

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව  
 இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம்  
 Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka  
 ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව  
 இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம்  
 Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka

**අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2018 අගෝස්තු**  
**கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2018 ஓகஸ்ட்**  
**General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2018**

**සංයුක්ත ගණිතය I**  
**இணைந்த கணிதம் I**  
**Combined Mathematics I**



**2018.08.06 / 0830 - 1140**

**පැය තුනයි**  
**மூன்று மணித்தியாலம்**  
**Three hours**

**අමතර කියවීමේ කාලය - මිනිත්තු 10 යි**  
**மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்**  
**Additional Reading Time - 10 minutes**

අමතර කියවීමේ කාලය ප්‍රශ්න පත්‍රය කියවා ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීමටත් පිළිතුරු ලිවීමේදී ප්‍රමුඛත්වය දෙන ප්‍රශ්න සංවිධානය කර ගැනීමටත් යොදාගන්න.

විභාග අංකය									
------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**උපදෙස්:**

- \* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;  
**A කොටස** (ප්‍රශ්න 1 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
- \* **A කොටස:**  
**සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න.** එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
- \* **B කොටස:**  
**ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.** ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- \* නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය, **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- \* ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.

**පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.**

(10) සංයුක්ත ගණිතය I		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
<b>A</b>	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
<b>B</b>	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
	ප්‍රතිශතය	

<b>I පත්‍රය</b>	
<b>II පත්‍රය</b>	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

**අවසාන ලකුණු**

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

**සංකේත අංක**

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ:	1
	2
අධීක්ෂණය කළේ:	

A කොටස

1. ගණිත අභ්‍යන්තර මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු  $n \in \mathbb{Z}^+$  සඳහා  $\sum_{r=1}^n r^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$  බව සාධනය කරන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. එක ම රූප සටහනක  $y = 3 - |x|$  හා  $y = |x - 1|$  හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.  
ඒ නමින් හෝ අන් අගුරකින් හෝ,  $|x| + |x - 1| \leq 3$  අසමානතාව සපුරාලන  $x$  හි සියලු ම තාත්වික අගයන් සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. ආගන්ථි සටහනක,  $\text{Arg}(z - 3i) = -\frac{\pi}{3}$  සපුරාලන  $z$  සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.  
 ඒ නයිත් හෝ අන් අගුරකින් හෝ,  $\text{Arg}(\bar{z} + 3i) = \frac{\pi}{3}$  වන පරිදි  $|z - 1|$  හි අවම අගය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

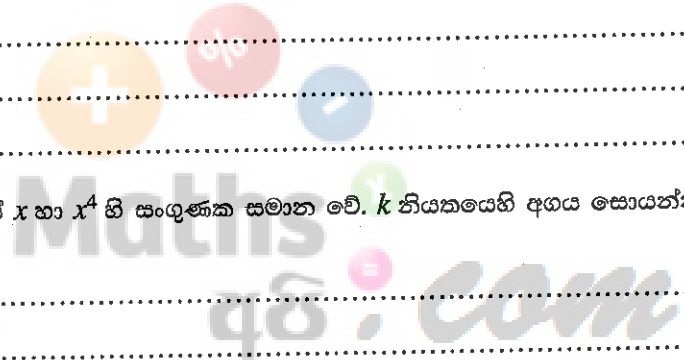
.....

.....

.....

.....

4.  $\left(x^2 + \frac{3k}{x}\right)^8$  හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ  $x$  හා  $x^4$  හි සංගුණක සමාන වේ.  $k$  නියතයෙහි අගය සොයන්න.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \frac{\pi^2}{32}$  බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6.  $y = e^{2x}, y = e^{3-x}, x = 0, x = 3$  හා  $y = 0$  වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය, වර්ග ඒකක  $\frac{3}{2}(e^2 - 1)$  බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7.  $\frac{\pi}{2} < t < \pi$  සඳහා  $x = \ln\left(\tan \frac{t}{2}\right)$  හා  $y = \sin t$  පරාමිතික සමීකරණ මගින්  $C$  වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ.

$\frac{dy}{dx} = \cos t \sin t$  බව පෙන්වන්න.

$t = \frac{2\pi}{3}$  ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයෙහි දී  $C$  වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශ රේඛාවෙහි අනුක්‍රමණය  $-\frac{\sqrt{3}}{4}$  බව අපෝහනය කරන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8.  $l_1$  යනු  $x + y - 5 = 0$  සරල රේඛාව යැයි ගනිමු.  $P \equiv (3, 4)$  ලක්ෂ්‍යය හරහා යන හා  $l_1$  ට ලම්බ වූ  $l_2$  සරල රේඛාවෙහි සමීකරණය සොයන්න.

$Q$  යනු  $l_1$  හා  $l_2$  හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය යැයි ද  $R$  යනු  $PQ : QR = 1 : 2$  වන පරිදි  $l_2$  මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු.  $R$  හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9.  $P \equiv (1, 2)$  හා  $Q \equiv (7, 10)$  යැයි ගනිමු.  $P$  හා  $Q$  ලක්ෂ්‍ය විෂ්කම්භයක අන්ත ලෙස වූ වෘත්තයෙහි සමීකරණය  $S \equiv (x - 1)(x - a) + (y - 2)(y - b) = 0$  වන පරිදි  $a$  හා  $b$  නියතවල අගයන් ලියා දක්වන්න.

$S' \equiv S + \lambda(4x - 3y + 2) = 0$  යැයි ගනිමු; මෙහි  $\lambda \in \mathbb{R}$  වේ.  $P$  හා  $Q$  ලක්ෂ්‍ය  $S' = 0$  වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වා, මෙම වෘත්තය  $R \equiv (1, 4)$  ලක්ෂ්‍යය හරහා යන පරිදි  $\lambda$  හි අගය සොයන්න.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

10.  $x \neq (2n + 1) \frac{\pi}{2}$  සඳහා  $\sec^3 x + 2 \sec^2 x \tan x + \sec x \tan^2 x = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$  බව පෙන්වන්න; මෙහි  $n \in \mathbb{Z}$  වේ.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව  
 இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம்  
 Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka  
 ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව  
 இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம்

**අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2018 අගෝස්තු**  
**கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2018 அகஸ்து**  
**General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2018**

සංයුක්ත ගණිතය I  
 இணைந்த கணிதம் I  
 Combined Mathematics I

10 S I

**B කොටස**

\* ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a)  $a, b \in \mathbb{R}$  යැයි ගනිමු.  $3x^2 - 2(a + b)x + ab = 0$  සමීකරණයේ විචලකය  $a$  හා  $b$  ඇසුරෙන් ලියා දක්වා ඒ නයිත්, මෙම සමීකරණයේ මූල තාත්වික බව පෙන්වන්න.  
 මෙම මූල  $\alpha$  හා  $\beta$  යැයි ගනිමු.  $a$  හා  $b$  ඇසුරෙන්  $a + \beta$  හා  $a\beta$  ලියා දක්වන්න.  
 දැන්,  $\beta = a + 2$  යැයි ගනිමු.  $a^2 - ab + b^2 = 9$  බව පෙන්වා,  
 $|a| \leq \sqrt{12}$  බව අපෝහනය කර,  $a$  ඇසුරෙන්  $b$  සොයන්න.
- (b)  $c (\neq 0)$  හා  $d$  තාත්වික සංඛ්‍යා යැයි ද  $f(x) = x^3 + 4x^2 + cx + d$  යැයි ද ගනිමු.  $(x + c)$  මගින්  $f(x)$  බෙදූ විට ශේෂය  $-c^3$  වේ. තව ද  $(x - c)$  යන්න  $f(x)$  හි සාධකයක් වේ.  $c = -2$  හා  $d = -12$  බව පෙන්වන්න.  
 $c$  හා  $d$  හි මෙම අගයන් සඳහා  $(x^2 - 4)$  මගින්  $f(x)$  බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

12. (a) එක එකක පිරිමි ලමයින් තිදෙනකු හා ගැහැනු ලමයින් දෙදෙනකු සිටින කණ්ඩායම් දෙකක සාමාජිකයන් අතුරෙන්, සාමාජිකයන් හයදෙනකුගෙන් යුත් කමිටුවක් තෝරා ගත යුතුව ඇත්තේ කමිටුවේ සිටින ගැහැනු ලමයින් සංඛ්‍යාව වැඩි තරමින් දෙදෙනකු වන පරිදි ය.  
 (i) කමිටුවට එක් එක් කණ්ඩායමෙන් සාමාජිකයන් ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් තෝරා ගත යුතු නම්,  
 (ii) කමිටුවට එක් ගැහැනු ලමයකු පමණක් තෝරා ගත යුතු නම්,  
 සෑදිය හැකි එවැනි වෙනස් කමිටු ගණන සොයන්න.

(b)  $r \in \mathbb{Z}^+$  සඳහා  $f(r) = \frac{1}{(r+1)^2}$  සහ  $U_r = \frac{(r+2)}{(r+1)^2(r+3)^2}$  යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$  සඳහා  $f(r) - f(r+2) = 4U_r$  බව පෙන්වන්න.

ඒ නයිත්,  $n \in \mathbb{Z}^+$  සඳහා  $\sum_{r=1}^n U_r = \frac{13}{144} - \frac{1}{4(n+2)^2} - \frac{1}{4(n+3)^2}$  බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$  අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$n \in \mathbb{Z}^+$  සඳහා  $t_n = \sum_{r=n}^{2n} U_r$  යැයි ගනිමු.

$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$  බව පෙන්වන්න.

13. (a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$  හා  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -1 & 0 \\ 1 & 3a \end{pmatrix}$  යැයි ගනිමු; මෙහි  $a \in \mathbb{R}$  වේ.

$P = AB$  මගින් අර්ථ දැක්වෙන  $P$  න්‍යාසය සොයා,  $a$  හි කිසිදු අගයකට  $P^{-1}$  නොපවතින බව පෙන්වන්න.

$P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  නම්,  $a = 2$  බව පෙන්වන්න.

$a$  සඳහා මෙම අගය සහිත ව,  $Q = P + I$  යැයි ගනිමු; මෙහි  $I$  යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසයයි.

$Q^{-1}$  ලියා දක්වා  $AA^T - \frac{1}{2}R = \left(\frac{1}{5}Q\right)^{-1}$  වන පරිදි  $R$  න්‍යාසය සොයන්න.

(b)  $z = x + iy$  යැයි ගනිමු; මෙහි  $x, y \in \mathbb{R}$  වේ.  $z$  හි, මාපාංකය  $|z|$  හා ප්‍රතිබද්ධය  $\bar{z}$  අර්ථ දක්වන්න.

(i)  $z\bar{z} = |z|^2$ ,

(ii)  $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$  හා  $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$

බව පෙන්වන්න.

$z \neq 1$  හා  $w = \frac{1+z}{1-z}$  යැයි ගනිමු.  $\operatorname{Re} w = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$  හා  $\operatorname{Im} w = \frac{2 \operatorname{Im} z}{|1-z|^2}$  බව පෙන්වන්න.

$z = \cos \alpha + i \sin \alpha$  ( $0 < \alpha < 2\pi$ ) නම්,  $w = i \cot \frac{\alpha}{2}$  බව කව දුරටත් පෙන්වන්න.

(c) ආගන්ථි සටහනක,  $A$  හා  $B$  ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින්  $-3i$  හා  $4$  සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි.  $C$  හා  $D$  ලක්ෂ්‍ය පළමුවන වෘත්ත පාදකයේ පිහිටන්නේ  $ABCD$  රෝම්බසයක් හා  $\widehat{BAD} = \theta$  වන පරිදි ය; මෙහි  $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{7}{25}\right)$  වේ.  $C$  හා  $D$  ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

14. (a)  $x \neq -1, \frac{1}{3}$  සඳහා  $f(x) = \frac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}$  යැයි ගනිමු.

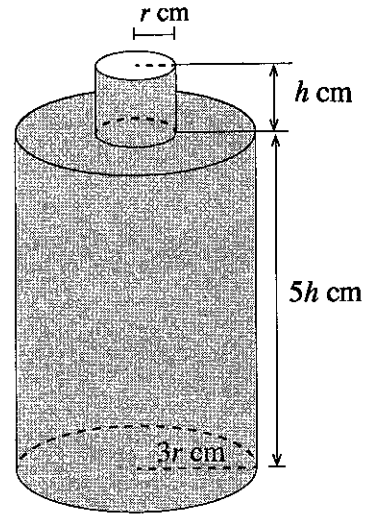
$x \neq -1, \frac{1}{3}$  සඳහා  $f(x)$  හි ව්‍යුත්පන්නය,  $f'(x)$  යන්න  $f'(x) = \frac{-32x(3x-5)}{(x+1)^3(3x-1)^2}$  මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශෝත්ම බහු හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින්  $y = f(x)$  හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්,  $k(x+1)^2(3x-1) = 16(x-1)$  සමීකරණයට හරියටම එක් මූලයක් පවතින පරිදි  $k \in \mathbb{R}$  හි අගයන් සොයන්න.



(b) අරය  $3r$  cm හා උස  $5h$  cm වන සංවෘත කුහර සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක උඩින් මුහුණතින් අරය  $r$  cm වන කැටියක් ඉවත් කර, අරය  $r$  cm හා උස  $h$  cm වන විවෘත කුහර සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සවිකර  $391\pi$  cm<sup>3</sup> ක පරිමාවක් සහිත බෝතලයක් සාදා ගත යුතුව ඇත. බෝතලයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය  $S$  cm<sup>2</sup> යන්න  $S = \pi r (32h + 17r)$  බව දී ඇත.  $S$  අවම වන පරිදි  $r$  හි අගය සොයන්න.



15. (a) (i)  $x^2, x^1$  හා  $x^0$  හි සංගුණක සැසඳීමෙන්,

සියලු  $x \in \mathbb{R}$  සඳහා  $Ax^2(x-1) + Bx(x-1) + C(x-1) - Ax^3 = 1$  වන පරිදි  $A, B$  හා  $C$  නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒ නගිත්,  $\frac{1}{x^3(x-1)}$  යන්න හින්න භාග වලින් ලියා දක්වා  $\int \frac{1}{x^3(x-1)} dx$  සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්,  $\int x^2 \cos 2x dx$  සොයන්න.

(b)  $\theta = \tan^{-1}(\cos x)$  ආදේශය භාවිතයෙන්,  $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx = 2 \ln(1 + \sqrt{2})$  බව පෙන්වන්න.

$a$  නියතයක් වන  $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$  සූත්‍රය භාවිතයෙන්,  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx$  සොයන්න.

16.  $A \equiv (-2, -3)$  හා  $B \equiv (4, 5)$  යැයි ගනිමු.  $AB$  රේඛාව සමග  $l_1$  හා  $l_2$  රේඛා එක එකක් සාදන සුළු කෝණය  $\frac{\pi}{4}$  වන පරිදි  $A$  ලක්ෂ්‍යය හරහා යන  $l_1$  හා  $l_2$  රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න.

$P$  හා  $Q$  ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින්  $l_1$  හා  $l_2$  මත ගෙන ඇත්තේ  $APBQ$  සමචතුරස්‍රයක් වන පරිදි ය.

$PQ$  හි සමීකරණය සොයා,  $P$  හා  $Q$  හි බණ්ඩාංක සොයන්න.

තව ද  $A, P, B$  හා  $Q$  ලක්ෂ්‍ය හරහා යන  $S$  වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

$\lambda > 1$  යැයි ගනිමු.  $R \equiv (4\lambda, 5\lambda)$  ලක්ෂ්‍යය,  $S$  වෘත්තයට පිටතින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

$R$  ලක්ෂ්‍යයේ සිට  $S$  වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය සොයන්න.

$\lambda (> 1)$  විචලනය වන විට, මෙම ස්පර්ශ ජ්‍යායන් අවල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන බව පෙන්වන්න.

17. (a)  $0 \leq \theta \leq \pi$  සඳහා  $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$  විසඳන්න.

$\cos \theta$  ඇසුරෙන්  $\cos 2\theta$  හා  $\cos 3\theta$  ලියා දක්වා,  $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$  බව පෙන්වන්න; මෙහි  $t = \cos \theta$  වේ.

ඒ නමින්,  $4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0$  සමීකරණයෙහි මූල තුන ලියා දක්වා  $4t^2 - 2t - 1 = 0$  සමීකරණයෙහි

මූල  $\cos \frac{\pi}{5}$  හා  $\cos \frac{3\pi}{5}$  බව පෙන්වන්න.

$\cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$  බව අපෝහනය කරන්න.

(b)  $ABC$  ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද  $D$  යනු  $BD : DC = m : n$  වන පරිදි  $BC$  මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු; මෙහි  $m, n > 0$  වේ.  $\hat{BAD} = \alpha$  හා  $\hat{DAC} = \beta$  බව දී ඇත.  $BAD$  හා  $DAC$  ත්‍රිකෝණ සඳහා සයිනස් නීතිය භාවිතයෙන්,  $\frac{mb}{nc} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$  බව පෙන්වන්න; මෙහි  $b = AC$  හා  $c = AB$  වේ.

ඒ නමින්,  $\frac{mb - nc}{mb + nc} = \tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cot\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$  බව පෙන්වන්න.

(c)  $2 \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$  බව පෙන්වන්න.



ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව  
 இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம்  
 Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka  
 இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரīட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரīட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரīட்சைத் திணைக்களம்  
 Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka

**අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2018 අගෝස්තු**  
**கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2018 ஆகஸ்ட்**  
**General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2018**

<b>සංයුක්ත ගණිතය II</b>	<b>II</b>	<b>10</b>	<b>S</b>	<b>II</b>	<b>2018.08.08 / 0830 - 1140</b>
<b>இணைந்த கணிதம் II</b>	<b>II</b>				
<b>Combined Mathematics II</b>	<b>II</b>				

<b>පැය තුනයි</b> மூன்று மணித்தியாலம் <b>Three hours</b>	<b>අමතර කියවීමේ කාලය</b> - මිනිත්තු 10 යි <b>மேலதிக வாசிப்பு நேரம்</b> - 10 நிமிடங்கள் <b>Additional Reading Time</b> - 10 minutes
---	--

අමතර කියවීමේ කාලය ප්‍රශ්න පත්‍රය කියවා ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීමටත් පිළිතුරු ලිවීමේදී ප්‍රමුඛත්වය දෙන ප්‍රශ්න සංවිධානය කර ගැනීමටත් යොදාගන්න.

විභාග අංකය

**උපදෙස්:**

- \* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;  
**A කොටස** (ප්‍රශ්න 1 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
- \* **A කොටස:**  
 සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
- \* **B කොටස:**  
 ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- \* නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය, **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- \* ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.
- \* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **g** මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.

**පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.**

(10) සංයුක්ත ගණිතය II		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
<b>A</b>	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
<b>B</b>	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
	ප්‍රතිශතය	

<b>I පත්‍රය</b>	
<b>II පත්‍රය</b>	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

**අවසාන ලකුණු**

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

**සංකේත අංක**

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ:	1
	2
අධීක්ෂණය කළේ:	

A කොටස

1. සුමට තිරස් මේසයක් මත එකම සරල රේඛාවක් දිගේ එකිනෙක දෙසට එකම  $u$  වේගයෙන් චලනය වෙමින් තිබෙන, ස්කන්ධ පිළිවෙලින්  $2m$  හා  $m$  වූ  $A$  හා  $B$  අංශු දෙකක් සරල ලෙස ගැටේ. ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු  $A$  අංශුව නිශ්චලතාවට පැමිණෙයි. ප්‍රත්‍යාගතී සංගුණකය  $\frac{1}{2}$  බව ද ගැටුම නිසා  $B$  මත යෙදෙන ආවේගයෙහි විශාලත්වය  $2mu$  බව ද පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



2. තිරස් බිම් මත වූ ලක්ෂ්‍යයක සිට තිරසර  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) කෝණයකින්  $u = \sqrt{2gR}$  ආරම්භක වේගයෙන් අංශුවක් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ; මෙහි  $R$  යනු, බිම් මත ප්‍රක්ෂිප්තයේ තිරස් පරාසය වේ. තිරිය හැකි ආරම්භක ප්‍රක්ෂේපණ දිශා දෙක අතර කෝණය  $\frac{\pi}{3}$  බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

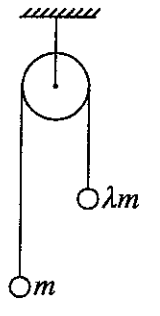
.....

.....

.....

.....

3. ස්කන්ධය  $m$  වූ  $P$  අංශුවක් හා ස්කන්ධය  $\lambda m$  වූ  $Q$  අංශුවක් අවල, සුමට කප්පියක් උඩින් යන සැහැල්ලු අවිකන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඇඳා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, තන්තුව තදව ඇතිව, පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලබයි.  $P$  අංශුව  $\frac{g}{2}$  ත්වරණයකින් පහළට චලනය වේ.  $\lambda = \frac{1}{3}$  බව පෙන්වන්න.



$P$  අංශුව තිරස් අච්ඡානස්ථ ගෙබිමක  $v$  වේගයෙන් ගැටෙයි නම් හා  $Q$  අංශුව කිසිවිටෙකත් කප්පිය කරා ළඟා නොවේ නම්,  $P$  අංශුව බිම ගැටුණු මොහොතේ සිට  $Q$  අංශුව උපරිම උසට ළඟා වීමට ගන්නා කාලය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. ස්කන්ධය  $1200 \text{ kg}$  වූ කාරයක් එන්ජිම ක්‍රියා විරහිත කර තිරසර  $\alpha$  කෝණයක් ආනත වූ සෘජු පාරක් දිගේ පහළට යම් නියත වේගයකින් චලනය වේ; මෙහි  $\sin \alpha = \frac{1}{30}$  වේ. ගුරුත්වජ ත්වරණය  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$  ලෙස ගනිමින් කාරයේ චලිතයට ප්‍රතිරෝධය නිව්ටන වලින් සොයන්න.

කාරය, එම ප්‍රතිරෝධයටම යටත්ව  $\frac{1}{6} \text{ ms}^{-2}$  ත්වරණයක් සහිත ව එම පාරම දිගේ ඉහළට ගමන් කරන විට, එහි වේගය  $15 \text{ ms}^{-1}$  වන මොහොතේ දී එන්ජිමේ ජවය කිලෝවොට් වලින් සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

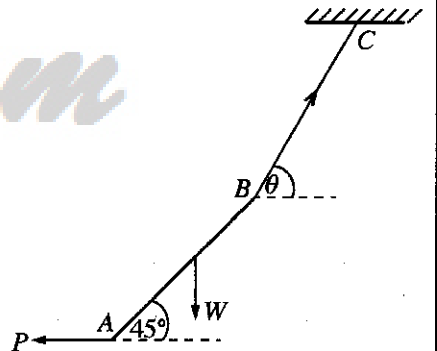
.....

.....

40231

5. සුපුරුදු අංකනයෙන්,  $3i$  හා  $2i+3j$  යනු  $O$  අවල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් පිළිවෙළින්  $A$  හා  $B$  ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික යැයි ගනිමු.  $C$  යනු  $\hat{O}CA = \frac{\pi}{2}$  වන පරිදි  $OB$  සරල රේඛාව මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු.  $\vec{OC}$  දෛශිකය  $i$  හා  $j$  ඇසුරෙන් සොයන්න.

6. දිග  $2a$  හා බර  $W$  වූ  $AB$  ඒකාකාර දණ්ඩක්,  $BC$  සැහැල්ලු අවිභ්‍යාස තන්තුවක් මගින් හා  $A$  කෙළවරේ දී යොදන ලද  $P$  තිරස් බලයක් මගින් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සමතුලිතතාවේ අල්වා තබා ඇත. දණ්ඩ, තිරස සමග  $45^\circ$  කෝණයක් සාදන බව දී ඇත්නම්,  $BC$  තන්තුව තිරස සමග සාදන  $\theta$  කෝණය  $\tan \theta = 2$  මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.
- මෙම පිහිටීමේ දී තන්තුවේ ආතතිය  $W$  ඇසුරෙන් සොයන්න.



7.  $A$  හා  $B$  යනු  $S$  නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්,  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(B) = \frac{1}{4}$  හා  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$  වේ.  $P(A|B')$ ,  $P(A' \cap B')$  හා  $P(B'|A')$  සොයන්න; මෙහි  $A'$  හා  $B'$  මගින් පිළිවෙළින්  $A$  හා  $B$  සිද්ධිවල අනුසුරක සිද්ධි දැක්වේ.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. පාටින් හැර අන් සෑම අසුරකින්ම සමාන වූ රතු බෝල 4 ක් හා කළු බෝල 3 ක් මල්ලක අඩංගු වේ. වරකට එක බැගින් ප්‍රතිස්ථාපනයෙන් තොරව, බෝල හතරක් සසම්භාවී ලෙස මල්ලෙන් ඉවතට ගනු ලැබේ.

- (i) ඉවතට ගනු ලබන බෝල එකම පාටින් යුක්ත වීමේ,
- (ii) ඕනෑම අනුයාත ඉවතට ගැනීම් දෙකක දී ඉවතට ගනු ලබන බෝල වෙනස් පාටින් යුක්ත වීමේ,

සම්භාවිතාව සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

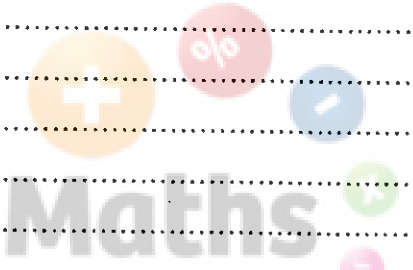
.....

.....

.....

9. එක එකක් 8 ට අඩු ධන නිඛිල පහකට එක මාතයක් පමණක් ඇත. ඒවායේ මධ්‍යන්‍යය, මාතය හා මධ්‍යස්ථය 6:10:5 අනුපාතවලට පිහිටයි. මෙම නිඛිල පහ සොයන්න.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



10. එක්තරා නගරයක උෂ්ණත්වය දින 20ක් සඳහා දිනපතා වාර්තාගත කරන ලදී. මෙම දත්ත කුලකය සඳහා මධ්‍යන්‍යය  $\mu$  හා සම්මත අපගමනය  $\sigma$  පිළිවෙලින්  $28^\circ\text{C}$  හා  $4^\circ\text{C}$  ලෙස ගණනය කර තිබුණි. කෙසේ නමුත් ඉහත උෂ්ණත්වවලින් දෙකක්  $35^\circ\text{C}$  හා  $21^\circ\text{C}$  ලෙස වැරදියට ඇතුළත් කර ඇති බව සොයා ගැනීමෙන් පසුව ඒවා  $25^\circ\text{C}$  හා  $31^\circ\text{C}$  ලෙස නිවැරදි කරන ලදී.  $\mu$  හා  $\sigma$  හි නිවැරදි අගයන් සොයන්න.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව  
 இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம்  
 Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka  
 ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව  
 இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம்

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2018 අගෝස්තු  
 கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2018 ஆகஸ்ட்  
 General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2018

සංයුක්ත ගණිතය II  
 இணைந்த கணிதம் II  
 Combined Mathematics II

10 S II

B කොටස

\* ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

(මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි  $g$  මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.)

11. (a) මීටර  $4d$  ගැඹුරු පතලක චලනය වන සෝපානයක්  $t = 0$  කාලයේ දී  $A$  ලක්ෂ්‍යයකින් නිශ්චලතාවේ සිට සිරස් ව පහළට චලනය වීමට පටන් ගනී. එය, පළමුව  $\frac{g}{2} \text{ m s}^{-2}$  නියත ත්වරණයෙන් මීටර  $d$  දුරක් චලනය වී ඊළඟට එම චලිතය අවසානයේ ලබාගත් ප්‍රවේගයෙන් තව මීටර  $d$  දුරක් චලනය වේ. සෝපානය ඉන්පසු  $A$  සිට මීටර  $4d$  දුරක් පහළින් පිහිටි  $B$  ලක්ෂ්‍යයේ දී නිශ්චලතාවට පැමිණෙන පරිදි නියත මන්දනයකින් ඉතිරි දුර  $d$  චලනය වේ.

සෝපානයෙහි චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.  
 එ හෙයින්,  $A$  සිට  $B$  දක්වා පහළට චලිතය සඳහා සෝපානය ගනු ලබන මුළු කාලය සොයන්න.

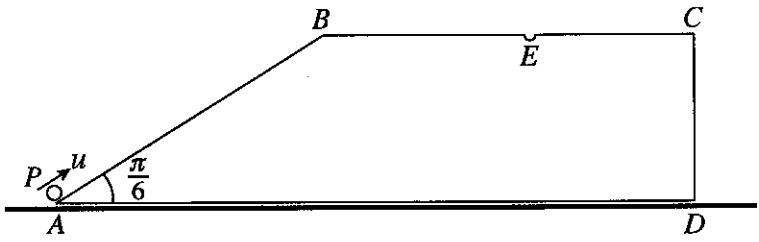
(b) පොළොවට සාපේක්ෂව  $u \text{ km h}^{-1}$  ඒකාකාර වේගයකින් උතුරු දිශාවට නැවක් යාත්‍රා කරයි. එක්තරා මොහොතක දී නැවේ සිට, දකුණෙන් නැගෙනහිරට  $\beta$  කෝණයකින්, නැවේ පෙනෙහි සිට  $p \text{ km}$  දුරකින්  $B_1$  බෝට්ටුවක් නිරීක්ෂණය කරනු ලැබේ. මෙම මොහොතේ දී ම,  $B_2$  බෝට්ටුවක් නැවේ සිට බටහිරින්  $q \text{ km}$  දුරකින් නිරීක්ෂණය කරනු ලැබේ. බෝට්ටු දෙකම පොළොවට සාපේක්ෂව  $v (> u) \text{ km h}^{-1}$  ඒකාකාර වේගයෙන් සරල රේඛීය පෙත්වල, නැව අල්ලා ගැනීමේ අපේක්ෂාවෙන් යාත්‍රා කරයි. පොළොවට සාපේක්ෂව බෝට්ටුවල පෙත් නිර්ණය කිරීම සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණවල දළ සටහන් එකම රූපයක අඳින්න.

පොළොවට සාපේක්ෂව  $B_1$  බෝට්ටුවේ පෙන උතුරෙන් බටහිරට  $\beta - \sin^{-1}\left(\frac{u \sin \beta}{v}\right)$  කෝණයක් සාදන බව පෙන්වා, පොළොවට සාපේක්ෂව  $B_2$  බෝට්ටුවේ පෙන සොයන්න.

$\beta = \frac{\pi}{3}$  හා  $v = \sqrt{3}u$  යැයි ගනිමු.  $3q^2 > 8p^2$  නම්,  $B_1$  බෝට්ටුව  $B_2$  බෝට්ටුවට පෙර නැව අල්ලා ගන්නා බව පෙන්වන්න.

12. (a)  $AB = a$  හා  $\hat{BAD} = \frac{\pi}{6}$  වන පරිදි වූ රූපයේ දැක්වෙන  $ABCD$  ක්‍රමීයම, ස්කන්ධය  $2m$  වූ සුමට ඒකාකාර කුට්ටියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය තුළින් වූ සිරස් හරස්කඩකි.  $AD$  හා  $BC$  රේඛා සමාන්තර වන අතර  $AB$  රේඛාව එය අඩංගු මුහුණතෙහි උපරිම බෑවුම් රේඛාවකි.  $AD$  අයත් මුහුණත සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත ඇතිව කුට්ටිය තබනු ලබයි. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි ස්කන්ධය  $m$  වූ  $P$  අංශුවක්  $A$  ලක්ෂ්‍යයෙහි තබා, එයට  $\vec{AB}$  දිගේ  $u$  ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබයි; මෙහි  $u^2 = \frac{7ga}{3}$  වේ. කුට්ටියට සාපේක්ෂව  $P$  හි මන්දනය  $\frac{2g}{3}$  බව පෙන්වා,  $P$  අංශුව  $B$  කරා ළඟා වන විට, කුට්ටියට සාපේක්ෂව  $P$  අංශුවෙහි ප්‍රවේගය සොයන්න.

තව ද  $BE = \frac{\sqrt{3}a}{2}$  වන පරිදි කුට්ටියෙහි උඩත් මුහුණතෙහි  $BC$  මත වූ  $E$  ලක්ෂ්‍යයේ කුඩා සිදුරක් ඇත. කුට්ටියට සාපේක්ෂව චලිතය සැලකීමෙන්,  $P$  අංශුව  $E$  හි ඇති සිදුරට වැටෙන බව පෙන්වන්න.

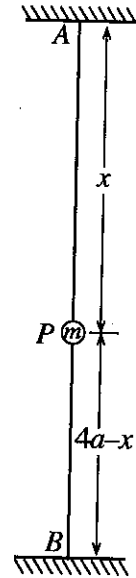


(b) දිග  $a$  වූ සැහැල්ලු අවිතනය තන්තුවක එක් කෙළවරක්  $O$  අවල ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය  $m$  වූ  $P$  අංශුවකට ද ඇඳා ඇත. අංශුව  $O$  ට සිරස් ව පහළින් නිශ්චලව එල්ලී තිබෙන අතර එයට විශාලත්වය  $u = \sqrt{kag}$  වූ තිරස් ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ; මෙහි  $2 < k < 5$  වේ. තන්තුව  $\theta$  කෝණයකින් හැරී තවමත් නොබුරුල්ව තිබෙන විට අංශුවේ  $v$  වේගය  $v^2 = (k - 2)ag + 2ag \cos \theta$  මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

මෙම පිහිටීමේ දී තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

$\theta = \alpha$  වන විට තන්තුව බුරුල් වන බව අපෝහනය කරන්න; මෙහි  $\cos \alpha = \frac{2-k}{3}$  වේ.

13. ස්කන්ධය  $m$  වූ  $P$  අංශුවක් එක එකක ස්වාභාවික දිග  $a$  හා මාපාංකය  $mg$  වූ සමාන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තු දෙකක කෙළවර දෙකකට ඇඳා ඇත. එක තන්තුවක නිදහස් කෙළවර  $A$  අවල ලක්ෂ්‍යයකට හා අනික් තන්තුවේ නිදහස් කෙළවර  $A$  ට සිරස් ව පහළින්  $4a$  දුරකින් පිහිටි  $B$  අවල ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳා ඇත. (රූපය බලන්න.) තන්තු දෙකම නොබුරුල්ව,  $A$  ට  $\frac{5a}{2}$  දුරක් පහළින් අංශුව සමතුලිතව තිබෙන බව පෙන්වන්න.



$P$  අංශුව ඇත්,  $AB$  හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයට ඔසවා එම පිහිටීමේ දී නිසලතාවේ සිට සිරුවෙන් මුදාහරිනු ලැබේ. තන්තු දෙකම නොබුරුල් හා  $AP$  තන්තුවේ දිග  $x$  වන විට,  $\ddot{x} + \frac{2g}{a}(x - \frac{5a}{2}) = 0$  බව පෙන්වන්න.

මෙම සමීකරණය  $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$  ආකාරයෙන් නැවත ලියන්න; මෙහි  $X = x - \frac{5a}{2}$  හා  $\omega^2 = \frac{2g}{a}$  වේ.

$\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$  සූත්‍රය භාවිතයෙන් මෙම චලිතයේ විස්තාරය  $c$  සොයන්න.

$P$  අංශුව එහි පහත් ම පිහිටීමට ළඟා වන මොහොතේ දී  $PB$  තන්තුව කපනු ලැබේ. නව චලිතයේ දී  $x = a$  වන විට අංශුව එහි උච්චතම පිහිටීමට ළඟා වන බව පෙන්වන්න.

$P$  අංශුව  $x = 2a$  හි වූ එහි ආරම්භක පිහිටීමේ සිට පහළට  $a$  දුරක් ද ඊළඟට ඉහළට  $\frac{a}{2}$  දුරක් ද චලනය වීමට ගනු ලබන මුළු කාලය  $\frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{a}{2g}} (3 + \sqrt{2})$  බව තව දුරටත් පෙන්වන්න.

14. (a)  $OAB$  ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද  $D$  යනු  $AB$  හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යැයි ද  $E$  යනු  $OD$  හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු.  $F$  ලක්ෂ්‍යය  $OA$  මත පිහිටා ඇත්තේ  $OF : FA = 1 : 2$  වන පරිදි ය.  $O$  අනුබද්ධයෙන්  $A$  හා  $B$  හි පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින්  $\mathbf{a}$  හා  $\mathbf{b}$  වේ.  $\overrightarrow{BE}$  හා  $\overrightarrow{BF}$  දෛශික  $\mathbf{a}$  හා  $\mathbf{b}$  ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

$B, E$  හා  $F$  එකරේඛීය බව අපෝහනය කර,  $BE : EF$  අනුපාතය සොයන්න.

$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DF}$  අදිශ ගුණිතය  $|\mathbf{a}|$  හා  $|\mathbf{b}|$  ඇසුරෙන් සොයා,  $|\mathbf{a}| = 3|\mathbf{b}|$  නම්,  $\overrightarrow{BF}$  යන්න  $\overrightarrow{DF}$  ට ලම්බ වන බව පෙන්වන්න.

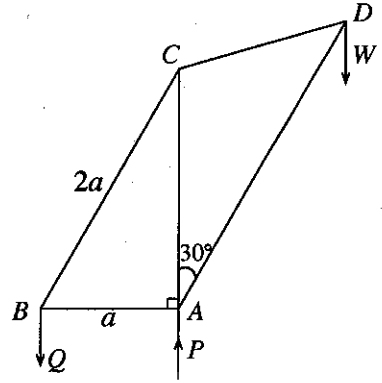
(b)  $Oxy$ -තලයේ වූ බල පද්ධතියක් පිළිවෙළින්  $(-a, 2a), (0, a)$  හා  $(-a, 0)$  ලක්ෂ්‍යවල දී ක්‍රියාකරන  $3P\mathbf{i} + 2P\mathbf{j}$ ,  $2P\mathbf{i} - P\mathbf{j}$  හා  $-P\mathbf{i} + 2P\mathbf{j}$  යන බල තුනෙන් සමන්විත වේ; මෙහි  $P$  හා  $a$  යනු පිළිවෙළින් නිඛිත හා මීටරවලින් මනින ලද ධන රාශි වේ.  $O$  මූලය වටා, පද්ධතියේ දක්ෂිණාවර්ත ඝූර්ණය,  $12Pa \text{ Nm}$  බව පෙන්වන්න.

තව ද පද්ධතිය, විශාලත්වය  $5PN$  වූ තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වා, එහි දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

ඇත්, අතිරේක බලයක් පද්ධතියට ඇතුළත් කරනු ලබන්නේ නව පද්ධතිය දක්ෂිණාවර්ත ඝූර්ණය  $24Pa \text{ Nm}$  වූ යුග්මයකට තුල්‍ය වන පරිදි ය. අතිරේක බලයෙහි විශාලත්වය, දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

15.(a) බර  $W$  හා දිග  $2a$  වූ ඒකාකාර  $AB$  දණ්ඩක  $A$  කෙළවර රළු තිරස් බිමක් මත හා  $B$  කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව තබා ඇත. දණ්ඩ බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක පිහිටන අතර, එය තිරස සමග  $\theta$  කෝණයක් සාදයි; මෙහි  $\tan \theta = \frac{3}{4}$  වේ.  $AC = x$  ලෙස දණ්ඩ මත වූ  $C$  ලක්ෂ්‍යයට බර  $W$  වූ අංශුවක් සවි කර ඇත. අංශුව සහිත දණ්ඩ සමතුලිතතාවයේ ඇත. දණ්ඩ හා බිම අතර සර්ෂණ සංගුණකය  $\frac{5}{6}$  වේ.  $x \leq \frac{3a}{2}$  බව පෙන්වන්න.

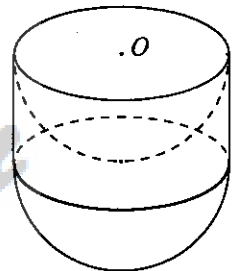
(b) යාබද රූපයෙහි පෙන්වා ඇති රාමු සැකිල්ල,  $AB, BC, AC, CD$  හා  $AD$  සැහැල්ලු දඬු පහක් ඒවායේ කෙළවරවලින් නිදහසේ සන්ධි කර සාදා ඇත.  $AB = a, BC = 2a, AC = CD$  හා  $\hat{CAD} = 30^\circ$  බව දී ඇත. බර  $W$  වූ භාරයක්  $D$  හි එල්ලෙන අතර පිළිවෙලින්  $A$  හා  $B$  හි දී රූපයේ දක්වා ඇති දිශාවලට ක්‍රියාකරන  $P$  හා  $Q$  සිරස් බලවල ආධාරයෙන්  $AB$  තිරස් ව හා  $AC$  සිරස් ව රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතව තිබේ.  $Q$  හි අගය  $W$  ඇසුරෙන් සොයන්න.



බෝ අංකනය භාවිතයෙන් ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ, ඒ නගින්න, දඬු පහේ ප්‍රත්‍යාබල සොයා, මෙම ප්‍රත්‍යාබල ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරන්න.

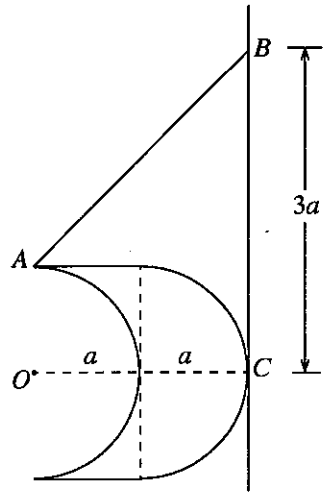
16. අරය  $a$  වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට  $\frac{3}{8}a$  දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

අරය  $a$ , උස  $a$  හා ඝනත්වය  $\rho$  වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයකින් අරය  $a$  වූ අර්ධ ගෝලාකාර කොටසක් කපා ඉවත් කරනු ලැබේ. දැන්, යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සිලින්ඩරයේ ඉතිරි කොටසෙහි වෘත්තාකාර මුහුණතට අරය  $a$  හා ඝනත්වය  $\lambda\rho$  වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක වෘත්තාකාර මුහුණත සවි කරනු ලබන්නේ, ඒවායේ සමමිතික අක්ෂ දෙක සම්පාත වන පරිදි ය. මෙලෙස සාදාගනු ලබන  $S$  වස්තුවෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, එහි සමමිතික අක්ෂය මත, ගැටියේ  $O$  කේන්ද්‍රයේ සිට  $\frac{(11\lambda + 3)a}{4(2\lambda + 1)}$  දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



$\lambda = 2$  යැයි ද  $A$  යනු  $S$  වස්තුවෙහි වෘත්තාකාර ගැටිය මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු.

මෙම  $S$  වස්තුව රළු සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව සමතුලිතව තබා ඇත්තේ,  $A$  ලක්ෂ්‍යයට හා සිරස් බිත්තිය මත වූ  $B$  අවල ලක්ෂ්‍යයකට ඇදා ඇති සැහැල්ලු අවිනන්‍ය තන්තුවක ආධාරයෙනි. මෙම සමතුලිත පිහිටීමේ දී  $S$  හි සමමිතික අක්ෂය බිත්තියට ලම්බව පිහිටන අතර  $S$  හි අර්ධ ගෝලාකාර පෘෂ්ඨය  $B$  ලක්ෂ්‍යයට  $3a$  දුරක් සිරස් ව පහළින් වූ  $C$  ලක්ෂ්‍යයේ දී බිත්තිය ස්පර්ශ කරයි. (යාබද රූපය බලන්න.)  $O, A, B$  හා  $C$  ලක්ෂ්‍ය බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක පිහිටයි.



$\mu$  යනු බිත්තිය හා  $S$  හි අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨය අතර සර්ෂණ සංගුණකය නම්,  $\mu \geq 3$  බව පෙන්වන්න.

17.(a) ආයතනයක එක්තරා රැකියාවකට අයදුම් කරන සියලු ම අයදුම්කරුවන් අභියෝග්‍යතා පරීක්ෂණයකට පෙනීසිටීම අවශ්‍ය වේ. මෙම අභියෝග්‍යතා පරීක්ෂණයෙන් A ශ්‍රේණියක් ලබන අය රැකියාව සඳහා තෝරාගනු ලබන අතර, ඉතිරි අයදුම්කරුවන් සම්මුඛ පරීක්ෂණයකට මුහුණ දිය යුතු ය. අයදුම්කරුවන්ගෙන් 60% ක් A ශ්‍රේණි ලබන බව ද ඒ අයගෙන් 40% ක් ගැහැනු අය බව ද සමීක්ෂණයක දී සොයා ගෙන ඇත. සම්මුඛ පරීක්ෂණයට මුහුණ දෙන අයදුම්කරුවන්ගෙන් 10% ක් පමණක් තෝරාගනු ලබන අතර එයින් 70% ක් ගැහැනු අය වෙති.

(i) මෙම රැකියාව සඳහා පිරිමි අයකු තෝරාගනු ලැබීමේ,

(ii) රැකියාවට තෝරාගනු ලැබූ පිරිමි අයකු අභියෝග්‍යතා පරීක්ෂණයට A ශ්‍රේණියක් ලබා තිබීමේ, සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b) එක්තරා රෝහලක රෝගීන් 100 දෙනකුගේ ප්‍රතිකාර ලබා ගැනීමට පෙර රැඳී සිටි කාල (මිනිත්තුවලින්) එක් රැස් කරනු ලැබේ. එම එක් එක් කාලයෙන් මිනිත්තු 20ක් අඩු කිරීමෙන් ලැබෙන අන්තර එක එකක් 10ත් බෙදීමෙන් ලැබෙන අගයන්ගේ ව්‍යාප්තිය පහත වගුවෙන් දෙයි.

අගයන්ගේ පරාසය	රෝගීන් ගණන
-2 — 0	30
0 — 2	40
2 — 4	15
4 — 6	10
6 — 8	5

මෙම වගුවෙහි දී ඇති ව්‍යාප්තියෙහි මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය නිමානය කරන්න.

ඒ නමින්, රෝගීන් 100 දෙනා රැඳී සිටි කාලවල මධ්‍යන්‍යය  $\mu$  සහ සම්මත අපගමනය  $\sigma$  නිමානය කරන්න.

තව ද  $\kappa = \frac{\mu - M}{\sigma}$  මගින් අර්ථ දක්වනු ලබන කුටිකතා සංගුණකය  $\kappa$  නිමානය කරන්න; මෙහි  $M$  යනු රෝගීන් 100 දෙනා රැඳී සිටි කාලවල මාතය වේ.

\*\*\*

01. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු  $n \in \mathbb{Z}^+$  සඳහා  $\sum_{r=1}^n r^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$  බව සාධනය කරන්න.

$n=1$  විට, ව: පැ:  $= 1^3 = 1$  හා ද: පැ:  $= \frac{1}{4} \cdot 1^2 (1+1)^2 = 1$  (05)

$\therefore n=1$  විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

ඕනෑම  $p \in \mathbb{Z}^+$  ගෙන  $n=p$  විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි සිතමු.

එනම්,  $\sum_{r=1}^p r^3 = \frac{1}{4} p^2 (p+1)^2$  (05)

දැන්  $\sum_{r=1}^{p+1} r^3 = \sum_{r=1}^p r^3 + (p+1)^3$  (05)  
 $= \frac{1}{4} p^2 (p+1)^2 + (p+1)^3$   
 $= (p+1)^2 \frac{[p^2 + 4p + 4]}{4}$   
 $= \frac{1}{4} (p+1)^2 (p+1+1)^2$  (05)

එනමින්  $n=p$  සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ නම්,  $n=p+1$  සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. අපි දැනටමත්  $n=1$  සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව පෙන්වා ඇත. එනමින් ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සියලු  $n \in \mathbb{Z}^+$  සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (05)

25

02. එකම රූප සටහනක  $y=3-|x|$  හා  $y=|x-1|$  හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න. එනමින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ  $|x|+|x-1| \leq 3$  අසමානතාව සපුරාලන  $x$  හි සියලු ම තාත්වික අගයන් සොයන්න.

පේදන ලක්ෂ්‍යවලදී  $-x+1=3+x$  හෝ  $x-1=3-x$

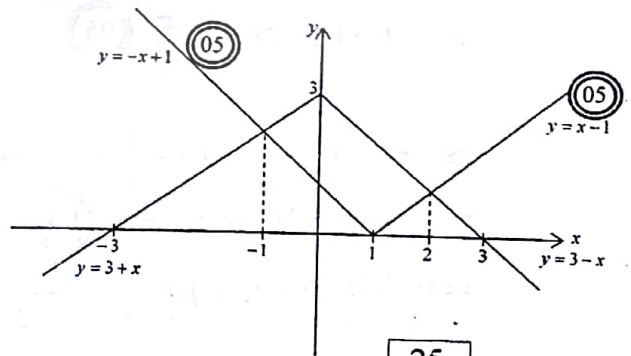
එනම්  $x-1$  හෝ  $x=2$  (05)

තව ද  $|x|+|x-1| \leq 3$  (05)

$\Leftrightarrow |x-1| \leq 3-|x|$

එනමින්, ප්‍රස්තාරයෙන්, (05)

විසඳුම්  $-1 \leq x \leq 2$  තෘප්ත කරන  $x$  අගයන් වේ.



25

වෙනත් ක්‍රමයක්

$|x|+|x-1| \leq 3$

(i) අවස්ථාව  $x \leq 0$ :  $|x|+|x-1| \leq 3 \Leftrightarrow -x-(x-1) \leq 3$  (05)

$\Leftrightarrow -2x+1 \leq 3$

$\Leftrightarrow x \geq -1$

මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම්  $-1 \leq x \leq 0$  තෘප්ත කරන  $x$  අගයන් වේ.

(ii) අවස්ථාව  $0 < x \leq 1$

$$|x| + |x-1| \leq 3$$

$$\Leftrightarrow x - (x-1) \leq 3$$

$$\Leftrightarrow x - (x-1) \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 3$$

මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම්  $0 < x \leq 1$  වේ. (05)

(iii) අවස්ථාව  $1 < x$

$$|x| + |x-1| \leq 3$$

$$\Leftrightarrow x + x - 1 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq 4$$

$$\Leftrightarrow x \leq 2$$

$\therefore$  මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම්  $1 < x \leq 2$  වේ.

එනමින් විසඳුම්  $-1 \leq x \leq 2$  තෘප්ත කරන  $x$  අගයන් වේ.

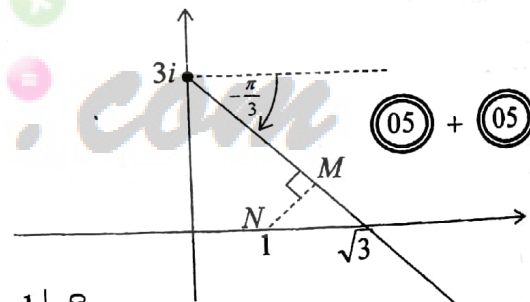
03. ආගන්ති සටහනක  $\text{Arg}(z-3i) = -\frac{\pi}{3}$  සපුරාලන  $z$  සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පරාසයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

එනමින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ  $\text{Arg}(\bar{z}+3i) = \frac{\pi}{3}$  වන පරිදි  $|z-1|$  හි අවම අගය සොයන්න.

$$\text{Arg}(\bar{z}+3i) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \text{Arg}(\bar{z}+3i) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \text{Arg}(z-3i) = -\frac{\pi}{3} \quad (05)$$



එනමින්  $\text{Arg}(\bar{z}+3i) = \frac{\pi}{3}$  වන පරිදි  $|z-1|$  හි

අවම අගය  $NM$  දෙනු ලබයි. (05)

$$\text{මෙහි } NM = (\sqrt{3}-1) \sin \frac{\pi}{3} = \frac{(3-\sqrt{3})}{2} \quad (05)$$

25

04.  $\left(x^2 + \frac{3k}{x}\right)^8$  හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ  $x$  හා  $x^4$  හි සංගුණක සමාන වේ.

$k$  නියතයෙහි අගය සොයන්න.

$$\left(x^2 + \frac{3k}{x}\right)^8 = \sum_{r=0}^8 {}^8C_r (x^2)^r \left(\frac{3k}{x}\right)^{8-r} \quad (05)$$

$$= \sum_{r=0}^8 {}^8C_r (3k)^{8-r} x^{3r-8}$$

$$x^1 : 3r-8=1 \Leftrightarrow r=3 \quad (05)$$

$$x^4 : 3r - 8 = 4 \Leftrightarrow r = 4$$

$$\text{දත්තයෙන් } {}^8C_3 (3k)^5 = {}^8C_4 (3k)^4 \quad (05)$$

$$\frac{8!}{3!5!} (3)^5 k = \frac{8!}{4!4!} 3^4 \quad (05)$$

$$k = \frac{5}{12} \quad (05)$$

25

05.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \frac{\pi^2}{32}$  බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{x^2(x+1)} \quad (05)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{\left(\frac{\pi x}{8}\right)} \right]^2 \cdot \frac{\pi^2}{64} \cdot \frac{1}{x+1} \quad (05)$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2}{64} \cdot \frac{1}{1} \quad (05) \quad (05)$$

$$= \frac{\pi^2}{32} \quad (05)$$

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} \cdot \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1) \left(1 + \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)} \quad (05)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \right]^2 \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{1 + \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \quad (05)$$

$$= 1 \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \quad (05) \quad (05)$$

$$= \frac{\pi^2}{32} \quad (05)$$

25

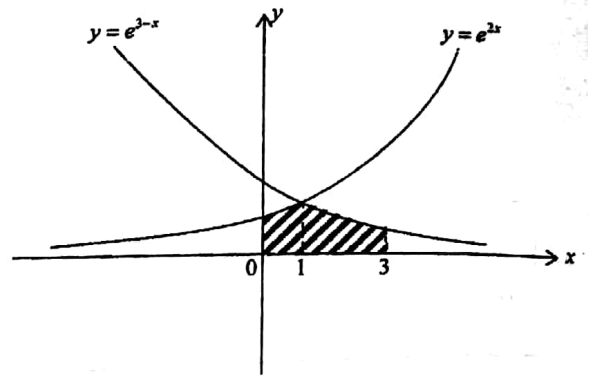
06.  $y = e^{2x}$ ,  $y = e^{3-x}$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$  හා  $y = 0$  වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය, වර්ග ඒකක  $\frac{3}{2}(e^2 - 1)$  බව පෙන්වන්න.

$$\int_0^1 e^{2x} dx + \int_1^3 e^{3-x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 + \frac{e^{3-x}}{(-1)} \Big|_1^3$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + (-1) + e^2$$

$$= \frac{3e^2}{2} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{2}(e^2 - 1)$$



25

07.  $\frac{\pi}{2} < t < \pi$  සඳහා  $x = \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)$  හා  $y = \sin t$  පරාමිතික සමීකරණ මගින්

$C$  වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ.  $\frac{dy}{dx} = \cos t \sin t$  බව පෙන්වන්න.

$t = \frac{2\pi}{3}$  ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයෙහි දී  $C$  වක්‍රයට ඇදී ස්පර්ශ රේඛාවෙහි අනුක්‍රමණය  $-\frac{\sqrt{3}}{4}$  බව අපෝහනය කරන්න.

$$x = \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right) \quad y = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tan\frac{t}{2}} \times \sec^2\frac{t}{2} \times \frac{1}{2} \quad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$= \frac{1}{2 \cos\frac{t}{2} \sin\frac{t}{2}} \quad = \frac{1}{\sin t}$$

$$\text{ඇත් } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \cos t \sin t$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

25

08.  $l_1$  යනු  $x + y - 5 = 0$  සරල රේඛාව යැයි ගනිමු.  $P \equiv (3, 4)$  ලක්ෂ්‍යය හරහා යන හා  $l_1$  ට ලම්බ වූ  $l_2$  සරල රේඛාවෙහි සමීකරණය සොයන්න.

$Q$  යනු  $l_1$  හා  $l_2$  හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය යැයි ද  $R$  යනු  $PQ:QR = 1:2$  වන පරිදි  $l_2$  මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු.  $R$  හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



$$l_2 \text{ හි අනුක්‍රමණය} = -\frac{1}{-1} = 1 \quad (05)$$

$$l_2 \text{ සමීකරණය} : y - 4 = 1(x - 3)$$

$$x - y + 1 = 0 \quad (05)$$

$$Q = (2, 3) \quad (05)$$

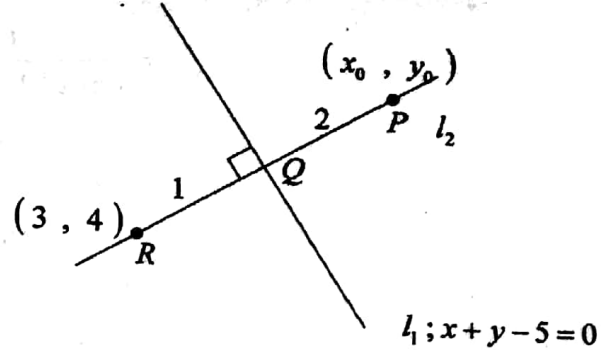
$R = (x_0, y_0)$  යයි ගනිමු.

එවිට

$$2 = \frac{x_0 + 6}{3} \text{ සහ } 3 = \frac{y_0 + 8}{3} \quad (05)$$

$$\therefore x_0 = 0 \text{ සහ } y_0 = 1$$

$$\therefore R = (0, 1) \quad (05)$$



වෙනත් ක්‍රමයක්

$$\frac{QR}{RP} = -\frac{2}{3} \text{ බැවින්} \quad (05)$$

$$R = \left( \frac{-2 \times 3 + 2 \times 3}{3 - 2}, \frac{-2 \times 4 + 3 \times 3}{3 - 2} \right)$$

$$= (0, 1) \quad (05)$$

25

09.  $P = (1, 2)$  හා  $Q = (7, 10)$  යැයි ගනිමු.  $P$  හා  $Q$  ලක්ෂ්‍ය විෂ්කම්භයක අන්ත ලෙස වූ වෘත්තයෙහි සමීකරණය  $S = (x - 1)(x - a) + (y - 2)(y - b) = 0$  වන පරිදි  $a$  හා  $b$  නියතවල අගයන් ලියා දක්වන්න.

$S' = S + \lambda(4x - 3y + 2) = 0$  යැයි ගනිමු; මෙහි  $\lambda \in R$  වේ.  $P$  හා  $Q$  ලක්ෂ්‍ය  $S' = 0$  වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වා, මෙම වෘත්තය  $R = (1, 4)$  ලක්ෂ්‍යය හරහා යන පරිදි  $\lambda$  හි අගය සොයන්න.

$$a = 7 \quad (05)$$

$$b = 10 \quad (05)$$

$P = (1, 2)$  සහ  $Q = (7, 10)$  යන දෙකම  $s = 0$  සහ  $4x - 3y + 2 = 0$  යන දෙකම තෘප්ත කරන බැවින්  $s' = 0$  වේ.  $(05)$

$\therefore P$  සහ  $Q$  ලක්ෂ්‍ය  $s' = 0$  මත පිහිටයි.  $(05)$

$s' = 0$  යන්න  $R = (1, 4)$  හරහා යයි නම්,

$$0 + (4 - 2) \times (4 - 10) + \lambda(4 - 12 + 2) = 0 \text{ වේ.} \quad (05)$$

$$6\lambda = -12$$

$$\lambda = -2 \quad (05)$$

25

10.  $x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$  සඳහා  $\sec^3 x + 2\sec^2 x \tan x + \sec x \tan^2 x = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$  බව පෙන්වන්න; මෙහි  $n \in Z$  වේ.

$$\sec^3 x + 2\sec^2 x \tan x + \sec x \tan^2 x$$

$$= \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \quad (05)$$

$$= \frac{1 + 2 \sin x + \sin^2 x}{\cos^3 x}$$

$$= \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos x (1 - \sin^2 x)} \quad (05)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1+\sin x)^2}{\cos x(1-\sin x)(1+\sin x)} \because n \in \mathbb{Z} \text{ සඳහා } x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(1+\sin x)}{\cos x(1-\sin x)} \\
&= \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1-\sin x)^2} \\
&= \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}
\end{aligned}$$

25

11. (a)  $a, b \in \mathbb{R}$  යැයි ගනිමු.  $3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$  සමීකරණයේ විච්චකය  $a$  හා  $b$  ඇසුරෙන් ලියා දක්වා ඒනයිත් මෙම සමීකරණයේ මූල තාත්වික බව පෙන්වන්න. මෙම මූල  $\alpha$  හා  $\beta$  යැයි ගනිමු.  $a$  හා  $b$  ඇසුරෙන්  $\alpha + \beta$  හා  $\alpha\beta$  ලියා දක්වන්න. දැන්  $\beta = a + 2$  යැයි ගනිමු.  $a^2 - ab + b^2 = 9$  බව පෙන්වා  $|a| \leq \sqrt{12}$  බව අපෝහනය කර  $a$  ඇසුරෙන්  $b$  සොයන්න.

- (b)  $c (\neq 0)$  හා  $d$  තාත්වික සංඛ්‍යා යැයි ද  $f(x) = x^3 + 4x^2 + cx + d$  යැයි ද ගනිමු.  $(x+c)$  මගින්  $f(x)$  බෙදූ විට ශේෂය  $-c^3$  වේ. තව ද  $(x-c)$  යන්න  $f(x)$  හි සාධකයක් වේ.  $c = -2$  හා  $d = -12$  බව පෙන්වන්න.  $c$  හා  $d$  හි මෙම අගයන් සඳහා  $(x^2 - 4)$  මගින්  $f(x)$  බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(a)  $3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$   
විච්චකය  $\Delta = 4(a+b)^2 - 12(ab)$   
 $= 4(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$  (10)  
 $= 4(a^2 - ab + b^2)$   
 $= 4 \left[ \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \right] \geq 0$  for all  $a, b \in \mathbb{R}$  (05)

ඒ නයිත්, මූල තාත්වික වේ. (05)

$$\alpha + \beta = \frac{2}{3}(a+b) \quad \alpha\beta = \frac{ab}{3}$$

$$\begin{aligned}
\beta = \alpha + 2 &\Rightarrow (\beta - \alpha)^2 = 4 \quad (05) \\
&\Rightarrow (\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta = 4 \quad (05) \\
&\Rightarrow \frac{4}{9}(a+b)^2 - \frac{4}{3}ab = 4 \quad (05) \quad (05) \\
&\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 3ab = 9 \\
&\Rightarrow a^2 - ab + b^2 = 9 \quad (05)
\end{aligned}$$

35

$$b^2 - ab + a^2 = 9$$

$$\Rightarrow \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - a^2 + 9$$

$$= -\frac{3a^2}{4} + 9$$

$$= \frac{3}{4}(12 - a^2) \quad (10)$$

$$\Rightarrow 12 - a^2 \geq 0 \quad (05) \Rightarrow |a| \leq \sqrt{12} \quad (05)$$

$$b = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{12 - a^2} \quad (10)$$

(b)  $f(x) = x^3 + 4x^2 + cx + d$

$$f(-c) = -c^3 + 4c^2 - c^2 + d = -c^3 \quad (05)$$

$$\Rightarrow 3c^2 + d = 0 \quad \text{----- (1)} \quad (05)$$

$$f(c) = c^3 + 4c^2 + c^2 + d = 0 \quad (05)$$

$$\Rightarrow c^3 + 5c^2 + d = 0 \quad \text{----- (2)} \quad (05)$$

(2) - (1) මගින්  $c^3 + 2c^2 = 0$  ලැබේ.

$$\Rightarrow c^2(c + 2) = 0 \quad (05)$$

$c \neq 0$  නිසා  $c = -2$  (05)

$$\Rightarrow d = -3c^2 = -12 \quad (05)$$

35

ඇත්  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 12$

$f(x)$  යන්න  $x^2 - 4$  මගින් බෙදූ විට ශේෂය  $\lambda x + \mu$  ආකාරය ගනී.

එනම්  $f(x) = (x^2 - 4)q(x) + \lambda x + \mu \quad (05)$

$$\Rightarrow f(x) = (x - 2)(x + 2)q(x) + \lambda x + \mu$$

$$f(2) = 8 = 2\lambda + \mu \quad \text{හා} \quad (05)$$

$$f(-2) = 0 = -2\lambda + \mu \quad (05)$$

$$\Rightarrow \mu = 4 \quad \text{හා} \quad \lambda = 2 \quad (05)$$

$$\therefore \text{ශේෂය} = 2x + 4 \quad (05)$$

25

12. (a)

එක එකක පිරිමි ලමයින් තිදෙනකු හා ගැහැණු ලමයින් දෙදෙනෙකු සිටින කණ්ඩායම් දෙකක සාමාජිකයන් අතුරෙන්, සාමාජිකයන් හය දෙනෙකුගෙන් යුත් කමිටුවක් තෝරා ගත යුතුව ඇත්තේ කමිටුවේ සිටින ගැහැණු ලමයින් සංඛ්‍යාව වැඩි කරමින් දෙදෙනකු වන පරිදි ය.

(i) කමිටුවට එක් එක් කණ්ඩායමෙන් සාමාජිකයන් ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් තෝරා ගත යුතු නම්,

(ii) කමිටුවට එක් ගැහැණු ලමයකු පමණක් තෝරා ගත යුතු නම්, සෑදිය හැකි එවැනි වෙනත් කමිටු ගණන සොයන්න.

(b)  $r \in \mathbb{Z}^+$  සඳහා  $f(r) = \frac{1}{(r+1)^2}$  සහ  $U_r = \frac{(r+2)}{(r+1)^2(r+3)^2}$  යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$  සඳහා  $f(r) - f(r+2) = 4U_r$  බව පෙන්වන්න.

එනමින්  $n \in \mathbb{Z}^+$  සඳහා  $\sum_{r=1}^n U_r = \frac{13}{144} - \frac{1}{4(n+2)^2} - \frac{1}{4(n+3)^2}$  බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$  අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඵලකය සොයන්න.

$n \in \mathbb{Z}^+$  සඳහා  $t_n = \sum_{r=n}^{2n} U_r$  යැයි ගනිමු.

$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$  බව පෙන්වන්න.

(a) (i)

තේරිය හැකි වෙනස් ආකාර ගණන		කමිටු ගණන
1 කණ්ඩායම	2 කණ්ඩායම	
2	4	
1G 1B	1G 3B	$2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$
2B	1G 3B	${}^3C_2 \times 2 \times 1 = 6$
2B	2G 2B	${}^3C_2 \times {}^2C_2 \times {}^3C_2 = 9$
		<u>27</u>

(10)  
(10)  
(10)  
(05)

$\therefore$  වෙනස් කමිටු ගණන  $= 27 \times 2 = 54$

(10)

45

(ii) 1G 5B

(10)  ${}^4C_1 \times {}^6C_5 = 24$  (05)

15

(i) වෙනත් ක්‍රමයක්

1 කණ්ඩායම		2 කණ්ඩායම		කමිටු ගණන
M (3)	F (2)	M (3)	F (2)	
2		2	2	${}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^2C_2 = 9$
2		3	1	${}^3C_2 \times {}^3C_3 \times {}^2C_1 = 6$
1	1	3	1	${}^3C_1 \times {}^2C_1 \times {}^3C_3 \times {}^2C_1 = 12$
2	2	2		9
3	1	2		6
3	1	1	1	12

(10)  
(10)  
(10)  
(05)

කමිටු ගණන :  $9+6+12+9+6+12 = 54$  (10)

(b)  $f(r) - f(r+2) = \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{1}{(r+3)^2}$  (05)

$= \frac{4(r+2)}{(r+1)^2(r+3)^2}$  (05)

$= 4U_r$  (05)

15

එවිට

$$\begin{aligned} r=1; & 4U_1 = f(1) - f(3) \\ r=2; & 4U_2 = f(2) - f(4) \quad (10) \\ r=3; & 4U_3 = f(3) - f(5) \\ & \vdots \\ r=n-2; & 4U_{n-2} = f(n-2) - f(n) \\ r=n-1; & 4U_{n-1} = f(n-1) - f(n+1) \quad (10) \\ r=n; & 4U_n = f(n) - f(n+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n U_r &= f(1) + f(2) - f(n+1) - f(n+2) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{(n+3)^2} \\ \therefore \sum_{r=1}^n U_r &= \frac{13}{144} - \frac{1}{4(n+2)^2} - \frac{1}{4(n+3)^2} \quad (10) \end{aligned}$$

40

$n \rightarrow \infty$  විට ද.පැ. හි සීමාව  $\frac{13}{144}$  (05)

$$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} U_r \text{ අභිසාරි වන අතර එකතුව } \frac{13}{144} \quad (05)$$

15

$$\begin{aligned} t_n &= \sum_{r=n}^{2n} U_r \\ &= \sum_{r=n}^{2n} U_r - \sum_{r=n}^{n-1} U_r \quad (05) \end{aligned}$$

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$  අභිසාරි බැවින්

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} t_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{2n} U_r - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{n-1} U_r \quad (05) \\ &= \frac{13}{144} - \frac{13}{144} \quad (05) \\ &= 0 \quad (05) \end{aligned}$$

20

13. (a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$  හා  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -1 & 0 \\ 1 & 3a \end{pmatrix}$  යැයි ගනිමු.

මෙහි  $a \in R$  වේ.

$P = AB$  මගින් අර්ථ දැක්වෙන  $P$  න්‍යාසය සොයා  $a$  හි කිසිදු අගයකට  $P^{-1}$  නොපවතින බව පෙන්වන්න.

$P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  නම්  $a = 2$  බව පෙන්වන්න.

$a$  සඳහා මෙම අගය සහිතව  $Q = P + I$  යැයි ගනිමු.

මෙහි  $I$  යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසයකි.

$Q^{-1}$  ලියා දක්වා  $AA^T - \frac{1}{2}R = \left(\frac{1}{5}Q\right)^{-1}$  වන පරිදි  $R$  න්‍යාසය සොයන්න.

(b)  $z = x + iy$  යැයි ගනිමු. මෙහි  $x, y \in R$  වේ.

$z$  හි මාපාංකය  $|z|$  හා ප්‍රතිබද්ධය  $\bar{z}$  අර්ථ දක්වන්න.

(i)  $z\bar{z} = |z|^2$

(ii)  $z + \bar{z} = 2\text{Re}z$  හා  $z - \bar{z} = 2i\text{Im}z$  බව පෙන්වන්න.

$z \neq 1$  හා  $w = \frac{1+z}{1-z}$  යැයි ගනිමු.

$\text{Re}w = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$  හා  $\text{Im}w = \frac{2\text{Im}z}{|1-z|^2}$  බව පෙන්වන්න.

$z = \cos\alpha + i\sin\alpha$  ( $0 < \alpha < 2\pi$ ) නම්  $w = i\cot\frac{\alpha}{2}$  බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(c) ආගන්ති සටහනක  $A$  හා  $B$  ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින්  $-3i$  හා  $4$  සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි.  $C$  හා  $D$  ලක්ෂ්‍ය පළමුවන වෘත්ත පාදකයේ පිහිටන්නේ

$ABCD$  රෝම්බසයක් හා  $\hat{BAD} = \theta$  වන පරිදි ය. මෙහි  $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{7}{25}\right)$  වේ.

$C$  හා  $D$  ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

(a)  $P = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -1 & 0 \\ 1 & 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{pmatrix}$  (10)

10

$\begin{vmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 2a = 0$  (05)

$\therefore a$  හි කිසිම අගයක් සඳහා  $p^{-1}$  නොපවතී. (05)

10

වෙනත් ක්‍රමයක්

$p^{-1}$  පැවතීම සඳහා (05)

$\begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   $b, c, d, e \in R$  වන පරිදි පැවතිය යුතු ය.

$\Leftrightarrow 2b + 2ad = 1, b + ad = 0, 2c + 2ae = 0$  සහ  $c + ae = 1$

මෙය විසඳිය හැකි.

$\therefore a$  හි කිසිම අගයක් සඳහා  $p^{-1}$  නොපවතී. (05)

10

If  $P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  නම්  $\begin{pmatrix} 2+4a \\ 1+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$  (05)

$$\Leftrightarrow 2+4a=10 \text{ සහ } 1+2a=5 \quad (05)$$

$$\Leftrightarrow a=2$$

10

$$a=2$$

$$Q = P + I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (05)$$

$$\therefore Q^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

15

$$AA^T - \frac{1}{2}R = \left(\frac{1}{5}Q\right)^{-1} = 5Q^{-1} \quad (05)$$

$$\Leftrightarrow R = 2AA^T - 10Q^{-1}$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 10 \left(\frac{1}{5}\right) \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (05)$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 20 \\ 14 & 36 \end{pmatrix} \quad (05)$$

20

(b)  $z = x + iy$   $x, y \in R$

$$(05) |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ සහ } \bar{z} = x - iy \quad (05)$$

10

(i)  $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \quad (05)$

(ii)  $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2 \operatorname{Re} z \quad (05)$

$$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i \operatorname{Im} z \quad (05)$$

15

$$z \neq 1 \text{ නම් } w = \frac{1+z}{1-z} \times \frac{1-\bar{z}}{1-\bar{z}} = \frac{1-z\bar{z}+z-\bar{z}}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2+2i \operatorname{Im} z}{|1-z|^2} \quad (05)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} w = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \text{ සහ } \operatorname{Im} w = \frac{2 \operatorname{Im} z}{|1-z|^2} \quad (05)$$

20

$$z = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad (0 < \alpha < 2\pi)$$

$$\text{එවිට } |z|=1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} w = 0 \quad (05)$$

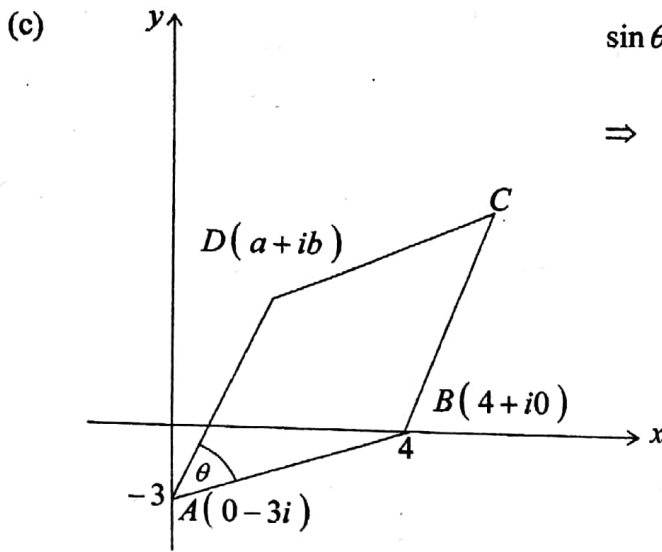
$$\therefore w = \frac{2i \operatorname{Im} z}{|1-z|^2} = \frac{2i \sin \alpha}{(1-\cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} \quad (05)$$

(05)

(05)

$$= \frac{2i \sin \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = i \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = i \cot \frac{\alpha}{2}$$

20



$$\sin \theta = \frac{7}{25} \quad \left( 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{24}{25}$$

$D \equiv (a, b)$  යයි ගනිමු.

A වටා AB වාමාවර්තව භ්‍රමණය කිරීමෙන් AD ගත හැක.

$$\therefore a + i(b+3) = (4+3i)(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (10)$$

$$= (4+3i) \left( \frac{24}{25} + i \frac{7}{25} \right)$$

$$\Leftrightarrow a + i(b+3) = 3 + 4i$$

$$\Leftrightarrow a = 3 \text{ සහ } b = 1$$

$\therefore D$  මගින්  $3+i$  නිරූපණය කරයි. (05)

$$C \equiv (p, q) \text{ නම් } \frac{p+0}{2} = \frac{3+4}{2} \text{ හා } \frac{q-3}{2} = \frac{1+0}{2}$$

$$\Rightarrow p = 7 \text{ හා } q = 4$$

$\therefore C$  මගින්  $7+4i$  නිරූපණය කරයි. (05)

20

14. (a)  $x \neq -1, \frac{1}{3}$  සඳහා  $f(x) = \frac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}$  යැයි ගනිමු.

$x \neq -1, \frac{1}{3}$  සඳහා  $f(x)$  හි ව්‍යුත්පන්නය,  $f'(x)$  යන්න

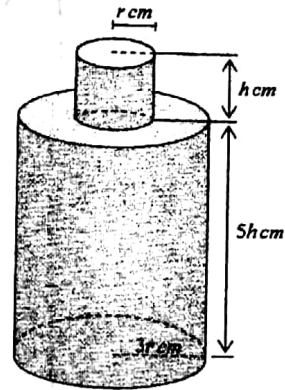
$$f'(x) = \frac{-32x(3x-5)}{(x+1)^3(3x-1)^2} \text{ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.}$$

ස්පර්ශෝත්මුව හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින්  $y = f(x)$  හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්  $k(x+1)^2(3x-1) = 16(x-1)$  සමීකරණයට හරියටම එක් මූලයක් පවතින පරිදි  $k \in R$  හි අගයන් සොයන්න.



(b) අරය  $3r\text{cm}$  හා උස  $5h\text{cm}$  වන සංවෘත කුහර සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක උඩින් මුහුණතින් අරය  $r\text{cm}$  වන තැටියක් ඉවත් කර, අරය  $r\text{cm}$  හා උස  $h\text{cm}$  වන විවෘත කුහර සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සවි කර  $391\pi\text{cm}^3$  ක පරිමාවක් සහිත බෝතලයක් සාදා ගත යුතුව ඇත. බෝතලයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය  $S\text{cm}^2$  යන්න  $S = \pi r(32h + 17r)$  බව දී ඇත.  $S$  අවම වන පරිදි  $r$  හි අගය සොයන්න.



(a)  $x \neq -1, \frac{1}{3}$  සඳහා ;  $f(x) = \frac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}$

එවිට

(15)

$$f'(x) = \frac{16(x-1)^2(3x-1) - 16(x-1)[2(x+1)(3x-1) + 3(x+1)^2]}{(x+1)^4(3x-1)^2}$$

$$= \frac{16(x+1)[(x+1)(3x-1) - 2(x-1)(3x-1) - 3(x-1)(x+1)]}{(x+1)^4(3x-1)^2}$$

$$= \frac{-32x(3x-5)}{(x+1)^3(3x-1)^2}; \left(x \neq -1, \frac{1}{3}\right) \quad (10)$$

25

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$  එවිට  $y = 0$  (05)

$\lim_{x \rightarrow -1} \pm f(x) = \infty$ ,  $x \rightarrow \frac{1}{3} - f(x) = \infty$  සහ  $x \rightarrow \frac{1}{3} + f(x) = -\infty$

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ :  $x = -1$  සහ  $x = \frac{1}{3}$

හැරුම් ලක්ෂ්‍යවලදී  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  හෝ  $x = \frac{5}{3}$  (05)

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}$	$\frac{5}{3} < x < \infty$
$f'(x)$ ලකුණ	(+)	(-)	(+)	(+)	(-)
$f$ ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ.	$f$ ඒකවිධ ලෙස අඩුවේ.	$f$ ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ.	$f$ ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ.	$f$ ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ.	$f$ ඒකවිධ ලෙස අඩුවේ.

(05)

(05)

(05)

(05)

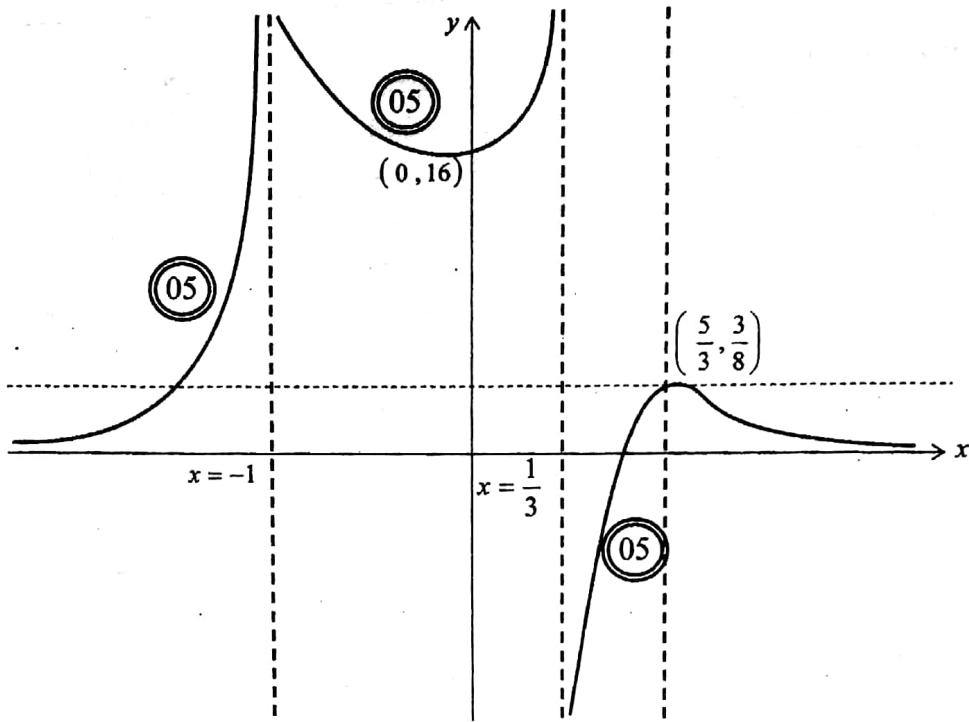
(05)

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය :  $(0, 16)$  ස්ථානීය අවමයක් සහ  $\left(\frac{5}{3}, \frac{3}{8}\right)$

ස්ථානීය උපරිමයක්

(05)

(05)



60

$$k(x+1)^2(3x-1) = 16(x-1)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}$$

05

$k \leq 0$  හෝ  $\frac{3}{8} < k < 16$  එනම් පමණක් දෙන ලද සමීකරණයට හරියටම එක් මූලයක් පමණක් පවතී.

15

(b) පරිමාව :  $391\pi = \pi(3r)^2(5h) + \pi r^2 h$  10

$$\Rightarrow 391 = 46r^2 h$$

$$\Rightarrow h = \frac{17}{2r^2}, (r > 0)$$
 05

පෘෂ්ඨික වර්ගඵලය :  $S = \pi r(32h + 17r)$

$$= 17\pi \left( \frac{16}{r} + r^2 \right)$$
 05

$$\frac{dS}{dr} = 17\pi \left( \frac{16}{r^2} + 2r \right) = \frac{34\pi(r^3 - 8)}{r^2}$$
 05

$$\frac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = 2$$

$0 < r < 2$  විට දී  $\frac{dS}{dr} < 0$  සහ  $r > 2$  විටදී  $\frac{dS}{dr} > 0$

05

05

$\therefore r = 2$  විට දී  $S$  අවම වේ. 05

50

15. (a) (i)  $x^2$ ,  $x^1$  හා  $x^0$  හි සංගුණක සැසඳීමෙන්  
සියලු  $x \in R$  සඳහා  $Ax^2(x-1) + Bx(x-1) + C(x-1) - Ax^3 = 1$   
වන පරිදි  $A$ ,  $B$  හා  $C$  නියතවල අගයන් සොයන්න.  
එනමින්,  $\frac{1}{x^3(x-1)}$  යන්න හින්න භාග වලින් ලියා දක්වා  
 $\int \frac{1}{x^3(x-1)} dx$  සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්  $\int x^2 \cos 2x dx$  සොයන්න.

(b)  $\theta = \tan^{-1}(\cos x)$  ආදේශය භාවිතයෙන්,  
 $\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx = 2 \ln(1+\sqrt{2})$  බව පෙන්වන්න.

$a$  නියතයක් වන  $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$  සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$  සොයන්න.

(a) (i)  $Ax^2(x-1) + Bx(x-1) + C(x-1) - Ax^3 = 1$

සංගුණක සැසඳීමෙන්:

$$x^2 : -A + B = 0 \quad (05)$$

$$x^1 : -B + C = 0 \quad (05)$$

$$x^0 : -C = 1 \quad (05)$$

$$A = -1, B = -1 \text{ and } C = -1 \quad (05)$$

20

$$1 = -x^2(x-1) - x(x-1) - (x-1) + x^3$$

$$\therefore \frac{1}{x^3(x-1)} \text{ හින්න භාග ඇසුරින්}$$

$$\frac{1}{x^3(x-1)} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x-1} \quad \text{ලෙස වේ.} \quad (05)$$

$$\text{එනමින් } \int \frac{1}{x^3(x-1)} dx = -\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^3} dx + \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \ln|x-1| + C \quad (05)$$

$$(05) \quad (05) \quad (05) \quad (05)$$

මෙහි  $C$  යනු අභිමත නියතයක් වේ.

30

(ii)  $\int x^2 \cos 2x dx = \frac{x^2 \sin 2x}{2} - \frac{1}{2} \int 2x \sin 2x dx \quad (05)$

$$= \frac{x^2 \sin 2x}{2} + \frac{x \cos 2x}{2} - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \quad (05)$$

$$= \frac{x^2 \sin 2x}{2} + \frac{x \cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \quad (05)$$

මෙහි  $C$  යනු අනිමත නියතයක් වේ. (05)

30

(b)  $\theta = \tan^{-1}(\cos x); -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\tan \theta = \cos x \Rightarrow \sec^2 \theta d\theta = -\sin x dx \quad (05)$$

$$x = 0 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(1) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad (05)$$

$$x = \pi \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(-1) \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \quad (05)$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx = - \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\sqrt{\sec^2 \theta}} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec \theta d\theta \quad (05)$$

$$\left( \sqrt{\sec^2 \theta} = \sec \theta \text{ as } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec \theta (\sec \theta + \tan \theta)}{(\sec \theta + \tan \theta)} d\theta \quad (05)$$

$$= \ln |\sec \theta + \tan \theta| \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \quad (05)$$

$$= \ln(\sqrt{2}+1) - \ln(\sqrt{2}-1) \quad (05)$$

$$= \ln \left( \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)} \right)$$

$$= 2 \ln(\sqrt{2}+1) \quad (05)$$

50

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx = \int_0^\pi \frac{(\pi-x) \sin(\pi-x)}{\sqrt{1+\cos^2(\pi-x)}} dx \quad (05)$$

$$= \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx - \int_0^\pi \frac{x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx \quad (05)$$

$$\Rightarrow I = \pi [2 \ln(\sqrt{2}+1)] - I \quad (05)$$

$$\Rightarrow 2I = 2\pi \ln(\sqrt{2}+1)$$

$$\Rightarrow I = \pi \ln(\sqrt{2}+1) \quad (05)$$

20

16.  $A \equiv (-2, -3)$  හා  $B \equiv (4, 5)$  යැයි ගනිමු.  $AB$  රේඛාව සමඟ  $l_1$  හා  $l_2$  රේඛා එක එකක් සාදන සුළු කෝණය  $\frac{\pi}{4}$  වන පරිදි  $A$  ලක්ෂ්‍යය හරහා යන  $l_1$  හා  $l_2$  රේඛාවල සමීකරණය සොයන්න.

$P$  හා  $Q$  ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින්  $l_1$  හා  $l_2$  මත ගෙන ඇත්තේ  $APBQ$  සමචතුරස්‍රයක් වන පරිදි ය.  $PQ$  හි සමීකරණය සොයා  $P$  හා  $Q$  හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

තව ද  $A, P, B$  හා  $Q$  ලක්ෂ්‍ය හරහා යන  $S$  වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.  $\lambda > 1$  යැයි ගනිමු.

$R \equiv (4\lambda, 5\lambda)$  ලක්ෂ්‍යය,  $S$  වෘත්තයට පිටතින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

$R$  ලක්ෂ්‍යයේ සිට  $S$  වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය සොයන්න.

$\lambda (> 1)$  විචලනය වන විට, මෙම ස්පර්ශ ජ්‍යායන් අවල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන බව පෙන්වන්න.

$$\tan \frac{\pi}{4} = \left| \frac{m - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4m}{3}} \right| \quad (10)$$

$$\Rightarrow \left( m - \frac{4}{3} \right)^2 = \left( 1 + \frac{4m}{3} \right)^2 \quad (05)$$

$$\Rightarrow 7m^2 + 48m - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (7m - 1)(m + 7) = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{7} \text{ or } m = -7$$

(05)

(05)

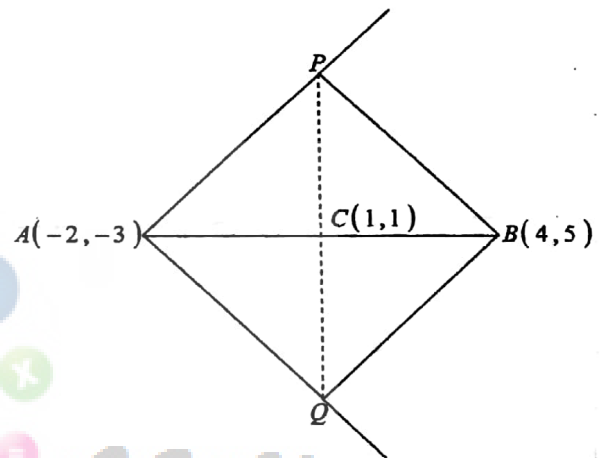
$\therefore$  අවශ්‍ය සමීකරණය වන්නේ

$$(i) \quad y + 3 = \frac{1}{7}(x + 2) \Rightarrow x - 7y - 19 = 0 \quad (10)$$

සහ

$$(ii) \quad y + 3 = -7(x + 2) \Rightarrow 7x + y + 17 = 0 \quad (10)$$

45



$l_1$  යනු  $x - 7y - 19 = 0$  රේඛාව සහ අනෙක  $l_2$  යැයි ගනිමු.

$$PQ \text{ හි සමීකරණය: } y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow 3x + 4y - 7 = 0 \quad (10)$$

$$l_1 \text{ සහ } PQ \text{ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය: } P = (5, -2) \quad (05)$$

$Q = (x_0, y_0)$  නම්,

$$\frac{5 + x_0}{2} = 1 \Rightarrow x_0 = -3 \quad (05)$$

$$\frac{-2 + y_0}{2} = 1 \Rightarrow y_0 = 4$$

$$Q \equiv (-3, 4) \quad (05)$$

25

$A, P, B$  හා  $Q$  ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තය  $AB$  විෂ්කම්භය ලෙස ඇති වෘත්තය වේ. (10)

$$(y-5)(y+3) + (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0 \quad (10)$$

20

$$CR^2 = (4\lambda - 1)^2 + (5\lambda - 1)^2 \text{ හා වෘත්තයේ අරය 5 වේ.} \quad (10)$$

$$\text{දැන් } CR^2 - 25 = (4\lambda - 1)^2 + (5\lambda - 1)^2 - 25 \quad (05)$$

$$= 41\lambda^2 - 18\lambda - 2$$

$$= (\lambda - 1)(41\lambda + 23) > 0 \text{ as } \lambda > 1 \quad (10)$$

$\therefore R$  ලක්ෂ්‍යය වෘත්තයට පිටතින් පිහිටයි. (05)

30

අවශ්‍ය ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය

$$x(4\lambda) + y(5\lambda) - (x+4\lambda) - (y+5\lambda) - 23 = 0 \quad (10)$$

$$(-x - y - 23) + \lambda(4x + 5y - 9) = 0 \quad (05)$$

$\therefore$  ස්පර්ශ ජ්‍යාය  $4x + 5y - 9 = 0$  හා  $x + y + 23 = 0$  රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි. (10)

එය අවල ලක්ෂ්‍යයකි. (05)

30

17. (a)  $0 \leq \theta \leq \pi$  සඳහා  $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$  විසඳන්න.  $\cos \theta$  ඇසුරෙන්  $\cos 2\theta$  හා  $\cos 3\theta$  ලියා දක්වා,  $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$  බව පෙන්වන්න. මෙහි  $t = \cos \theta$  වේ.

ඒනසින්  $4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0$  සමීකරණයෙහි මූල තුන ලියා දක්වා

$4t^2 - 2t - 1 = 0$  සමීකරණයෙහි මූල  $\cos \frac{\pi}{5}$  හා  $\cos \frac{3\pi}{5}$  බව පෙන්වන්න.

(b)  $ABC$  ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද  $D$  යනු  $BD : DC = m : n$  වන පරිදි  $BC$  මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. මෙහි  $m, n > 0$  වේ.

$\hat{BAD} = \alpha$  හා  $\hat{DAC} = \beta$  බව දී ඇත.

$BAD$  හා  $DAC$  ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්

$$\frac{mb}{nc} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

මෙහි  $b = AC$  හා  $c = AB$  වේ.

$$\text{ඒ නසින් } \frac{mb - nc}{mb + nc} = \tan \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cot \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

(c)  $2 \tan^{-1} \left( \frac{1}{3} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{4}{3} \right) = \frac{\pi}{2}$  බව පෙන්වන්න.

(a)  $0 \leq \theta \leq \pi$  සඳහා  $\cos 3\theta = -\cos 2\theta = \cos(\pi - 2\theta)$  (05)  
 $3\theta = 2n\pi \pm (\pi - 2\theta), n \in \mathbb{Z}$  (05)  
 $5\theta = 2n\pi + \pi, n \in \mathbb{Z}$  or  $\theta = 2n\pi - \pi, n \in \mathbb{Z}$

$0 \leq \theta \leq \pi$  බැවින් විසඳුම්  $\theta = \pi, \frac{\pi}{5}$  හා  $\frac{3\pi}{5}$  (05)  
 (05) (05)

30

(05) (05)  
 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$  and  $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$   
 $\therefore \cos 2\theta + \cos 3\theta = 4\cos^3 \theta + 2\cos^2 \theta - 3\cos \theta - 1$   
 $= 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1, \text{ මෙහි } t = \cos \theta$  (10)

20

$\therefore 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0$  හි මූලයන්  $\cos \pi, \cos \frac{\pi}{5}$  හා  $\frac{3\pi}{5}$  (10)

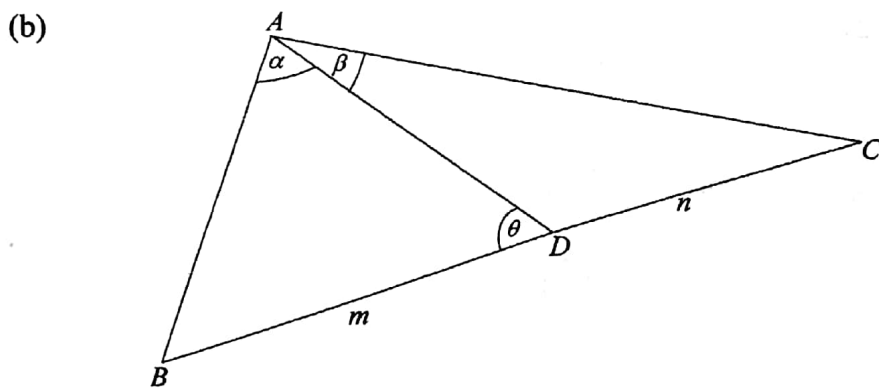
$\cos \pi = -1 \Rightarrow t = 1$  යනු  $4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$  හි සාධකයකි.  
 $\Rightarrow 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = (t+1)(4t^2 - 2t - 1) = 0$  (10)

$\Rightarrow 4t^2 - 2t - 1 = 0$  හි මූලයන්  $\cos \frac{\pi}{5}$  හා  $\frac{3\pi}{5}$  (05)

$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \times 4 \times 1}}{2 \times 4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$  (05)

$\cos \frac{3\pi}{5} < 0$  බැවින්  $\cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$  (05)

35



$\hat{BDA} = \theta$  යැයි ගනිමු.

සයින නීතිය භාවිතයෙන් :

$BAD \Delta: \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \theta}$  (10)

$ADC \Delta: \frac{DC}{\sin \beta} = \frac{b}{\sin(\pi - \theta)}$  (10)

$$\Rightarrow \frac{(BD) \sin \beta}{(DC) \sin \alpha} = \frac{c}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{mb}{nc} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (05)$$

$$mb = nc \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\Rightarrow \frac{mb - nc}{mb + nc} = \frac{nc \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} - nc}{nc \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + nc}$$

$$= \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}$$

$$= \frac{2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)}{2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)} \quad (05)$$

$$= \tan \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cot \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \quad (05)$$

20

(c)  $\tan^{-1} \left( \frac{1}{3} \right) = \gamma$  හා  $\tan^{-1} \left( \frac{4}{3} \right) = \delta$  යැයි ගනිමු.  $0 < \delta, \gamma < \frac{\pi}{2}$

$$(05) \quad 2\gamma + \delta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\gamma = \frac{\pi}{2} - \delta$$

$$\Leftrightarrow \tan(2\gamma) = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right)$$

$\left( \frac{\pi}{2} - \delta \right)$  සුළු කෝණයක් බැවින්,  $2\gamma$  ද සුළු කෝණයකි.

$$\tan 2\gamma = \frac{2 \tan \gamma}{1 - \tan^2 \gamma} = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4} \quad (05)$$

$$\tan \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right) = \cot \delta = \frac{3}{4} \quad (05)$$

$$\therefore 2\gamma + \delta = \frac{\pi}{2} \quad (05)$$

20



1. සුළු සිරස් මෙහෙයක් මත එකම සරල රේඛාවක් දිගේ එකිනෙක දෙසට එකම  $u$  වේගයෙන් චලනය වෙමින් සිටින, ස්කන්ධ පිළිවෙලින්  $2m$  හා  $m$  වූ  $A$  හා  $B$  අංශු දෙකක් සරල ලෙස හැටු. හැටුමෙන් මොහොතකදී ඔවුන්  $A$  අංශුව නිශ්චලතාවට පැමිණෙයි. ප්‍රත්‍යාගතී සංගුණකය  $\frac{1}{2}$  බව ද හැටුම නිසා  $B$  මත පෙරෙහි ආවේගයෙහි විශාලත්වය  $2mu$  බව ද පෙන්වන්න.



පද්ධතියට  $I = \Delta(mv)$  යෙදීමෙන්

$$\rightarrow 0 = [2m(0) + mv] - [2mu - mu] \quad (5)$$

$$\Rightarrow mv = mu.$$

$$\Rightarrow v = u \quad (5)$$

නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගතී නියමය යෙදීමෙන්:  $v - 0 = -e(-u - u) \quad (5)$

$$u = e(2u)$$

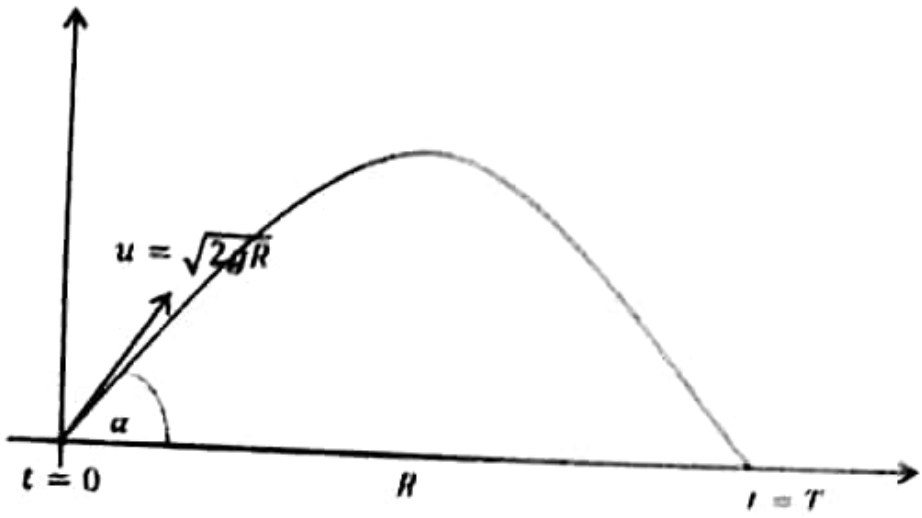
$$e = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$B$  සඳහා  $I = \Delta(mv)$  යෙදීමෙන්:

$$\rightarrow \text{ආවේගය} = mv - m(-u)$$

$$= mu + mu = 2mu. \quad (5)$$

2. A particle is projected from the origin with an initial speed  $u = \sqrt{2gR}$  at an angle  $\alpha$  to the horizontal. It follows a parabolic path and lands at a distance  $R$  from the origin. Find the angle  $\alpha$ .



$s = ut + \frac{1}{2}at^2$  (Vertical displacement), At time  $t = T$ :

$\uparrow 0 = (u \sin \alpha)T - \frac{1}{2}gT^2 \Rightarrow T = \frac{2u \sin \alpha}{g}$  (5)

$\rightarrow R = (u \cos \alpha) \cdot T = \frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$  (5)

$R = 2R \sin 2\alpha; \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$  (5)

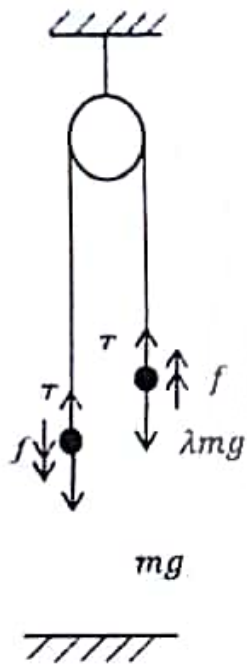
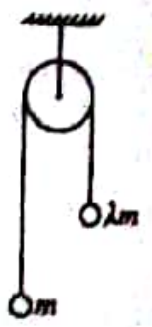
$2\alpha = \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$

Therefore the angles are:

$\alpha_1 = \frac{\pi}{12}$  or  $\alpha_2 = \frac{5\pi}{12}$  (5)

$\therefore \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{12}(5 - 1) = \frac{\pi}{3}$  (5)

3. ස්කන්ධය  $m$  සහ  $P$  අංශුවක් හා ස්කන්ධය  $\lambda m$  සහ  $Q$  අංශුවක් අතර, ක්‍රමයෙන් කැඩීයාමක් උවත් යන සාමාන්‍ය අවස්ථාවක ආවේණික දෘශ්‍යමාපනයක් ඇතිව ඇත. උපරිතරයේ දැක්වෙන පරිදි, කන්දුවකදී ඇතිව, පද්ධතියේ චාලකයන්ගේ ස්වල්ප ආවේණික උවැසි,  $P$  අංශුව  $\frac{g}{2}$  ක්වේගයකින් චලනය වේ.  $\lambda = \frac{1}{3}$  බව පෙන්වන්න.  
 $P$  අංශුව සිරස් අක්ෂයකට ආවේණික  $v$  වේගයෙන් ගැලවී යාම හා  $Q$  අංශුව කිසිවිටෙකින් කැඩීයාමකට ලක්වී යාම හෝ,  $P$  අංශුව සිම ගැටුණු අවස්ථාවකින් සිට  $Q$  අංශුව උපරිතරයට ලක්වී යාම වස්තු ගන්නා කාලය සොයන්න.



$F = ma$  යෙදීමෙන්

$P$  සඳහා:  $\downarrow mg - T = m \left(\frac{g}{2}\right)$  ----- (1)

5

$Q$  සඳහා:  $\uparrow T - \lambda mg = \lambda m \left(\frac{g}{2}\right)$  ----- (2)

5

$(1) + (2) \Rightarrow (1 - \lambda)mg = (1 + \lambda)m(g/2)$

5

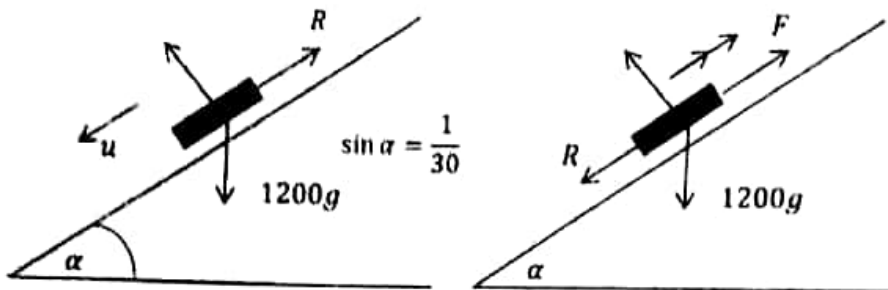
$\Rightarrow 2(1 - \lambda) = (1 + \lambda)$

$\lambda = \frac{1}{3}$  (5)

$Q$  ට, එහි උවැසි උසට ලක්වී යාම වස්තු ගන්නා කාලය  $T$  යන්න  $0 = v - \mu T$  මගින් දැනු ලැබේ.

$\Rightarrow T = \frac{v}{\mu}$  (5)

4.  $1200 \text{ kg}$  බරක් සහිත වස්තුවක්  $\alpha$  කෝණයක් ආසන්නයේ දිගු තලයක දිගේ උඩට ගමන් කරමින් පවතී. වස්තුවේ වේගය  $u$  වන අතර  $\sin \alpha = \frac{1}{30}$  වේ. ගුරුත්වජ ත්වරණය  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$  ලෙස ගනිමින් වස්තුවේ උඩට ගමන් කරමින් පවතින බලය  $R$  සොයන්න.
- ඉන්පසු, වස්තුවේ වේගය  $\frac{1}{6} \text{ ms}^{-2}$  ත්වරණයක් සහිත ව එම තලය දිගේ උඩට ගමන් කරමින් පවතී. එහි වේගය  $15 \text{ ms}^{-1}$  වන මොහොතේ දී වස්තුවේ ජවය සොයන්න.



$R$  ප්‍රතිරෝධය සමඟින් වස්තුවේ වේගය  $u$  රචනා කරන බලය වන බව,

$F = ma$  යෙදීමෙන්

$1200 g \sin \alpha - R = 0$  (5)

$\Rightarrow R = 1200(10) \left(\frac{1}{30}\right) = 400 \text{ N}$ . (5)

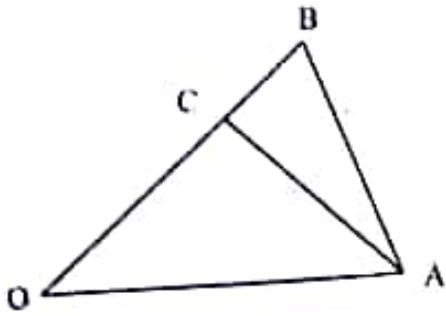
වස්තුවේ වේගය  $\frac{1}{6} \text{ ms}^{-2}$  ත්වරණය වන බව, එහි ප්‍රතිරෝධය  $F$  යැයි ගනිමු.

$F - R - 1200 g \sin \alpha = 1200 \left(\frac{1}{6}\right) \Rightarrow F = 1000 \text{ N}$  (5)

එනිසා, ජවය  $P = Fv = 15(1000) \text{ W}$  (5)

$P = 15 \text{ kW}$ . (5)

5. ඉහත රූපයේ,  $OA$  හා  $OB$  යනු  $O$  අවලම්භයක අනුරූප වෘත්තයක පිහිටි ලක්ෂ්‍ය  $A$  හා  $B$  ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් සෛද්ධික වැට්ටි ගනිති.  $C$  යනු  $\angle OCA = \frac{\pi}{2}$  වන පරිදි  $OB$  සරල රේඛාව හි පිහිටි ලක්ෂ්‍යය වැට්ටි.  $\vec{OC}$  සෛද්ධිකය  $i$  හා  $j$  ආශ්‍රයෙන් සොයන්න.



$\vec{OA} = 3i, \quad \vec{OB} = 2i + 3j$

එවිට,  $\vec{OC} = \lambda(\vec{OB}) = \lambda(2i + 3j)$  වේ. මෙහි  $\lambda$  අදිශයකි.

(5)

$\vec{OC}, \vec{CA}$  උමඛ බැවින්,

$\lambda(2i + 3j) \cdot \{-\lambda(2i + 3j) + 3i\} = 0$

(5)

(5)

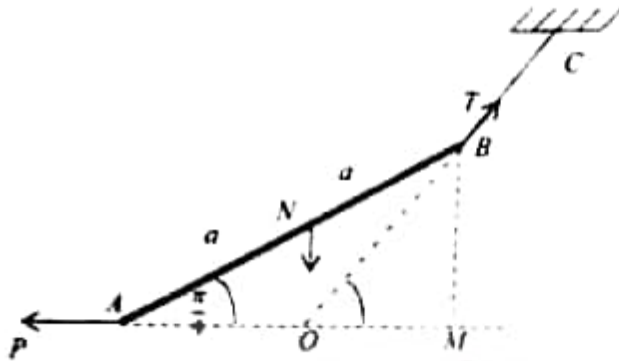
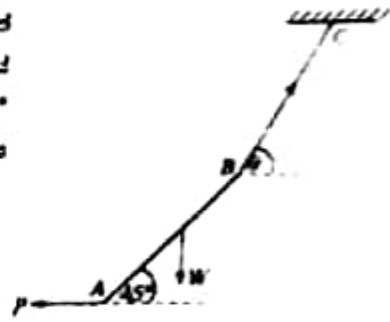
$6 - 13\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{6}{13}$

(5)

$\therefore \vec{OC} = \frac{12}{13}i + \frac{18}{13}j$

(5)

4. දිග  $2a$  හි බර  $W$  වූ  $AB$  උසස් කැබලි,  $BC$  පැහැදිලි ඉරිතොට කැබලිවලින් නම්  $A$  හි සිට  $B$  දක්වා දී භාජන ලද  $P$  බලය එල්ල කළ හැකි උපරිම දැක්වීමට පරිමාණයක් ලෙස  $a$  සහ  $W$  දෙකට,  $BC$  කැබලිවල  $45^\circ$  කෝණයක් දැක්වීමට දී ඇත.  $BC$  කැබලිවල බර සහ භාජන  $\theta$  කෝණය  $\tan \theta = 2$  යන්න දැනුම් ලබන බව පෙන්වන්න. එසේ පිළිවෙල දී කැබලිවල භාජන  $W$  ලැබෙන්නේ පෙන්වන්න.



$BMO$  බිඳ ප්‍රමාණය.

$BM = \frac{2a}{\sqrt{2}} ; OM = \frac{a}{\sqrt{2}}$  (5)

$\tan \theta = \frac{BM}{OM} = \frac{2a/\sqrt{2}}{a/\sqrt{2}}$

$\tan \theta = 2$  (5)

$\uparrow T \sin \theta - W = 0$  (5)

$= \frac{W}{\sin \theta} = \frac{W\sqrt{5}}{2}$  (5) ( $\because \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ )

(5)

7. A හා B යනු S එකේ ද්‍රව්‍යමය සේට්ස් වන බැවින්  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(B) = \frac{1}{4}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$  යන අගයන් දී,  $P(A|B')$ ,  $P(A' \cap B')$  හා  $P(B|A')$  සොයන්න. මෙහි A' හා B' යනු A හා B සේට්ස්වල සමපාත නොවන කොටස් වේ.

සේට්ස් දී ඇති අගයන්:

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B') + P(A \cap B) = P(A)$$

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \quad (5)$$

මෙහි සඳහා

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A \cap B')}{1 - P(B)} = \frac{1/6}{3/4} = \frac{2}{9} \quad (5)$$

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \quad (5)$$

$$= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{7}{12} \quad (5)$$

$$P(B'|A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{7/12}{1 - 1/3} = \frac{7/12}{2/3} = \frac{7}{8} \quad (5)$$

8. පහත දැක්වූ ප්‍රශ්නවලට පිටපත් කොට දී ලියා ගන්න. එක් පිටපතක් ඔබගේ පොතේ දැමීමට සූදානම් වන්න. පිටපත් කිරීමේදී ප්‍රශ්නවලට පිටපත් කොට දීමට සූදානම් වන්න.
- (i) පහත දැක්වූ ප්‍රශ්නවලට පිටපත් කොට දීමට සූදානම් වන්න.
  - (ii) පහත දැක්වූ ප්‍රශ්නවලට පිටපත් කොට දීමට සූදානම් වන්න.

(i) පහත දැක්වූ ප්‍රශ්න:  $\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{35}$

(5)

පහත දැක්වූ ප්‍රශ්න: එක පමණි.

∴ පිළිතුර =  $\frac{1}{35}$

(5)

(ii)

$RBRB : \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{35}$

(5)

$BRBR : \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{35}$

(5)

∴ පිළිතුර =  $\frac{3}{35} + \frac{3}{35} = \frac{6}{35}$

(5)



9. එක එකක් 10 අඩු වන නිඛිල පහතට එක එකකින් පමණක් ඇතුළත් වන පහත ප්‍රමාණය, මෙම 6:10:5 අනුපාතවලට පිහිටයි. මෙම නිඛිල පහ සොයන්න.

මාතෘකා  $2a$  යැයි ගනිමු.

එවිට, දී ඇති වන නිඛිල:  $b, c, a, 2a, 2a$

5

මධ්‍යන්‍යය: මාතෘකා = 6:10

$$\therefore \frac{10(b+c+5a)}{5} = 6 \times 2a$$

5

$$\Rightarrow b+c=a$$

$\therefore$  දී ඇති නිඛිල වන්නේ 1, 2, 3, 6, 6.

10

Maths  
අර්ථ : com

10. සමාන සංඛ්‍යාවක් ලක්ෂ්‍යවලින් 20ක් සඳහා දිනකට වැඩිපමණ කාර්යයක් ලදී. මෙම දත්ත ඉලක්ක සඳහා මධ්‍යස්ථය  $\mu$  හා සම්මත අපගමනය  $\sigma$  විචලනයන්  $28^\circ\text{C}$  හා  $4^\circ\text{C}$  ලෙස සංකේතය කර තිබුණි. පසුව නව දත්ත ලක්ෂ්‍යවලින් දෙකක්  $35^\circ\text{C}$  හා  $21^\circ\text{C}$  ලෙස වැරදිව ඇතුළත් කර ඇති 20 සංඛ්‍යා පැමිණිත් පසුව ඒවා  $25^\circ\text{C}$  හා  $31^\circ\text{C}$  ලෙස නිවැරදි කරන ලදී.  $\mu$  හා  $\sigma$  හි නිවැරදි අගයන් සොයන්න.

$$\mu = 28, \sigma = 4$$

නිවැරදි කළ දත්ත:  $35 \rightarrow 25 \quad (-10)$

$21 \rightarrow 31 \quad (+10)$

$\therefore$  මධ්‍යස්ථය සහ සම්මත අපගමනය සොයන්න.

$\therefore \mu = 28$  ම වේ. 5

පැවැති  $\sum x_i^2 = 20 \times \sigma_1^2 + 20\mu^2 = 20(4^2 + 28^2)$  5

නව  $\sum x_i^2 =$  පැවැති  $\sum x_i^2 - 35^2 - 21^2 + 25^2 + 31^2$  5

$= 20(4^2 + 28^2) - 8 \times 10$  5

නව  $\sigma^2 = \frac{20(28^2 + 4^2) - 8 \times 10 - 20 \times 28^2}{20}$

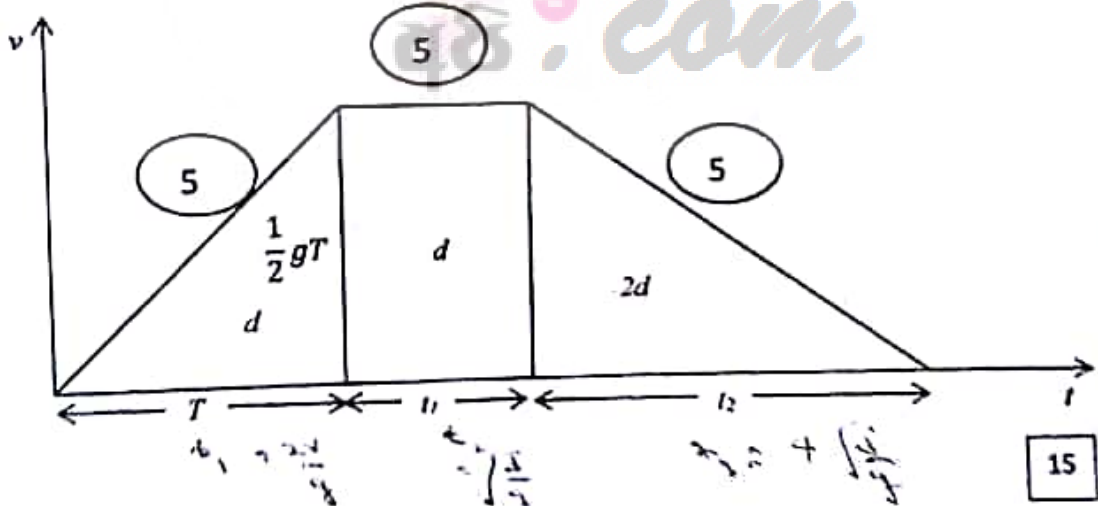
$= \frac{20 \times 16 - 20 \times 4}{20}$

$= 12$

$\therefore$  සම්මත අපගමනය  $\sigma = \sqrt{12}$ . 5

11. (a) මීටර  $4d$  ගැඹුරු පහලපස වලනය වන කෝටසයක්  $t = 0$  කාලයේ දී  $A$  ලක්ෂ්‍යයකින් නික්මවනුයේ පිට පිරිස් ව පහළට වලනය වීමට පටන් ගනී. එය, පහළට  $\frac{g}{2} \text{ m s}^{-2}$  නියත ක්වරණයෙන් මීටර  $d$  දුරක් වලනය වී විභ්‍රමය එම වලනය අවසානයේ ලබාගත් ප්‍රවේගයෙන් කළු මීටර  $d$  දුරක් වලනය වේ. කෝටසය ඉන්පසු  $A$  සිට මීටර  $4d$  දුරක් පහළින් පිහිටි  $B$  ලක්ෂ්‍යයේ දී නික්මවනුයේ පැමිණෙන පරිදි නියත මන්දනයකින් ඉසිලී යූර් වලනය වේ.  
 කෝටසයෙහි වලනය සඳහා ප්‍රවේග-කාල වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.  
 ඒ හරහා  $A$  සිට  $B$  දක්වා පහළට වලනය සඳහා කෝටසය ගනු ලබන මුළු කාලය සොයන්න.

(b) පොළොවට සාපේක්ෂව  $u \text{ km h}^{-1}$  ඒකාකාර වේගයකින් උතුරු දිශාවට නැවක් යනු කරයි. එක්තරා මොහොතක දී නැවේ පිට, දකුණෙන් නැගෙනහිරට  $\beta$  කෝණයකින්, කැපී පෙනෙහි සිට  $p \text{ km}$  දුරකින්  $B_1$  බේරවුමක් නිරීක්ෂණය කරනු ලැබේ. මෙම මොහොතේ දී ම,  $B_2$  බේරවුමක් නැවේ පිට සටහිටිත්  $q \text{ km}$  දුරකින් නිරීක්ෂණය කරනු ලැබේ. බේරවුම දෙකම පොළොවට සාපේක්ෂව  $v (> u) \text{ km h}^{-1}$  ඒකාකාර වේගයෙන් සරල රේඛීය පෙත්වල, නැව අල්ලා ගැනීමේ අපේක්ෂාවෙන් යනු කරයි. පොළොවට සාපේක්ෂව බේරවුමල පෙත් නිරීක්ෂණය කිරීම සඳහා ප්‍රවේග ස්‍රීකෝණවල දළ සටහනක් එකම රූපය අඳින්න.  
 පොළොවට සාපේක්ෂව  $B_1$  බේරවුමේ පෙත් උතුරෙන් සටහිරව  $\beta = \sin^{-1}\left(\frac{u \sin \beta}{v}\right)$  කෝණයක් සඳහා සිට පෙන්වා, පොළොවට සාපේක්ෂව  $B_2$  බේරවුමේ පෙත් සොයන්න.  
 $\beta = \frac{\pi}{3}$  හා  $v = \sqrt{3}u$  ගැබ් කනිලි.  $3q^2 > 8p^2$  කම්,  $B_1$  බේරවුමට  $B_2$  බේරවුමට පෙත් නැව ගැලපා ගන්නා බව පෙන්වන්න.



$d = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} gT \right)$  ----- (1)

5

$d = \left( \frac{1}{2} gT \right) t_1$  ----- (2)

5

(1) හා (2)  $\Rightarrow t_1 = \frac{T}{2}$  5

$2d = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} g T \right) \cdot t_2$  5

(1) හා (3)  
 $\Rightarrow t_2 = 2T$  5

(1)  $\Rightarrow T = \sqrt{\frac{4d}{g}}$  5

සම්පූර්ණ කාලය =  $T + t_1 + t_2$

$= T + \frac{T}{2} + 2T = \frac{7T}{2} = 7\sqrt{\frac{d}{g}}$  5

35

(b)  $\underline{V}(S, E) = u \uparrow$

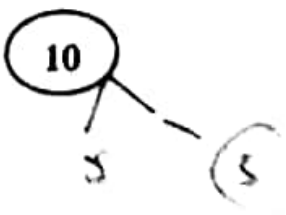
$\underline{V}(B_i, E) = v$  for  $i = 1, 2,$

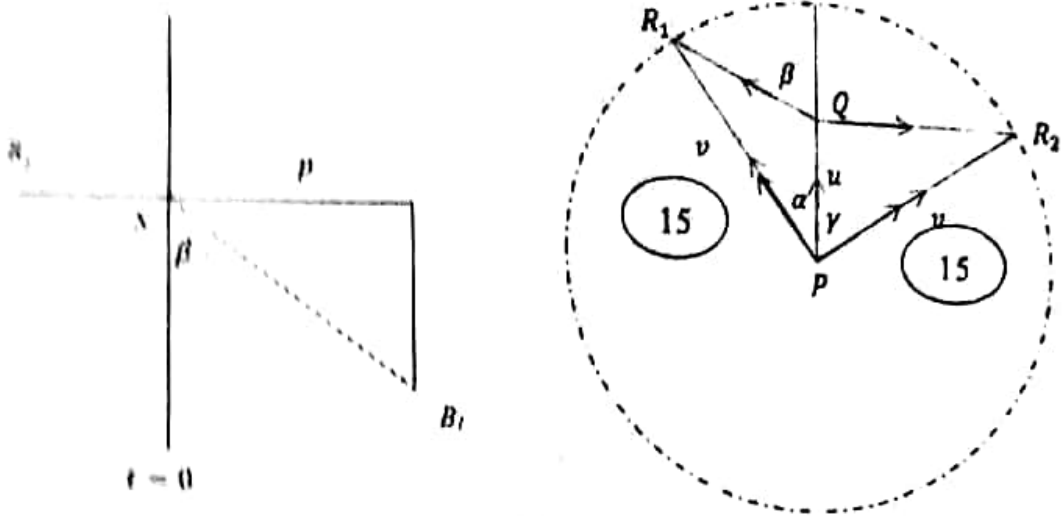
$\underline{V}(B_1, S) = \beta$  10

$\underline{V}(B_2, S) = \longrightarrow$



$\underline{V}(B_i, E) = \underline{V}(B_i, S) + \underline{V}(S, E)$   
 $= \underline{V}(S, E) + \underline{V}(B_i, S)$   
 $= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}_i$   
 $= \overrightarrow{PR}_i$  for  $i = 1, 2.$





මෙහි වෘත්තය  
වෘත්තයකි.  
10%  
වෘත්තය

ඒකාස්කයට පවතින උපරිම වේගයන්  $\frac{v}{\sin \beta} = \frac{u}{\sin(\beta - \alpha)}$  (5)

$$\sin(\beta - \alpha) = \frac{u \sin \beta}{v}$$

$$(\beta - \alpha) = \sin^{-1}\left(\frac{u \sin \beta}{v}\right)$$

$$\alpha = \beta - \sin^{-1}\left(\frac{u \sin \beta}{v}\right) \text{----- (i) (5)}$$

ඒ, ඒ වෘත්තයට පවතින උපරිම වේගයන්  $\alpha$  කෝණය (i) මගින් දෙනු ලැබේ.

ඒකාස්කයට ඒ, ඒ වෘත්තයට පවතින උපරිම වේගයන් නැගෙනහිරට  $\gamma$  කෝණයක් සඳහා. මෙහි

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{u}{v}\right) \text{ (5)}$$

65



(ii) දෙන ලද:  $\beta = \frac{\pi}{3}$  හා  $v = \sqrt{3}u$ .

එවිට

$$\alpha = \frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(\frac{u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{u}{\sqrt{3}}}\right) = \frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6} \quad (5)$$

$\therefore PQ = QR_1$

$\Rightarrow V(B, S) = u.$

(5)

$B_1$  සාපේක්ෂ පරිසර ඔස්සේ

$B_1$  ධන දුර  $= \frac{2p}{\sqrt{3}}$

(5)

$B_1$  ධන කාලය  $t_1 = \frac{\frac{2p}{\sqrt{3}}}{u} = \frac{2p}{\sqrt{3}u}$ .

(5)

$B_2$  ධන කාලය  $t_2 = \frac{q}{\sqrt{v^2 - u^2}} = \frac{q}{u\sqrt{3-1}} = \frac{q}{\sqrt{2}u}$ .

(5)

$t_1 < t_2$  නම්  $B_1, B_2$  ධන පෙර S දල්ලා ගනී.

(5)

එනම්  $\frac{2p}{\sqrt{3}u} < \frac{q}{\sqrt{2}u}$

$\Rightarrow 2\sqrt{2}p < \sqrt{3}q$

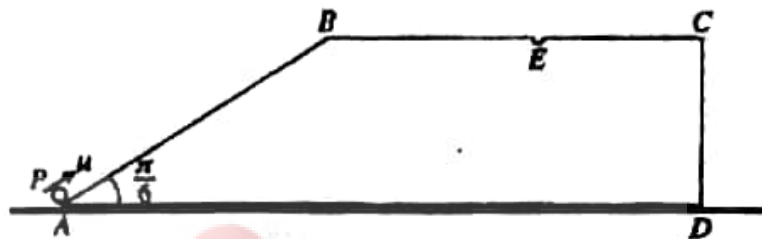
$\Rightarrow 8p^2 < 3q^2.$

(5)

35

12. (a)  $AB = a$  හා  $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{6}$  වන පරිදි වූ රූපයේ දැක්වෙන  $ABCD$  ත්‍රිකෝණය, ස්කන්ධය  $2m$  වූ ස්‍රමයක කුට්ටියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය තුළින් වූ සිරස් තරස්කඩයි.  $AD$  හා  $BC$  වර්තා සමාන්තර වන අතර  $A$  වර්තාව එය අඩංගු ක්‍රිස්ටානයකි උපරිම බැඳුම් වර්තාවයි.  $AD$  අගස් ඉහුණත ස්‍රමය සිරස් තරස්කඩයේ ඇතිව කුට්ටිය තබනු ලබයි. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි ස්කන්ධය  $m$  වූ  $P$  අංශුවක්  $A$  ලක්ෂ්‍යයෙහි සිට,  $AB$  දිගේ  $u$  ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබයි; මෙහි  $u^2 = \frac{7ga}{3}$  වේ. කුට්ටියට භාජනය වූ  $P$  හි මන්දනය  $\frac{2u}{3}$  වේ.  $P$  අංශුව  $B$  හරා ලඟා වන විට, කුට්ටියට භාජනය වූ  $P$  අංශුවෙහි ප්‍රවේගය සොයන්න.

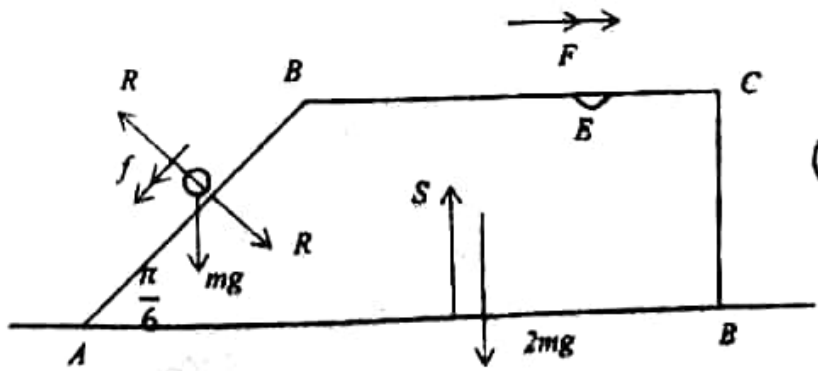
හළු  $E$   $BE = \frac{\sqrt{3}a}{2}$  වන පරිදි කුට්ටියෙහි උඩින් ඉහුණතෙහි  $BC$  මත වූ  $E$  ලක්ෂ්‍යයේ තුඩා සිදුවූ කුට්ටියට භාජනය වූ වලිකය කැලකීමෙන්,  $P$  අංශුව  $E$  හි ඇති සිදුරට වැටෙන බව පෙන්වන්න.



(b) දිග  $a$  වූ කැපැල්ලු අවිකනයක් තත්කුඩයක් එක් කෙළවරක්  $O$  අවල ලක්ෂ්‍යයෙහි ද අනෙක් කෙළවර එක්  $m$  වූ  $P$  අංශුවකට ද ඇඳ ඇත. අංශුව  $O$  ට සිරස් ව පහළින් නික්මලා එල්ලී සිටින අතර එ විකලත්වය  $u = \sqrt{kag}$  වූ සිරස් ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ; මෙහි  $2 < k < 5$  වේ. තත්කුඩ  $\theta$  කෝණයකින් කැපී තවමත් නොබුරුල්ලා සිටින විට අංශුවේ  $v$  වේගය  $v^2 = (k-2)ag + 2ag \cos \theta$  මගින් දෙනු ලැබේ. මෙය පෙන්වන්න.

මෙහි පිහිටීමේ දී තත්කුඩේ ආකෘතිය නොසලකන්න.

$\theta = \alpha$  වන විට තත්කුඩ බුරුල්ල වන බව ආධාරකයක් කරන්න; මෙහි  $\cos \alpha = \frac{2-k}{3}$  වේ.



10

$a(P, W) = f$

$a(W, E) = F$

5

$E = mg$

ඛණ්ඩකයට  $\rightarrow 0 = m(-f \cos \frac{\pi}{6} + F) + 2mF$

15

5

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}f + 3F \Rightarrow \frac{\sqrt{3}f}{6} = F \quad (5)$$

P හඳුනා  $\checkmark$   $mg \cos \frac{\pi}{3} = m \left( f - F \cos \frac{\pi}{6} \right) \quad (10)$

$$\frac{g}{2} = f - \frac{\sqrt{3}f}{2} \Rightarrow \frac{g}{2} = f - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} f \quad (5)$$

$$\Rightarrow f = \frac{2g}{3} \quad (5)$$

කුට්ටියට සාපේක්ෂව B ලක්ෂ්‍යයේදී අංශුවේ ප්‍රවේගය වලිකය  $v$  යැයි ගනිමු.

$v^2 = u^2 + 2as$  භාවිතයෙන්

$$v^2 = u^2 - 2 \left( \frac{2g}{3} \right) a \quad (5)$$

$$= \frac{7ga}{3} - \frac{4ga}{3}$$

$$v = \sqrt{ga} \quad (5)$$

65

AB මුහුණතේ ඉවත්වීමෙන් පසු, කුට්ටියට සාපේක්ෂව අංශුවේ වලිකය සඳහා

$$a(P, W) = a(P, E) + a(E, W)$$

$$= \downarrow g + 0 \quad (\because \text{කුට්ටිය නියත ප්‍රවේගයෙන් වලික වන බැවින්})$$

$$= \downarrow g \quad (10)$$

කුට්ටියේ උඩස් මුහුණතට නැවත ළඟා වීමට P අංශුව තනු ලබන කාලය  $t$  යැයි ගනිමු.

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \text{ යෙදීමෙන්}$$

$$\text{මච්ච} \uparrow 0 = v \sin \frac{\pi}{6} t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (5)$$

$$= \frac{v}{2}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow t = \frac{v}{g} = \sqrt{\frac{a}{g}} \quad (5)$$



R යනු කුට්ටියේ උඩින් මුහුණත මත තිරස් සාපේක්ෂ වීජ්‍ය චාලනය යැයි ගනිමු.

$$R = v \cos \frac{\pi}{6} \cdot t \quad (5)$$

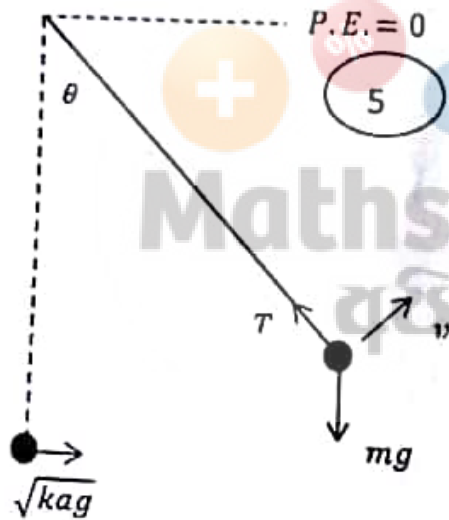
$$R = v \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{g}} = \sqrt{ga} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{g}}$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{3}a}{2} \quad (5)$$

එබැවින් P අංශුව E හි පිදුරට වැටේ.

30

(b)



කින්දී සංස්ථිතී නියමයෙන්:

$$-mga + \frac{1}{2}m(kag) = -mga \cos \theta + \frac{1}{2}mv^2 \quad (15)$$

$$\Rightarrow v^2 = -2ga + kag + 2ag \cos \theta$$

$$v^2 = (k-2)ag + 2ag \cos \theta \quad (5)$$

25

$$F = ma$$

$$T - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{a} \quad (10)$$

$$\Rightarrow T - mg \cos \theta + \frac{m}{a} [(k-2)ag + 2ag \cos \theta]$$

ආකෘතිය:  $T = (k-2)mg + 3mg \cos \theta$ . (5)

ඵරැඳවන වව v නා T දෙකම අවුරෙව.

$$T = mg(3 \cos \theta - 2 + k)$$

(5)  $T = 0$  වව  $3 \cos \theta - 2 + k = 0$

i.e.  $\cos \theta = \frac{2-k}{3}$ . (5)

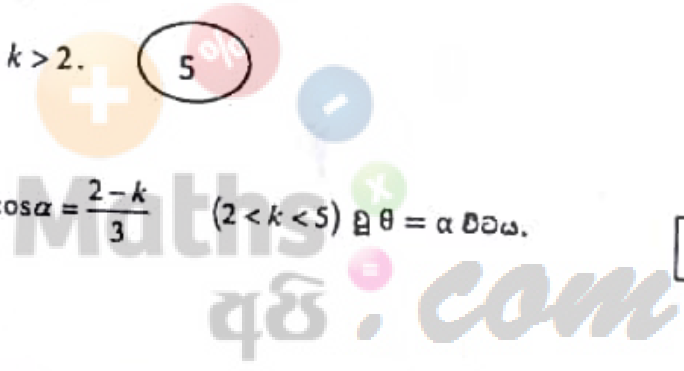
නම  $\cos \theta = \frac{2-k}{3}$ ,

$$v^2 = (k-2)ag + 2ag \frac{(2-k)}{3}$$
$$= \frac{ag}{3} (k-2) > 0 \text{ as } k > 2. \quad (5)$$

එමනිසා කන්කුරු මුරුල් වන්නේ,  $\cos \alpha = \frac{2-k}{3}$  ( $2 < k < 5$ ) මු  $\theta = \alpha$  වවය.

$$\cos \alpha = \frac{2-k}{3} \quad (2 < k < 5).$$

30



13. ස්කන්ධය  $m$  වූ  $P$  අංශුවක් එක එකක ක්වන්ටම් දිග  $a$  හා මාරුකය  $mg/2$  කමෙන් කැබලි 4 ක් ප්‍රමාණයක් සහිත දෙකක කැබලි දෙකකට බැඳී ඇත. එක කැබලියක නිදහස් කැබලිය  $A$  අවම ලක්ෂ්‍යයකට හා අනෙක් කැබලියේ නිදහස් කැබලිය  $A$  ට සිට  $a$  පමණින්  $4a$  දුරින් පිහිටි  $B$  අවම ලක්ෂ්‍යයකට බැඳී ඇත. (වැඩිපමණින්) කන්ද දෙකම නොමැදිලිව,  $A$  ට  $\frac{5a}{2}$  දුරින් කැබලි අංශුව කැබලිකය නිමෙන් මට පෙන්වන්න.

$P$  අංශුව දැන්,  $AB$  හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයට සමවා එම පිහිටීමේ දී නිසලතාවේ පිට පිටුවෙන් මුදාහරිනු ලැබේ. කන්ද දෙකම නොමැදිලිව හා  $AP$  කන්දුවේ දිග  $x$  වන විට,  $\ddot{x} + \frac{2g}{a}(x - \frac{5a}{2}) = 0$  වට පෙන්වන්න.

මෙම සමීකරණය  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  ආකාරයෙන් හැඩගස් විය හැක; මෙහි  $X = x - \frac{5a}{2}$  හා  $\omega^2 = \frac{2g}{a}$  වේ.

$X^2 = \omega^2 (c^2 - X^2)$  සමඟ භාවිතයෙන් මෙම වලිකයේ විස්තාරය  $c$  නොයන්න.

$P$  අංශුව එහි ඔහු ව පිහිටීමට කොට වන මොහොතේ දී  $PB$  කන්දුව සටහන  $C$  වේ. නව වලිකයේ දී  $x = a$  වන විට අංශුව එහි උච්චතම පිහිටීමට කොට වන මට පෙන්වන්න.

$P$  අංශුව  $x = 2a$  හි දී එහි ආරම්භක පිහිටීමේ සිට පහළට  $a$  දුරින් ද විභව අගය  $\frac{a}{2}$  දුරින් ද පහළට පිටු ගනු ලබන මුළු කාලය  $\frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{a}{2g}} (3 + \sqrt{2})$  වේ නම් දුරින් පෙන්වන්න.

සම්පූර්ණ පිහිටීමේ දී,  $x = x_0$  යයි ගනිමු.

එවිට  $\uparrow T_1 = T_2 + mg$

$$\frac{mg}{a}(x_0 - a) = \frac{mg}{a}(4a - x_0 - a) + mg$$

$$x_0 - a = 3a - x_0 + a$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{5a}{2}$$

5

5

5

5



20

$P$  සඳහා  $\downarrow F = ma$  යෙදීමෙන්

$$T_2' + mg - T_1' = m \ddot{x}$$

5

$$\frac{mg}{a}(4a - x - a) + mg - \frac{mg}{a}(x - a) = m \ddot{x}$$

10

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{2g}{a} \left( x - \frac{5a}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{2g}{a} \left( x - \frac{5a}{2} \right) = 0. \quad (5)$$

එවිට  $X = x - \frac{5a}{2}$  හා  $\omega^2 = \frac{2g}{a}$

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0. \quad (5)$$

සරල අනුවර්තීය චලිතයේ කේන්ද්‍රය වන්නේ  $x = \frac{5a}{2}$ . 5

$X^2 = \omega^2 (c^2 - X^2)$ , මෙහි  $c$  යනු වස්ථුවේ විස්ථාරයයි.

$X = -\frac{a}{2}$  විට  $\dot{X} = 0$  වේ. 5

$$0 = \omega^2 \left( c^2 - \frac{a^2}{4} \right) \quad c = \frac{a}{2} \quad (10)$$

$\therefore$  පහතම පිහිටීම  $X = \frac{a}{2} \Rightarrow x = 3a$ . 5

$x = 2a$  විට  $\dot{x} = 0$   
 $x = 2a - \frac{5a}{2}$   
 $= -\frac{a}{2}$

$\dot{x} = 0$  විට  
 $0 = \omega^2 (c^2 - x^2)$   
 $c^2 = x^2$   
 $c = \frac{a}{2}$   
 $x = 2a - \frac{5a}{2}$   
 $= -\frac{a}{2}$

50

PB තත්වයේ කැපීමෙන් පසු

$$\downarrow F = mg$$

$$mg - T = m\ddot{x}$$

$$mg - \frac{mg}{a} (x - a) = m\ddot{x} \quad (5)$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{a} (x - 2a) = 0 \Rightarrow \ddot{Y} + \Omega^2 Y = 0, \text{ මෙහි } Y = x - 2a \text{ හා } \Omega^2 = \frac{g}{a}. \quad (5)$$

$$T = \frac{mg(3a - a - a)}{a}$$

$\uparrow T = mg + m\ddot{y}$   
 $mg \left( \frac{2a - a}{a} \right) + mg = m\ddot{y}$   
 $\ddot{y} = -\frac{g}{a} (a - 2a)$   
 $\ddot{y} = \frac{g}{a}$

එවිට සරල අනුවර්තීය චලිතයේ කේන්ද්‍රය  $x = 2a$ .

$$Y^2 = \Omega^2 (b^2 - Y^2), \text{ මෙහි } b \text{ යනු වස්ථුවේ විස්ථාරයයි.} \quad (5)$$

$$mgy + \frac{1}{2} \frac{mg}{a} (2a)^2 = 0 = mgy(2a) + \frac{1}{2} \frac{mg}{a} (2a)^2$$

$x = 3a$   $\downarrow$   $x = 0$

$x = 3a - 2a$   
 $= a$

$x = 2a$   $(\frac{\pi}{3})$

PB කන්දුව කැපීමෙන් මොහොතකට පසු,  $\dot{Y} = 0$  හෝ  $x = 3a$

5

$\Rightarrow \dot{Y} = 0$  at  $Y = a$ .

5

නව සරල අනුවර්තීය චලිතයේ විස්තාරය  $a$  වේ.

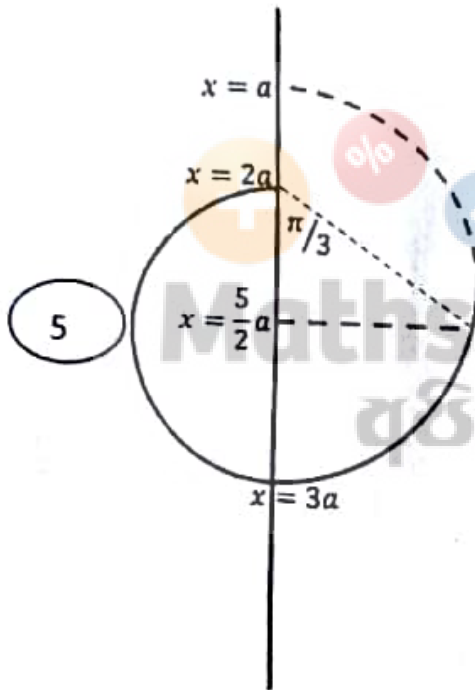
නැවත  $\therefore \dot{Y} = 0$  වන්නේ  $Y = -a \Rightarrow x = a$  වන විටදීය.

5

එනම්  $x = a$  වන විටදීය.

එනම් අංශුව  $x = a$  හිදී උච්චතම පිහිටීමට පැමිණෙයි.

5



10

$x = 2a$  සිට  $x = 3a$  දක්වා කාලය  $\frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{a}{2g}}$

5

$x = 3a$  සිට  $x = \frac{5a}{2}$  දක්වා කාලය  $= \frac{\pi}{3\Omega} = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{a}{g}}$

10

සම්පූර්ණ කාලය  $= \pi \sqrt{\frac{a}{2g}} + \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{a}{g}}$

5

$= \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{a}{2g}} (3 + \sqrt{2})$

5

14 (a)  $OAB$  ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද  $D$  යනු  $AB$  හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යැයි ද  $E$  යනු  $OD$  හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යැයි ද යනි.  $F$  ලක්ෂ්‍යය  $OA$  හි  $AM$  ආසන්න  $DF : FA = 1 : 2$  වන පරිදි ය.  $O$  අනුබද්ධයෙන්  $A$  හා  $B$  හි පිහිටුම් සෛද්ධික දිශාවලින්  $\underline{a}$  හා  $\underline{b}$  වේ.  $\overline{BF}$  හා  $\overline{BE}$  සෛද්ධික  $\underline{a}$  හා  $\underline{b}$  ආසන්නයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.  $B, E$  හා  $F$  එකතේමය බව අපේක්ෂා කර,  $BE : EF$  අනුපාතය සොයන්න.  $\overline{BF} \cdot \overline{DF}$  අදිය ගුණිතය  $|\underline{a}|$  හා  $|\underline{b}|$  ආසන්නයෙන් සොයා,  $|\underline{a}| = 3|\underline{b}|$  නම්,  $\overline{BF}$  යන්න  $\overline{DF}$  ට ලම්බ වන බව පෙන්වන්න.

(b)  $Oxy$  තලයේ දී බල පද්ධතියක් පිළිවෙලින්  $(-a, 2a), (0, a)$  හා  $(-a, 0)$  ලක්ෂ්‍යවල දී ක්‍රියාකරන  $3Pj + 2Pj, 2Pi - Pj$  හා  $-Pi + 2Pj$  යන බල තුනෙන් සමන්විත වේ; මෙහි  $P$  හා  $a$  යනු පිළිවෙලින් නිඛිල හා ඒකාස්‍රිත ඒකිත ලද යන රාශි වේ.  $O$  මූලය වටා, පද්ධතියේ දක්ෂිණාවර්ත ඝූර්ණය,  $12Pa \text{ Nm}$  බව පෙන්වන්න. එය ද පද්ධතිය, විශාලත්වය  $5P \text{ N}$  දූ සහිත මෙහෙයුම්කරු බලයකට තුලා වන බව පෙන්වා, එහි දිශාව හා ක්‍රියා වේගවේග සමීකරණය සොයන්න. දැන්, එකිනෙක බලයක් පද්ධතියට ඇතුළත් කරනු ලබන්නේ නව පද්ධතිය දක්ෂිණාවර්ත ඝූර්ණය  $24Pa \text{ Nm}$  දූ ඝූර්ණයකට තුලා වන පරිදි ය. අනිවාර්ය බලයෙහි විශාලත්වය, දිශාව හා ක්‍රියා වේගවේග සමීකරණය සොයන්න.

(a)  $\overline{OA} = \underline{a}, \overline{OB} = \underline{b}$

$\overline{OF} = \frac{1}{3}\underline{a}$

$\overline{OD} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$  (5)

$\overline{OE} = \frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b})$

$\overline{BE} = \overline{OE} - \overline{OB} = \frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b}) - \underline{b} = \frac{1}{4}(\underline{a} - 3\underline{b})$

(5)

(5)

$\overline{BF} = \overline{OF} - \overline{OB} = \frac{1}{3}\underline{a} - \underline{b} = \frac{1}{3}(\underline{a} - 3\underline{b})$

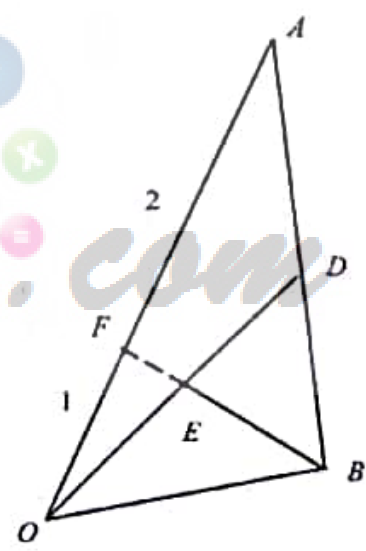
(5)

$\Rightarrow 4\overline{BE} = 3\overline{BF}$

(5)

$B, E, F$  එක රේඛීය වේ යන  $BE : EF = 3 : 1$

(5)



$$\vec{DF} = \vec{OF} - \vec{OD} = \frac{1}{3}\underline{a} - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{6}(\underline{a} + 3\underline{b})$$

$$\vec{BF} \cdot \vec{DF} = \frac{1}{3}(\underline{a} - 3\underline{b}) \cdot \frac{1}{6}(-\underline{a} - 3\underline{b})$$

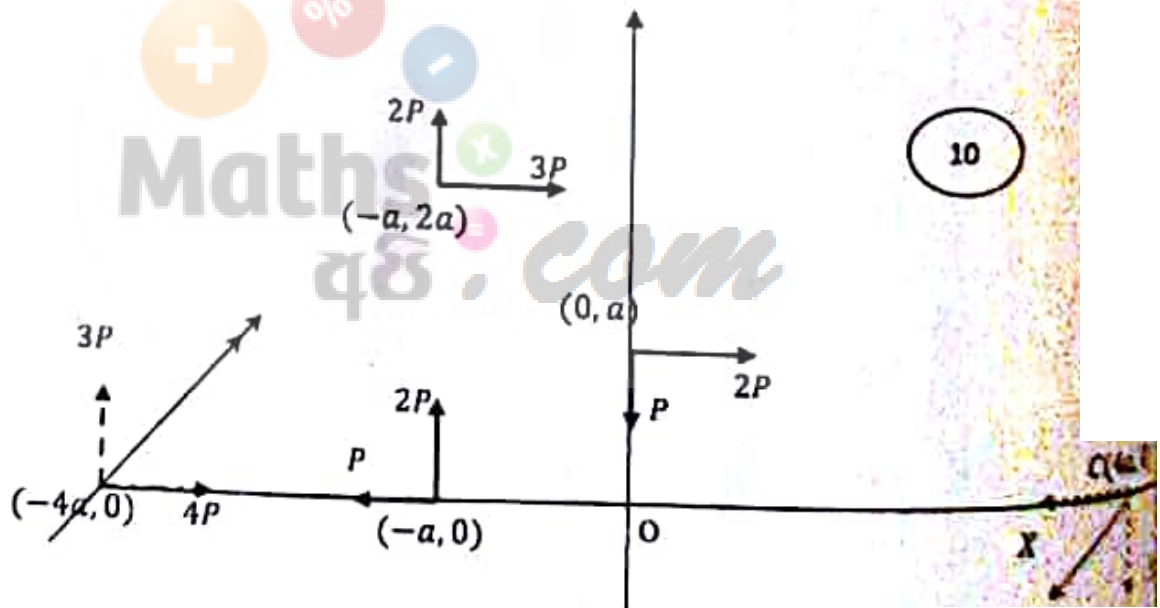
5

$$= -\frac{1}{18}(|\underline{a}|^2 - 9|\underline{b}|^2) = 0, (|\underline{a}| = 3|\underline{b}| \text{ බැවින්})$$

∴ ඒවා නිශ්චලතා බැවින්  $\vec{BF} \perp \vec{DF}$

5

(b)



10

0) එම වාමාවර්තව පූර්ණ ගැනීමෙන්

$$G = 2Pa + 3P \cdot 2a + 2Pa + 2Pa = 12Pa \text{ Nm};$$

10

$$\text{වෛදනයෙන්} \rightarrow X = 3P + 2P - P = 4P$$

5

$$\uparrow Y = 2P + 2P - P = 3P$$

5

R යම් ප්‍රමාණයේ විකාලනය 5P බවින් දෙනු ලැබේ.

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 5P \text{ N}$$

5



ක්‍රියා රේඛාව  $x$ -අක්ෂය සමඟ  $\theta$  කෝණයක් සාදයි, මෙහි  $\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{4}$ .

5

සම්පූර්ණයේ ක්‍රියා රේඛාව  $(-b, 0)$ ,  $(b > 0)$  ලක්ෂ්‍යයේ දී  $x$ -අක්ෂය හමුවේ නම් එවිට

0)

$$7b = 3Pb = 12Pa \Rightarrow b = 4a$$

5

5

සම්පූර්ණයේ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය

$$y - 0 = \frac{3}{4}(x + 4a) \Rightarrow 4y - 3x = 12a$$

10

60

දූන්  $C \equiv (c, 0)$ ,  $c > 0$  ලක්ෂ්‍යයේ දී  $(-4P, -3P)$  බලයක් යෙදීමෙන් පමණක් පද්ධතිය සුක්ෂ්‍යතාව ඉලඳවේ.

5

$$C) \quad 3P(c + 4a) = 24Pa$$

$$\Rightarrow c = 4a$$

10

5

5

ඉම්පර බලයේ විභාලක්ෂ්‍යය  $= 5PN$ , හත එහි දිශාව  $x$ -අක්ෂයේ ඍණ දිශාව සමඟ

5

$$\tan^{-1}\left(\frac{-3P}{-4P}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\text{ඉම්පර බලයේ ක්‍රියා රේඛාව } y - 0 = \frac{3}{4}(x - 4a)$$

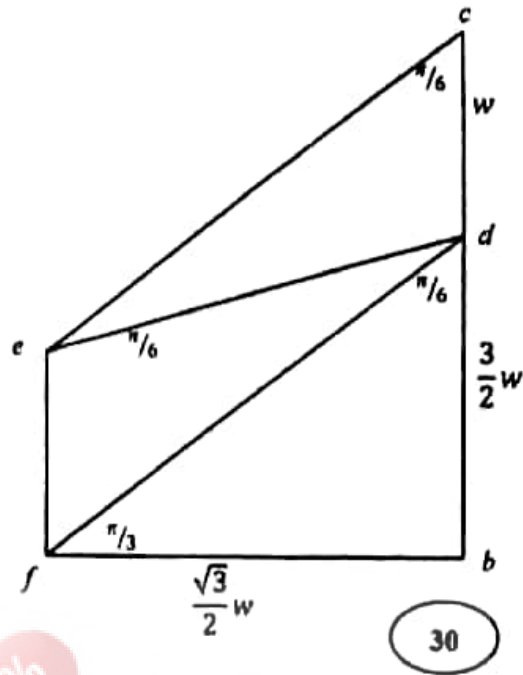
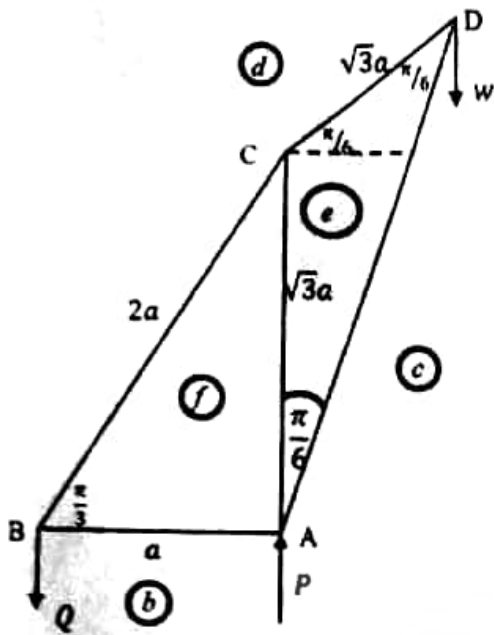
10

$$\Rightarrow 4y - 3x + 12a = 0.$$

40







$$AD = 2(\sqrt{3} a \cos 30^\circ) = 3a$$

$$A) \quad Qa = W AD \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow Q = \frac{3}{2} W$$

$$\uparrow P = Q + W \Rightarrow P = \frac{5}{2} W$$

ഭാഗം	കാമ്പി	അളവ്
AB		$\frac{\sqrt{3}}{2} W$
BC	$\sqrt{3} W$	
AC		$W$
CD	$W$	
AD		$\sqrt{3} W$

30

50

90

16. අරය  $a$  වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලාකාර ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට  $\frac{3}{8}a$  දුරකින් පිහිටා පෙන්වන්න.

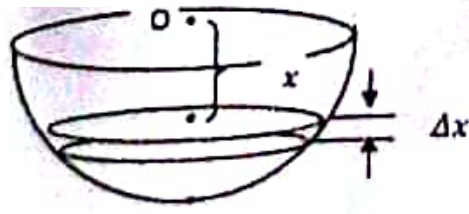
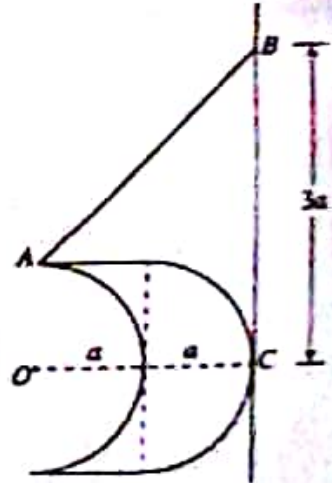
අරය  $a$ , උස  $a$  හා ඝනත්වය  $\rho$  වූ ඒකාකාර ඝන සාදු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයකින් අරය  $a$  වූ අර්ධ ගෝලාකාර කොටසක් කපා ඉවත් කරනු ලැබේ. දැන්, සාබ්ද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සිලින්ඩරයේ අභිවි කොටසෙහි වෘත්තාකාර මුහුණතට අරය  $a$  හා ඝනත්වය  $\lambda\rho$  වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලාකාර වෘත්තාකාර මුහුණත සවි කරනු ලබන්නේ, ඒවායේ සමමිතික අක්ෂ දෙක සමපාත වන පරිදි ය. මෙලෙස සාදාගනු ලබන  $S$  වස්තුවෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, එහි සමමිතික අක්ෂය මත, ගැටියේ  $O$  කේන්ද්‍රයේ සිට  $\frac{(11\lambda + 3)a}{4(2\lambda + 1)}$  දුරකින් පිහිටා පෙන්වන්න.



$\lambda = 2$  යැයි ද  $A$  හෝ  $S$  වස්තුවෙහි වෘත්තාකාර ගැටිය මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් තැබී ද සවිඳි.

මෙම  $S$  වස්තුව එම පිරිස් ඔස්සියිනට එරෙහිව සමතුලිතව තබා ගැනීමේ  $A$  ලක්ෂ්‍යයට හා පිරිස් ඔස්සියින මත වූ  $B$  අවල ලක්ෂ්‍යයට දැඳ දැඳි තැනැල්ලක් වේදානා කරනු ලබන අධාරයෙහි. මෙම සමතුලිත පිටිවීමේ දී  $S$  හි සමමිතික අක්ෂය ඔස්සියිනට ලම්බව පිහිටන අතර  $S$  හි අර්ධ ගෝලාකාර කැණටා  $B$  ලක්ෂ්‍යයට  $3a$  දුරින් පිරිස් ව පහළින් දී  $C$  ලක්ෂ්‍යයේ දී ඔස්සියින ඒකරේඛ කරයි. (සාබ්ද රූපය බලන්න.)  $O, A, B$  හා  $C$  ලක්ෂ්‍ය ඔස්සියිනට ලම්බව පිරිස් කලාකාර පිහිටයි.

$\mu$  යනු ඔස්සියින හා  $S$  හි අර්ධ ගෝලාකාර කැණටා අතර කර්ෂණ සංගුණකය වන විට,  $\mu \geq 3$  බව පෙන්වන්න.



5

සමමිතික අක්ෂයේ කේන්ද්‍රය  $G$ ,  $OA$  මත පිහිටයි.

Q.10. A solid of mass  $M$  is formed by revolving the area bounded by the curve  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$  about the  $y$ -axis.

$$dm = \pi(a^2 - x^2) \rho dx$$

∴

$$M = \frac{\int_0^a \pi(a^2 - x^2) \rho x dx}{\int_0^a \pi(a^2 - x^2) \rho dx} \tag{15}$$

$$= \frac{\int_0^a (a^2 x - x^3) dx}{\int_0^a (a^2 - x^2) dx} = \frac{(a^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}) \Big|_0^a}{(a^2 x - \frac{x^3}{3}) \Big|_0^a} \tag{16}$$

$$\tag{5}$$

$$= \frac{(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4})}{(a^3 - \frac{a^3}{3})} = \frac{1}{2} a$$

∴ The center of mass is at a distance  $\frac{1}{2} a$  from the  $y$ -axis.

$$\tag{5}$$

40





$\rho \times \frac{a}{2} = \frac{2}{3} \rho \pi a^3 \times \frac{3}{4} + \rho \pi a^2 (1 - \frac{3}{4}) \times \frac{a}{2}$   
 $\frac{a}{2} = \frac{3}{4}$

වස්තුව	ස්කන්ධය	ඔරොදු
	$\frac{2}{3} \lambda \pi a^3 \rho$ (5)	$\frac{11}{8} a$ (5)
	$\pi a^3 \rho$ (5)	$\frac{1}{2} a$ (5)
	$\frac{2}{3} \pi a^3 \rho$ (5)	$\frac{3}{8} a$ (5)
	$(\frac{2}{3} \lambda + \frac{1}{3}) a^3 \rho$ (5)	$\bar{x}$

සමස්ත බරින් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමස්ත ගුණිතය මත පිහිටයි.

(5)

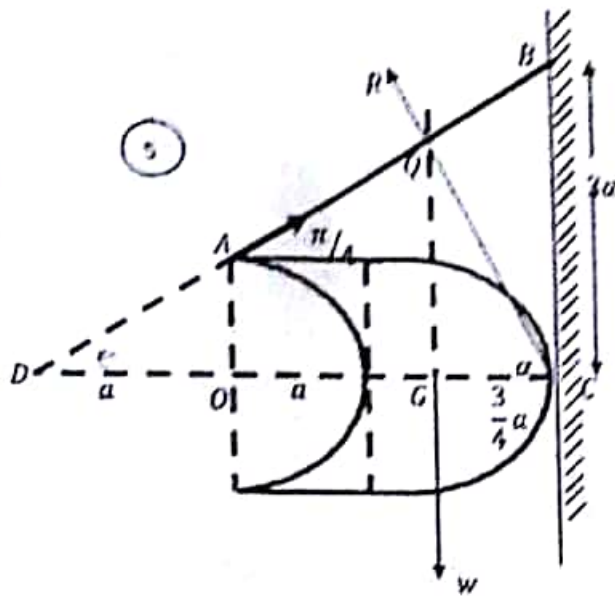
$$\frac{1}{3} (2\lambda + 1) \pi a^3 \rho \bar{x}_1 = \frac{11}{8} a \times \frac{2}{3} \pi a^3 \lambda \rho + \frac{a}{2} \times \pi a^3 \rho - \frac{3}{8} a \times \frac{2}{3} \pi a^3 \rho$$

(උදාහරණය -  $\frac{2}{3} \rho \pi a^3$  &  $\frac{2}{3} \rho \pi a^3$ ) ආදිය

$$\frac{1}{3} (2\lambda + 1) \bar{x} = \frac{11}{8} a \times \frac{2\lambda}{3} + \frac{a}{2} - \frac{3a}{8} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{11\lambda}{12} a + \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{1}{12} (11\lambda + 3) a$$

$$\bar{x} = \frac{(11\lambda + 3) a}{4(2\lambda + 1)} \quad (10)$$



$\lambda = 2$  or

$\bar{x} = \frac{5a}{4}$

αβγδεζηθικλμ

$\mu \geq \tan \alpha = \frac{QG}{GC} = \frac{\frac{9a}{4}}{\frac{3a}{4}} = 3$

$\therefore \mu \geq 3$

35

$R = \frac{W}{2}$

$F \sin \theta = W - F - R$

$\theta = 2\alpha$   
 $R = \frac{W}{2}$

$\sum \tau = 0$   
 $W(2a - \bar{x}) = 0$   
 $\bar{x} = \frac{3a}{4}$   
 $W(2a - \frac{3a}{4}) = 0$   
 $W(\frac{5a}{4}) = 0$

$T \sin \theta = \frac{W - F}{R}$

$F + 2a - W \times \frac{3}{4} - R a = 0$   
 $2F - R = \frac{5W}{4}$

$W \times \pi(2a - \bar{x}) = R + 3a$   
 $R = \frac{W}{4}$

$F = \frac{3W}{4}$