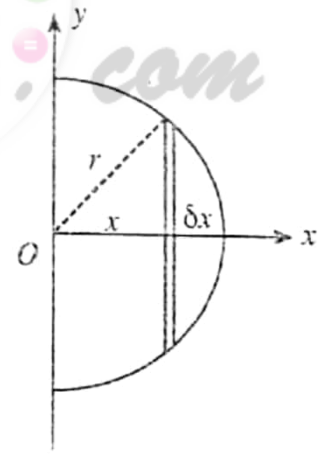
30

(i) ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලය

සමමිතිය අනුව ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි. 5

$\delta m = \pi (r^2 - x^2)\, \delta x\, \sigma,$

මෙහි σ යනු ඝනත්වයයි.



$$\bar{x} = \frac{\int_0^r \pi (r^2 - x^2)\, \sigma x\, dx}{\int_0^r \pi (r^2 - x^2)\, \sigma\, dx} \quad 5 \quad 5$$

$$= \frac{\left.\left(\frac{r^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\right|_0^r}{\left.\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^r} \quad 5 \quad 5$$

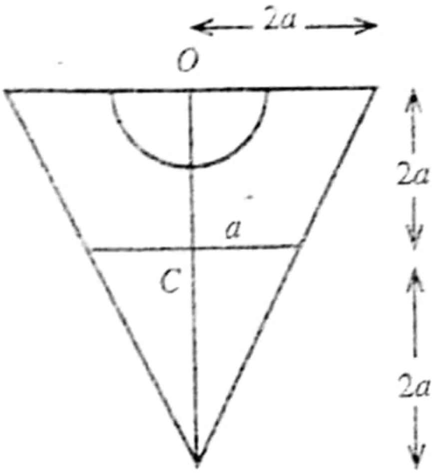
$$= \frac{\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4}}{r^3 - \frac{r^3}{3}}$$

$$= \frac{3r}{8} \quad 5$$

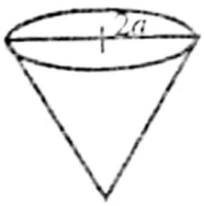
ජ්‍යාමිතිව කෙළින්ම ලිවිය හැක. නැත්නම් ල - (5)

30

Scanned with CamScanner



ඝනත්වය σ

වස්තුව	ස්කන්ධය	O සිට දුර ↓
	$\frac{16}{3}\pi a^3\rho$ 5	a 5
	$\frac{2}{3}\pi a^3\rho$ 5	$\frac{5a}{2}$ 5
	$\frac{2}{3}\pi a^3\rho$ 5	$\frac{3a}{8}$ 5
	$4\pi a^3\rho$ 5	$\bar{x}$

සමමිතිය අනුව ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත පිහිටයි. 5

$$4\pi a^3\rho\,\bar{x} = \frac{16}{3}\pi a^3\rho a - \frac{2}{3}\pi a^3\rho\,\frac{5a}{2} - \frac{2}{3}\pi a^3\rho a\,\frac{3a}{8}$$ 20

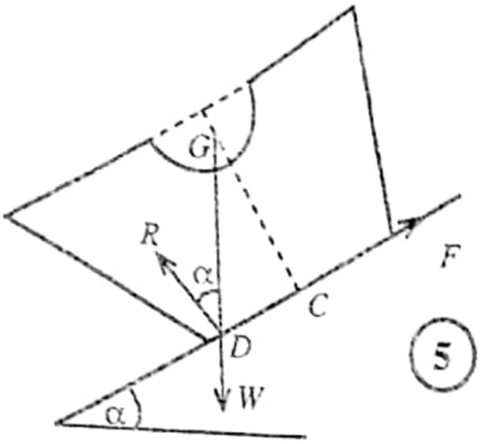
1 වැරැද්ද -5
for 2 mistakes deduct -10 marks

$$4\bar{x} = \frac{16}{3}a - \frac{5a}{2} - \frac{a}{4}$$

for 3 mistakes → no marks

$$\bar{x} = \frac{41a}{48}$$ 5

65



5 ← බල

ලිස්සා යාම වැළැක්වීමට

$\mu \geq \tan\alpha$

$\therefore 0.9 \geq \tan\alpha$ 10

එනම්, $\alpha \leq \tan^{-1}(0.9)$

20

පෙරළීම වැළැක්වීමට

$CD < a$

$\therefore CG \tan\alpha < a.$

එනම්, $\frac{55a}{48} \tan\alpha < a$ 10

එනම්, $\alpha < \tan^{-1}\left(\frac{48}{55}\right)$

$\boxed{25}$

ලිස්සීමට හෝ පෙරළීමට 2 න් 1 ක් වත් ලියා ඇත්නම් ඔ - 20 දෙයි.

7.(a) එක්තරා කර්මාන්තශාලාවක අයිතමවලින් 50% ක් A යන්ත්‍රය නිපදවන අතර ඉතිරිය B හා C යන්ත්‍ර මගින් නිපදවනු ලැබේ. A, B හා C යන්ත්‍ර මගින් නිපදවනු ලබන අයිතමවලින් පිළිවෙළින් 1%, 3% හා 2% ක් දෝෂ සහිත බව දනිමු. සසම්භාවීව තෝරාගත් අයිතමයක් දෝෂ සහිත වීමේ සම්භාවිතාව 0.018 බව දී ඇත. B හා C යන්ත්‍ර මගින් නිපදවනු ලබන අයිතමවල ප්‍රතිශත සොයන්න.

සසම්භාවී ලෙස තෝරාගත් අයිතමයක් දෝෂ සහිත බව දී ඇති විට, එය A යන්ත්‍රය මගින් නිපදවන ලද එකක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b) එක්තරා කර්මාන්තශාලාවක සේවකයින් 100 දෙනකු තම නිවසේ සිට සේවා ස්ථානයට ගමන් කිරීමට ගනු ලබන කාලය (මිනිත්තුවලින්) පහත වගුවේ දී ඇත:

ගනු ලබන කාලය	සේවකයින් ගණන
0 – 20	10
20 – 40	30
40 – 60	40
60 – 80	10
80 – 100	10

ඉහත දී ඇති ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය, සම්මත අපගමනය හා මාතය නිමානය කරන්න.

පසුව, 80 – 100 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සිටි සියලු ම සේවකයින් කර්මාන්තශාලාව ආසන්නයේ පදිංචියට ගොස් ඇත. එයින්, 80 – 100 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සංඛ්‍යාතය 10 සිට 0 දක්වා ද 0 – 20 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සංඛ්‍යාතය 10 සිට 20 දක්වා ද වෙනස් විය.

නව ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය, සම්මත අපගමනය හා මාතය නිමානය කරන්න.

(a)

	A	B	C
නිෂ්පාදන සම්භාවිතාව	$\frac{1}{2}$	p	$\frac{1}{2} - p$
දෝෂ ඇතිවීමේ සම්භාවිතාව	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{2}{100}$

D – සම්භාවිතාව තෝරාගත් අයිතමයක් දෝෂ සහිත එකක් වීම

$$P(D) = P(D/A)\,P(A) + P(D/B)\,P(B) + P(D/C)\,P(C)$$

$$0.018 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{100} \times p + \frac{2}{100} \times \left(\frac{1}{2} - p\right) \quad 10$$

/ Total probability Th (05) Can be given then stop work. or zero

$$3.6 = 1 + 6p + 2 - 4p$$

$$\therefore p = 0.3 \quad 5$$

∴ B යන්ත්‍රය මගින් නිපදවන ලද භාණ්ඩවල ප්‍රතිශතය 30% 5

∴ C යන්ත්‍රය මගින් නිපදවන ලද භාණ්ඩවල ප්‍රතිශතය 20% 5

$\boxed{25}$

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)\,P(A)}{P(D)}$$ (10)

$$= \frac{\frac{1}{100} \times \frac{1}{2}}{0.018}$$ or (5) (10) or (5)

$$= \frac{1}{100 \times 2}$$

$$= \frac{1}{\frac{18}{1000}}$$

$$= \frac{5}{18}$$ (5)

25

ගතවූ කාලය	f	මධ්‍ය අගය x (5)	$y = \frac{1}{10}x$	y^2	fy (5)	fy^2 (5)
0 - 20	10	10	1	1	10	10
20 - 40	30	30	3	9	90	270
40 - 60	40	50	5	25	200	1000
60 - 80	10	70	7	49	70	490
80 - 100	10	90	9	81	90	810
	100				$\sum fy = 460$ (5)	$\sum fy^2 = 2580$ (5)

column එකක් වැරදි නම් column marks will be not given.

$$\mu_y = \frac{\sum fy}{\sum f} = \frac{460}{100} = \frac{23}{5}$$ (5)

හා

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum fy^2}{\sum f} - \mu_y^2$$

$$= \frac{2580}{100} - \left(\frac{23}{5}\right)^2$$ (5)

වැරදි අගය ක්‍රමයට ලකුණු දෙන්.

$$= \frac{116}{25}$$

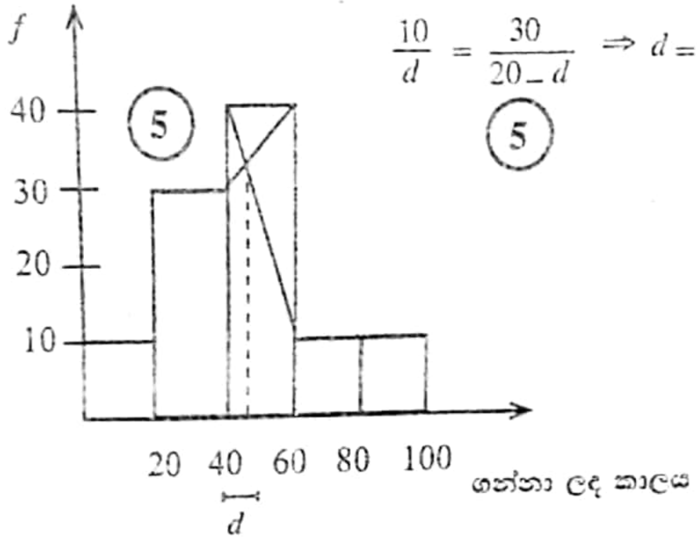
$$\therefore \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{116}{25}}$$ (5)

$$= \frac{2\sqrt{29}}{5}$$

$\therefore$ මධ්‍යනය $\mu_x = 10\mu_y = 10 \times \frac{23}{5} = 46$ 5

$\therefore$ සම්මත අපගමනය $\sigma_x = 10\sigma_y = 10 \times \frac{2\sqrt{29}}{5} = 4\sqrt{29} \approx 21.54$ 5

මාතය



$\frac{10}{d} = \frac{30}{20-d} \Rightarrow d = 5 \quad \therefore$ මාතය $= 40 + d = 45$ 5

5

65

(b) නව ව්‍යාප්තිය සඳහා :

$$\mu_y = \frac{1}{100}\left[\sum_1^5 fy - f_1y_1 - f_5y_5 + 20 \times 1\right]$$

ගේ ක්‍රමය නොකර
Mean සොයාගත්ට
e - 10

$$= \frac{1}{100}[460 - 10 - 90 + 20] = \frac{380}{100}$$ 5

$$= \frac{19}{5}$$

$\therefore$ නව මධ්‍යනය $= 10 \times \frac{19}{5} = 38$ 5

$$\sigma_y^2 = \left[\sum_1^5 fy^2 - f_1y_1^2 - f_5y_5^2 + 20 \times 1^2\right] - \left(\frac{19}{5}\right)^2$$

Method - 10
final answer - 05

$$= \frac{1}{100}[2580 - 10 - 810 + 20] - \frac{361}{25}$$ 5

$$= \frac{1780}{100} - \frac{361}{25}$$

$$= \frac{84}{25}$$

$\therefore \quad \sigma_y = \frac{\sqrt{84}}{5} = \frac{2\sqrt{21}}{5}$ 5

$\therefore$ නව සම්මත අපගමනය $= 10 \times \frac{2\sqrt{21}}{5} = 4\sqrt{21} \approx 18.33$ 5

මානය වෙනස් නොවේ. 10 ($\because$ මාත පන්තියේ දෙපස සංඛ්‍යාත වෙනස් නොවේ.)

35