

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව  
 இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம்  
 Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka  
 இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரīட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரīட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரīட்சைத் திணைக்களம்

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙල) විභාගය, 2021(2022)  
 கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தரப் பரீட்சை, 2021(2022)  
 General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2021(2022)

සංයුක්ත ගණිතය I  
 இணைந்த கணிதம் I  
 Combined Mathematics I

10 T I

පැය තුනයි  
 மூன்று மணித்தியாலம்  
 Three hours

අමතර කියවීමේ කාලය - මිනිත්තු 10 යි  
 மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்  
 Additional Reading Time - 10 minutes

வினாத்தாளை வாசித்து, வினாக்களைத் தெரிவுசெய்வதற்கும் விடை எழுதும்போது முன்னுரிமை வழங்கும் வினாக்களை ஒழுங்கமைத்துக் கொள்வதற்கும் மேலதிக வாசிப்பு நேரத்தைப் பயன்படுத்துக.

சுட்டெண்

அறிவுறுத்தல்கள் :

- \* இவ்வினாத்தாள் பகுதி A (வினாக்கள் 1 - 10), பகுதி B (வினாக்கள் 11 - 17) என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டது.
- \* பகுதி A : எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்குமுரிய உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- \* பகுதி B : ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக. உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள தாள்களில் எழுதுக.
- \* ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி A இன் விடைத்தாளானது பகுதி B இன் விடைத்தாள்களுக்கு மேலே இருக்கக்கூடாக, இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
- \* வினாத்தாளின் பகுதி B ஐ மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்கு மாத்திரம்

(10) இணைந்த கணிதம் I		
பகுதி	வினா எண்	புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

இலக்கத்தில்	மொத்தம்
எழுத்தில்	

குறியீட்டெண்கள்	
விடைத்தாள் பரீட்சகர்	
பரிசீலித்தவர்:	1
	2
மேற்பார்வை செய்தவர்:	

## பகுதி A

1. கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, எல்லா  $n \in \mathbb{Z}^+$  இற்கும்  $\sum_{r=1}^n (6r+1) = n(3n+4)$  என நிறுவுக.

2. ஒரே வரிப்படத்தில்  $y=2|x+1|$ ,  $y=2-|x|$  ஆகியவற்றின் வரைபுகளைப் பார்ப்பதாக வரைக. இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, சமனிலி  $2|x+2|+|x| \leq 4$  ஐத் திருப்தியாக்கும்  $x$  இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களையும் காண்க.

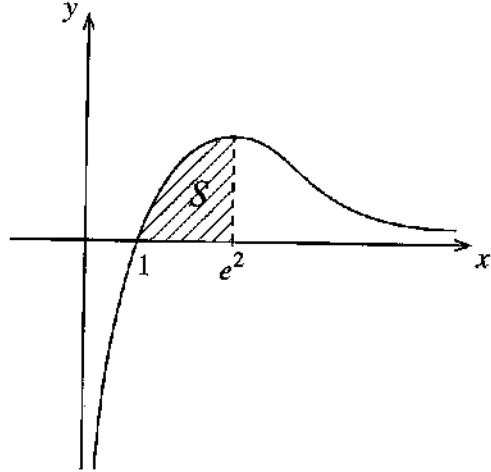
3. ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில்,  $\text{Arg}(z-1-i) = -\frac{\pi}{4}$  ஐத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள்  $z$  ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கைப் படும்படியாக வரைக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக,  $\text{Arg}(iz+1-i) = \frac{\pi}{4}$  ஐத் திருப்தியாக்கும்  $|z-2+i|$  இன் இழிவுப் பெறுமானம்  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  எனக் காட்டுக.

4.  $k > 0$  எனக் கொள்வோம்.  $(x^2 + \frac{k}{x})^{11}$  இன் ஈறுப்பு விரியில் உள்ள  $x^7$  இன் குணகமும்  $(x - \frac{1}{x^2})^{11}$  இன் ஈறுப்பு விரியில் உள்ள  $x^{-7}$  இன் குணகமும் சமமெனத் தரப்பட்டுள்ளது.  $k=1$  எனக் காட்டுக.

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})} = 4$  எனக் காட்டுக.

6.  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ,  $y=0$ ,  $x=e^2$  ஆகிய வளைவிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசம்  $S$  எனக் கொள்வோம்.  $S$  இன் பரப்பளவு 4 சதுர அலகுகளெனக் காட்டுக. பிரதேசம்  $S$  ஆனது  $x$ -அச்சைப் பற்றி  $2\pi$  ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றப்படுகின்றது. இவ்வாறு பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு  $\frac{8\pi}{3}$  எனக் காட்டுக.



7.  $t \neq 0$  இற்கு  $x = ct$ ,  $y = \frac{c}{t}$  ஆகியவற்றினால் பரமானமுறையாகத் தரப்படும் செங்கோண அதிபரவளைவுக்குப் புள்ளி  $P \equiv \left( cp, \frac{c}{p} \right)$  இல் உள்ள தொடலிக் கோட்டின் சமன்பாடு  $x + p^2y = 2cp$  எனக் காட்டுக. இவ்வதிபரவளைவுக்குப்  $P$  இல் உள்ள செவ்வன் கோடு அதிபரவளைவை வேறொரு புள்ளி  $Q \equiv \left( cq, \frac{c}{q} \right)$  இல் மறுபடியும் சந்திக்கின்றது.  $p^3q = -1$  எனக் காட்டுக.

8.  $A \equiv (0, -1)$  எனவும்  $B \equiv (9, 8)$  எனவும் கொள்வோம்.  $AB$  மீது புள்ளி  $C$  ஆனது  $AC:CB = 1:2$  ஆக இருக்குமாறு உள்ளது.  $C$  இனூடாக  $AB$  இற்குச் செங்குத்தாக உள்ள நேர்கோடு  $l$  இன் சமன்பாடு  $x + y - 5 = 0$  எனக் காட்டுக.  $AD$  ஆனது நேர்கோடு  $y = 5x + 1$  இற்குச் சமாதரமாக இருக்குமாறு  $l$  மீது உள்ள புள்ளி  $D$  எனக் கொள்வோம்.  $D$  இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

9. நிற்கோடு  $x + 2y = 3$  ஆனது வட்டம்  $S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$  ஐ இரு வேறுவேறான புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றதெனக் காட்டுக.  
இவ்விரு புள்ளிகளினூடாகவும் வட்டம்  $S = 0$  இன் மையத்தினூடாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10.  $2\cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 1$  ஐ வடிவம்  $R \cos(2x - \alpha)$  இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு  $R > 0$  உம்  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  உம் ஆகும்.  
இதிலிருந்து, சமன்பாடு  $\cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = 1$  ஐத் தீர்க்க.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව  
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம்  
Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka  
ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව  
இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம்  
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාග, 2021(2022)  
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2021(2022)  
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2021(2022)

සංයුක්ත ගණිතය I  
இணைந்த கணிதம் I  
Combined Mathematics I

10 T I

பகுதி B

\* ඔබතු විභාගකරුන්ට මාත්තීරම විඳා ආශ්‍රිතය.

11. (a)  $k > 1$  எனக் கொள்வோம். சமன்பாடு  $x^2 - 2(k+1)x + (k-3)^2 = 0$  இற்கு வேறுவேறான மெய்ம் மூலங்கள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக.

$\alpha, \beta$  ஆகியன இம்மூலங்களெனக் கொள்வோம்.  $\alpha + \beta, \alpha\beta$  ஆகியவற்றை  $k$  இல் எழுதி,  $\alpha, \beta$  ஆகிய இரண்டும் நேராக இருக்குமாறு  $k$  இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இப்போது  $1 < k < 3$  எனக் கொள்வோம்.  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{\beta}}$  ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை  $k$  இல் காண்க.

(b)  $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$  எனவும்  $g(x) = x^3 + cx^2 + ax + 1$  எனவும் கொள்வோம்; இங்கு  $a, b, c \in \mathbb{R}$  ஆகும்.  $f(x)$  ஆனது  $(x-1)$  இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி 5 எனவும்  $g(x)$  ஆனது  $x^2 + x - 2$  இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி  $x+1$  எனவும் தரப்பட்டுள்ளது.  $a, b, c$  ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

மேலும்  $a, b, c$  ஆகியவற்றுக்கான இப்பெறுமானங்களுடன் எல்லா  $x \in \mathbb{R}$  இற்கும்  $f(x) - 2g(x) \leq \frac{13}{12}$  எனக் காட்டுக.

12. (a) கீழே தரப்பட்டுள்ள 10 இலக்கங்களிலிருந்தும் எடுக்கப்படும் 4 இலக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு 4 இலக்க எண்ணை அமைக்க வேண்டியுள்ளது :

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5

(i) தெரிந்தெடுக்கப்படும் எல்லா 4 இலக்கங்களும் வேறுபட்டனவாக இருப்பின்,

(ii) எந்த 4 இலக்கங்களும் தெரிந்தெடுக்கப்படலாமெனின்,

அமைக்கத்தக்க அத்தகைய வேறுபட்ட 4 இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(b)  $r \in \mathbb{Z}^+$  இற்கு  $U_r = \frac{-16r^3 + 12r^2 + 40r + 9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$  எனக் கொள்வோம்.

$r \in \mathbb{Z}^+$  இற்கு  $U_r = \frac{A(r-1)}{(2r+1)^2} - \frac{(r-B)}{(2r-1)^2}$  ஆக இருக்கத்தக்கதாக  $A, B$  ஆகிய மெய்ம் மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைத் துணிக.

இதிலிருந்து,  $r \in \mathbb{Z}^+$  இற்கு  $\frac{1}{5^{r-1}} U_r = f(r) - f(r-1)$  ஆக இருக்கத்தக்கதாக  $f(r)$  ஐக் கண்டு.

$n \in \mathbb{Z}^+$  இற்கு  $\sum_{r=1}^n \frac{1}{5^{r-1}} U_r = 1 + \frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}$  எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர்  $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{5^{r-1}} U_r$  ஒருங்குகின்றதென உய்த்தறிந்து, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

13. (a)  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$  எனவும்  $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  எனவும் கொள்வோம்; இங்கு  $a \in \mathbb{R}$ .

மேலும்  $C = AB^T$  எனவும் கொள்வோம்.  $C$  ஐ  $a$  இற் கண்டு, எல்லா  $a \neq 0$  இற்கும்  $C^{-1}$  இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

$C^{-1}$  இருக்கும்போது அதனை  $a$  இல் எழுதுக.

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix} \text{ எனின், } a = 2 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$a$  இற்கான இப்பெறுமானத்துடன்  $DC - C^T C = 8I$  ஆக இருக்கத்தக்கதாகத் தாயம்  $D$  ஐக் காண்க; இங்கு  $I$  ஆனது வரிசை 2 ஆகவுள்ள சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமாகும்.

(b)  $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$  எனவும்  $z_2 = 1 + i$  எனவும் கொள்வோம்.  $\frac{z_1}{z_2}$  ஐ வடிவம்  $x + iy$  இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு  $x, y \in \mathbb{R}$ .

மேலும்  $z_1, z_2$  ஆகிய சிக்கலெண்கள் ஒவ்வொன்றையும் வடிவம்  $r(\cos \theta + i \sin \theta)$  இல் எடுத்துரைக்க;

இங்கு  $r > 0$  உம்  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  உம் ஆகும். இதிலிருந்து,  $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$  எனக் காட்டுக.

$$\cos \left( \frac{\pi}{12} \right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ என உய்த்தறிக.}$$

(c)  $n \in \mathbb{Z}^+$  எனவும்  $k \in \mathbb{Z}$  இற்கு  $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$  எனவும் கொள்வோம்.

த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி,  $(1 + i \tan \theta)^n = \sec^n \theta (\cos n\theta + i \sin n\theta)$  எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து,  $(1 - i \tan \theta)^n$  இற்கு ஓர் இயல்பொத்த கோவையைப் பெற்று,

$$(1 + i \tan \theta)^n + (1 - i \tan \theta)^n = 2 \sec^n \theta \cos n\theta \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$$z = i \tan \left( \frac{\pi}{10} \right) \text{ ஆனது } (1+z)^{25} + (1-z)^{25} = 0 \text{ இன் ஒரு தீர்வென உய்த்தறிக.}$$

14. (a)  $x \neq 0, 2$  இற்கு  $f(x) = \frac{4x+1}{x(x-2)}$  எனக் கொள்வோம்.

$$x \neq 0, 2 \text{ இற்கு } f(x) \text{ இன் பெறுதி } f'(x) \text{ ஆனது } f'(x) = -\frac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2} \text{ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.}$$

இதிலிருந்து,  $f(x)$  அதிகரிக்கும் ஆயிடைகளையும்  $f(x)$  குறையும் ஆயிடைகளையும் காண்க.

அணுகுகோடுகள்,  $x$ -வெட்டுத்துண்டு, திரும்பற் புள்ளிகள் ஆகியவற்றைக் காட்டி  $y = f(x)$  இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

இவ்வரைபைப் பயன்படுத்திச் சமனிலி  $f(x) + |f(x)| > 0$  ஐத் திருப்தியாக்கும்  $x$  இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.

(b) இங்கு உள்ள உருவில் நிழற்றப்பட்டுள்ள பிரதேசம்

$S$  ஆனது ஒரு செவ்வகத்தையும் ஒவ்வொன்றும் மையத்தில் கோணம்  $\frac{3\pi}{8}$  ஐ எதிரமைக்கும்

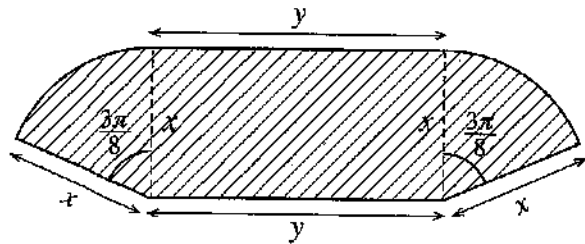
ஒரு வட்டத்தின் இரு ஆரைச்சிறைகளையும் கொண்ட ஒரு தோட்டத்தைக் காட்டுகின்றது.

அதன் பரிமாணங்கள் மீற்றரில் உருவிற்கு காட்டப்பட்டுள்ளன.  $S$  இன் பரப்பளவு  $36 \text{ m}^2$  எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$S$  இன் சுற்றளவு  $p \text{ m}$  ஆனது

$$x > 0 \text{ இற்கு } p = 2x + \frac{72}{x} \text{ இனால் தரப்படுகின்றது}$$

எனவும்  $x = 6$  ஆக இருக்கும்போது  $p$  இழிவு எனவும் காட்டுக.





15. (a) எல்லா  $x \in \mathbb{R}$  இற்கும்  $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = A(x^2 + 1)^2 + Bx(x^2 + 1) + Cx^2$  ஆக இருக்கத்தக்கதாக  $A, B, C$  ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து,  $\frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x(x^2 + 1)^2}$  ஐப் பகுதிப் பின்னங்களில் எழுதி,

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x(x^2 + 1)^2} dx \text{ ஐக் காண்க.}$$

- (b)  $I = \int_0^{\frac{1}{4}} \sin^{-1}(\sqrt{x}) dx$  எனக் கொள்வோம்.  $I = \frac{\pi}{24} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$  எனக் காட்டி, இதிலிருந்து,  $I$  இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

- (c)  $\frac{d}{dx}(x \ln(x^2 + 1) + 2 \tan^{-1} x - 2x) = \ln(x^2 + 1)$  எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து,  $\int \ln(x^2 + 1) dx$  ஐக் கண்டு,  $\int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2}(\ln 4 + \pi - 4)$  எனக் காட்டுக.

$a$  ஒரு மாறிலியாகவுள்ளபோது பேறு  $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$  ஐப் பயன்படுத்தி

$$\int_0^1 \ln[(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)] dx \text{ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.}$$

16.  $P \equiv (x_1, y_1)$  எனவும்  $l$  ஆனது  $ax + by + c = 0$  இனால் தரப்படும் நேர்கோடு எனவும் கொள்வோம். புள்ளி  $P$  இனூடான  $l$  இற்குச் செங்குத்தான கோடு மீது உள்ள புள்ளி எதனும் ஆள்கூறுகள்  $(x_1 + at, y_1 + bt)$  இனால் தரப்படுகின்றனவெனக் காட்டுக; இங்கு  $t \in \mathbb{R}$ .

$P$  இலிருந்து  $l$  இற்குள்ள செங்குத்துத் தூரம்  $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  என உய்த்தறிக.

$l$  ஆனது நேர்கோடு  $x + y - 2 = 0$  எனக் கொள்வோம்.  $A \equiv (0, 6)$ ,  $B \equiv (3, -3)$  ஆகிய புள்ளிகள்  $l$  இன் இரு பக்கங்களிலும் இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக.

$l$  இற்கும் கோடு  $AB$  இற்குமிடையே உள்ள கூர்ங்கோணத்தைக் காண்க.

$l$  ஐத் தொடுவனவும் முறையே  $A, B$  ஆகிய மையங்களைக் கொண்டனவுமான  $S_1, S_2$  என்னும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$l$  இனதும் கோடு  $AB$  இனதும் வெட்டுப் புள்ளி  $C$  எனக் கொள்வோம். புள்ளி  $C$  இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$S_1, S_2$  ஆகியவற்றுக்கு  $C$  இனூடாக உள்ள மற்றைய பொதுத் தொடலியின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

உற்பத்தியினூடாகச் செல்வதும்  $S_1$  இன் பரிதியை இருகூறிடுவதும்  $S_2$  இற்கு நிமிர்கோணமானதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு  $3x^2 + 3y^2 - 38x - 22y = 0$  எனக் காட்டுக.

17. (a)  $\cos(A+B)$ ,  $\cos(A-B)$  ஆகியவற்றை  $\cos A$ ,  $\cos B$ ,  $\sin A$ ,  $\sin B$  ஆகியவற்றில் எழுதுக.

இதிலிருந்து,  $\cos C + \cos D = 2 \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$  எனக் காட்டுக.

$\cos C - \cos D = -2 \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$  என உய்த்தறிக.

சமன்பாடு  $\cos 9x + \cos 7x + \cot x (\cos 9x - \cos 7x) = 0$  ஐத் தீர்க்க.

(b) வழக்கமான குறிப்பீட்டில், ஒரு முக்கோணி  $ABC$  இற்குக் கோசைன் நெறியைக் கூறி நிறுவுக.

$n \in \mathbb{Z}$  இற்கு  $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$  எனக் கொள்வோம்.  $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$  எனக் காட்டுக.

ஒரு முக்கோணி  $ABC$  இல்  $AB = 20$  cm,  $BC = 10$  cm,  $\sin 2B = \frac{24}{25}$  எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

அத்தகைய இரு வேறுவேறான முக்கோணிகள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டி, ஒவ்வொன்றுக்கும்  $AC$  இன் நீளத்தைக் காண்க.

(c) சமன்பாடு  $\sin^{-1}\left[(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}\right] + \tan^{-1}(e^x) = \tan^{-1}(2)$  ஐத் தீர்க்க.

\*\*\*

AL/2021(2022)/10/T-II

கனவு உரிமைகள் அனைத்து/முழுப் பதிப்புரிமையுடையது/All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව  
 இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம்  
 Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka  
 ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව  
 இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரīட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரīட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரīட்சைத் திணைக்களம்

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2021(2022)  
 கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2021(2022)  
 General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2021(2022)

සමස්ත ගණිතය II  
 இணைந்த கணிதம் II  
 Combined Mathematics II

10 T II

පැය තුනයි  
 மூன்று மணித்தியாலம்  
 Three hours

අමතර කියවීමේ කාලය - මිනිත්තු 10 යි  
 மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்  
 Additional Reading Time - 10 minutes

வினாத்தாளை வாசித்து, வினாக்களைத் தெரிவுசெய்வதற்கும் விடை எழுதும்போது முன்னுரிமை வழங்கும் வினாக்களை ஒழுங்கமைத்துக் கொள்வதற்கும் மேலதிக வாசிப்பு நேரத்தைப் பயன்படுத்துக.

கட்டெண்

அறிவுறுத்தல்கள் :

- \* இவ்வினாத்தாள் பகுதி A (வினாக்கள் 1 - 10), பகுதி B (வினாக்கள் 11 - 17) என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டது.
- \* பகுதி A: எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்குமுரிய உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- \* பகுதி B: ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக. உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள தாள்களில் எழுதுக.
- \* ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி A இன் விடைத்தாளானது பகுதி B இன் விடைத்தாள்களுக்கு மேலே இருக்கக்கத்தக்கதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
- \* வினாத்தாளின் பகுதி B ஐ மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.
- \* இவ்வினாத்தாளில் 8 ஆனது புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகலைக் குறிக்கின்றது.

பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்கு மாத்திரம்

(10) இணைந்த கணிதம் II		
பகுதி	வினா எண்	புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

மொத்தம்

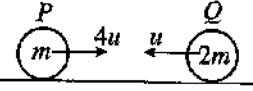
இலக்கத்தில்	
எழுத்தில்	

குறியீட்டெண்கள்

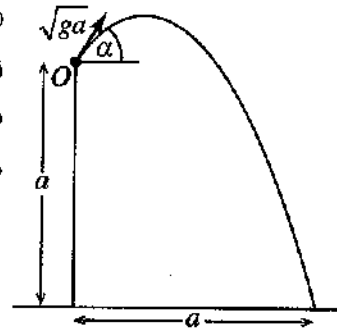
விடைத்தாள் பரீட்சகர்	
பரிசீலித்தவர்:	1
	2
மேற்பார்வை செய்தவர்	

## பகுதி A

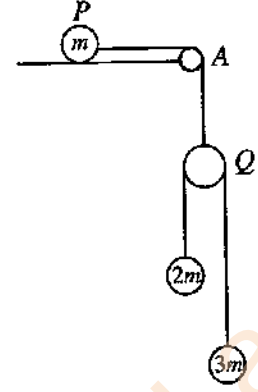
1. திணிவு  $m$  ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை  $P$  உம் திணிவு  $2m$  ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை  $Q$  உம் ஒரே ஒப்பமான கிடை மேசை மீது ஒரே நேர்கோட்டின் வழியே ஒன்றையொன்று நோக்கி முறையே  $4u, u$  என்னும் கதிகளுடன் இயங்கி நேரடியாக மோதுகின்றன.  $P$  இற்கும்  $Q$  இற்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம்  $\frac{4}{5}$  ஆகும். மோதுகைக்குப் பின்னர்  $P$  உம்  $Q$  உம் ஒன்றிலிருந்தொன்று எதிர்த் திசைகளில் இயங்குகின்றனவெனக் காட்டுக.  
மோதுகைக்குப் பின்னர்  $P$  உம்  $Q$  உம் ஒன்றுக்கொன்று இடைத்தூரம்  $a$  இல் இருப்பதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.



2. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஒரு கிடைத் தரைக்கு மேலே நிலைக்குத்துத் தூரம்  $a$  இல் உள்ள ஒரு புள்ளி  $O$  இலிருந்து ஒரு துணிக்கை கிடையுடன் கோணம்  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) இல் தொடக்க வேகம்  $\sqrt{ga}$  உடன் எறியப்படுகின்றது. துணிக்கை புள்ளி  $O$  இலிருந்து கிடைத் தூரம்  $a$  இல் தரையில் அடிக்கின்றது.  $\tan \alpha = 1 + \sqrt{2}$  எனக் காட்டுக.

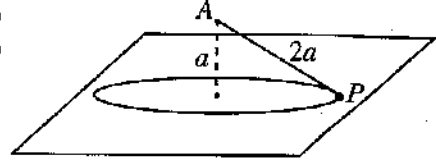


3. திணிவு  $m$  ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை  $P$  ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது வைக்கப்பட்டு, மேசையின் ஓரத்தின் புள்ளி  $A$  இல் நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஒரு நிலைத்த சிறிய ஒப்பமான கப்பிக்கு மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் ஓர் இலேசான ஒப்பமான கப்பி  $Q$  உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. உருவிற காட்டப்பட்டுள்ளவாறு கப்பி  $Q$  இற்கு மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால்  $2m$ ,  $3m$  என்னும் திணிவுகளை உடைய துணிக்கைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கைகளும் இழைகளும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இருக்கின்றன. இழைகள் இறுக்கமாக இருக்கத் தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது.  $Q$  இன் ஆர்முடுகலைத் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக.



4.  $M$  kg திணிவுள்ள ஒரு கார் கிடையுடன் சாய்வு  $\sin^{-1}\left(\frac{1}{20}\right)$  ஐக் கொண்ட ஒரு நேர் வீதி வழியே ஒரு மாறா ஆர்முடுகலுடன் மேல்நோக்கி இயங்குகின்றது. அதன் இயக்கத்திற்கு ஒரு மாறாத் தடை  $RN$  உள்ளது. அது தன் கதியை  $36 \text{ km h}^{-1}$  இலிருந்து  $72 \text{ km h}^{-1}$  இற்கு அதிகரிக்கச் செய்வதற்குக் கார் சென்ற தூரம்  $500 \text{ m}$  ஆகும். அதன் கதி  $54 \text{ km h}^{-1}$  ஆக இருக்கும்போது கார் உருற்றிய வலுவைத் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

5. நீளம்  $2a$  ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசைக்கு நிலைக்குத்தாக மேலே தூரம்  $a$  இல் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி  $A$  உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் மற்றைய நுனியுடன் இணைக்கப்பட்ட திணிவு  $m$  ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை  $P$  ஆனது இழை இறுக்கமாக இருக்க மேசை

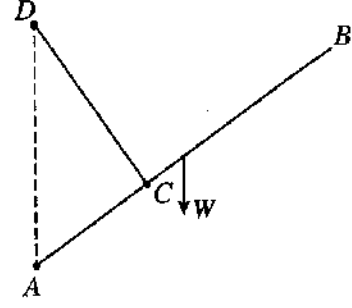


மீது ஒரு கிடை வட்டத்தில் சீரான கதி  $\sqrt{\frac{ga}{2}}$  உடன் இயங்குகின்றது (உருவைப் பார்க்க). மேசையின் மூலம் துணிக்கை  $P$  மீது பிரயோகிக்கப்படும் செவ்வன் மறுதாக்கத்தின் பருமன்  $\frac{5}{6}mg$  எனக் காட்டுக.

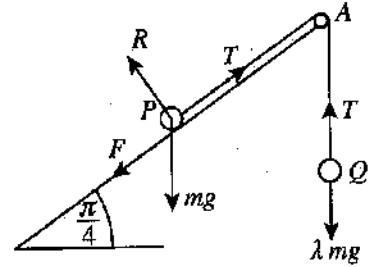
6. வழக்கமான குறிப்பீட்டில், ஒரு நிலைத்த உற்பத்தி  $O$  பற்றி  $A, B$  என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே  $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$  ஆகும்.  $\vec{AO} \cdot \vec{AB}$  ஐப் பயன்படுத்தி  $\hat{OAB}$  ஐக் காண்க.  $C$  ஆனது  $OA$  மீது  $\hat{OCB} = \frac{\pi}{2}$  ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளி எனக் கொள்க.  $\vec{OC}$  ஐக் காண்க.



7. நீளம்  $8a$  ஐயும் நிறை  $W$  ஐயும் உடைய ஒரு சீரான கோல்  $AB$  இன் முனை  $A$  ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. நீளம்  $4a$  ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி கோல் மீது  $AC = 3a$  ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளி  $C$  உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை மற்றைய நுனி  $A$  இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே  $AD = 5a$  ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி  $D$  உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல்  $AB$  இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடைக் கூறையும் காண்க.



8. கிடைப்புடன் கோணம்  $\frac{\pi}{4}$  இற் சாய்ந்த ஒரு கரடான தளத்தின் மீது திணிவு  $m$  ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை  $P$  வைக்கப்பட்டுள்ளது. உருவிற காட்டப்பட்டுள்ளவாறு சாய்தளத்தின் ஓரத்திலே  $A$  இல் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான சிறிய கப்பிக்கு மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி துணிக்கை  $P$  உடனும் மற்றைய நுனி திணிவு  $\lambda mg$  ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை  $Q$  உடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை  $P$  இற்கும் சாய்தளத்திற்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம்  $\frac{1}{2}$  ஆகும். கோடு  $PA$  ஆனது சாய்தளத்தின் ஓர் அதியுயர் சரிவுக்கோடாக இருக்கும் அதே வேளை இழை இறுக்கமாக இருக்க  $P, Q$  ஆகிய இரு துணிக்கைகளும் நாப்பத்தில் இருக்கின்றன.



$\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \lambda \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}$  எனக் காட்டுக. (உரிய விசைகள் உருவிற குறிக்கப்பட்டுள்ளன.)

9.  $A, B$  ஆகியன ஒரு மாதிரி வெளி  $\Omega$  இன் இரு சாரா நிகழ்வுகளெனக் கொள்வோம். வழக்கமான குறிப்பீட்டில்,  $P(A) = \frac{1}{5}$  எனவும்  $P(B) = \frac{3}{4}$  எனவும் தரப்பட்டுள்ளது.  $P(A \cup B)$ ,  $P(A|A \cup B)$ ,  $P(B|A')$  ஆகியவற்றைக் காண்க; இங்கு  $A'$  ஆனது  $A$  இன் நிரப்பு நிகழ்வைக் குறிக்கின்றது.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. நேர் நிறைவேண்களின் ஐந்து நோக்கல்களின் ஒரு தொடையின் இடை 6 உம் வீச்சு 10 உம் ஆகும். அதற்கு இரு ஆகாரங்கள் உள்ளன. இடையம் ஆகாரங்களிலிருந்து வேறுபடுமெனின், ஐந்து நோக்கல்களையும் காண்க.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව  
 இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம்  
 Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka  
 ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව  
 இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம்  
 Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2021(2022)  
 கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2021(2022)  
 General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2021(2022)

සංයුක්ත ගණිතය II  
 இணைந்த கணிதம் II  
 Combined Mathematics II

10 T II

பகுதி B

\* ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

(இவ்வினாத்தாளில் 8 ஆனது புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகலைக் குறிப்பிடுகின்றது.)

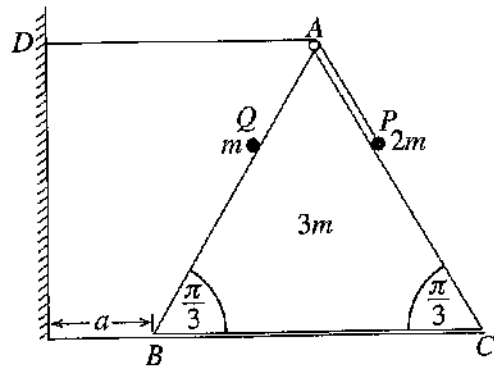
11.(a) ஒரு புள்ளி  $O$  இலிருந்து நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி வேகம்  $u \text{ m s}^{-1}$  உடன் எறியப்படும் ஒரு துணிக்கை  $P$  ஆனது 4 செக்கன்களுக்குப் பின்னர் ஒரு புள்ளி  $A$  ஐ அடையும் அதே வேளை மேலும் 2 செக்கன்களுக்குப் பின்னர் மறுபடியும்  $A$  இற்கு வருகின்றது. துணிக்கை  $P$  இரண்டாம் தடவை  $A$  இல் இருக்கும் கணத்தில் வேறொரு துணிக்கை  $Q$  ஆனது  $O$  இலிருந்து நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி அதே வேகம்  $u \text{ m s}^{-1}$  உடன் எறியப்படுகின்றது.  $P$ ,  $Q$  ஆகியவற்றின் இயக்கங்களுக்கான வேக-நேர வரைபை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக. இதிலிருந்து,  $g$  இல்  $u$  இன் பெறுமானத்தையும்  $OA$  இன் உயரத்தையும்  $P$  உடன் மோதுவதற்கு  $Q$  எடுக்கும் நேரத்தையும் காண்க.

(b) ஒரு கப்பல்  $S$  நிலம் தொடர்பாகச் சீரான கதி  $u \text{ km h}^{-1}$  உடன் வடக்கு நோக்கிச் செல்கின்றது. ஒரு குறித்த கணத்தில்  $S$  இலிருந்து கிழக்கே  $d \text{ km}$  தூரத்தில் ஒரு படகு  $P$  உம்  $S$  இலிருந்து தெற்கே  $\sqrt{3}d \text{ km}$  தூரத்தில் வேறொரு படகு  $Q$  உம் இருக்கின்றன. படகு  $P$  நிலம் தொடர்பாகச் சீரான கதி  $2u \text{ km h}^{-1}$  உடன் ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையில்  $S$  ஐ இடைமறிப்பதற்குச் செல்லும் அதே வேளை படகு  $Q$  நிலம் தொடர்பாகச் சீரான கதி  $3u \text{ km h}^{-1}$  உடன் ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையில்  $P$  ஐ இடைமறிப்பதற்குச் செல்கின்றது.

(i) படகு  $P$  ஆனது கப்பல்  $S$  ஐ இடைமறிப்பதற்கு எடுக்கும் நேரம்  $\frac{d}{\sqrt{3}u} \text{ h}$  எனவும்

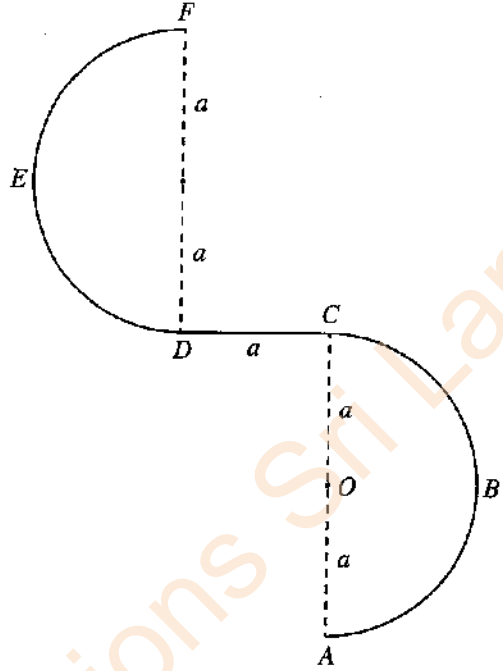
(ii) படகு  $Q$  ஆனது படகு  $P$  ஐ இடைமறிப்பதற்கு முன்பாகப் படகு  $P$  கப்பல்  $S$  ஐ இடைமறிக்கும் எனவும் காட்டுக.

12.(a) உருவில் சமபக்க முக்கோணி  $ABC$  ஆனது  $AB = BC = AC = 6a$  ஆகவும்  $BC$  ஐக் கொண்டுள்ள முகம் ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்தின் மீதும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்ட திணிவு  $3m$  ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான சீரான ஆப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடான நிலைக்குத்துக் குறுக்குவெட்டாகும்.  $AB$ ,  $AC$  ஆகிய கோடுகள் அவற்றைக் கொண்டுள்ள முகங்களின் அதியுயர் சரிவக் கோடுகளாகும். புள்ளி  $D$  ஆனது  $AD$  கிடையாக இருக்குமாறு  $ABC$  இன் தளத்தில் ஆப்பின் புள்ளி  $B$  இலிருந்து தூரம்  $a$  இல் உள்ள நிலைக்குத்துச் சுவர் மீதான ஒரு நிலைத்த புள்ளியாகும்.  $A$  இல் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு சிறிய ஒப்பமான கப்பிக்கு மேலாகச் செல்லும் நீளம்  $5a$  ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி  $AC$  மீது வைக்கப்பட்டுள்ள திணிவு  $2m$  ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை  $P$  உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை மற்றைய நுனி சுவர் மீது உள்ள நிலைத்த புள்ளி  $D$  உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. திணிவு  $m$  ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை  $Q$  ஆனது  $AB$  மீது தாங்கப்பட்டுள்ளது. உருவின் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு  $AP = AQ = a$  ஆக இருக்கத் தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது.



ஆப்பு சுவரில் அடிக்கும் கணத்தில் ஆப்புத் தொடர்பாக  $Q$  இன் வேகத்தைத் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

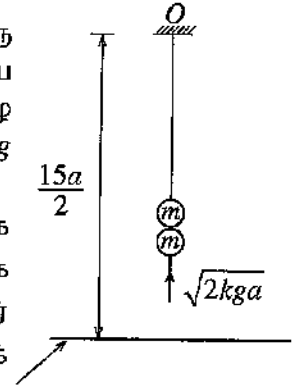
(b) உருவிற காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஒரு மெல்லிய கம்பி  $ABCDEF$  ஆனது நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. பகுதி  $ABC$  ஆனது மையம்  $O$  ஐயும் ஆரை  $a$  ஐயும் கொண்ட ஒரு மெல்லிய ஒப்பமான அரைவட்டக் கம்பியாகும். பகுதி  $CD$  ஆனது நீளம்  $a$  ஐ உடைய ஒரு மெல்லிய கரடான கிடைக் கம்பியாகும். பகுதி  $DEF$  உம் ஆரை  $a$  ஐ உடைய ஒரு மெல்லிய ஒப்பமான அரைவட்டக் கம்பியாகும்.  $AC, DF$  ஆகிய விட்டங்கள் நிலைக்குத்தானவை. திணிவு  $m$  ஐ உடைய ஒரு சிறிய ஒப்பமான மணி  $P$  ஆனது  $A$  இல் வைக்கப்பட்டுக் கிடையாக ஒரு வேகம்  $u$  ( $>3\sqrt{ag}$ ) கொடுக்கப்படும் அதே வேளை அது கம்பி வழியே இயங்கத் தொடங்குகின்றது. மணியின்  $C$  இலிருந்து  $D$  வரையுள்ள இயக்கத்தில் மணி மீது கம்பியின் மூலம் பிரயோகிக்கப்படும் உராய்வு விசையின் பருமன்  $\frac{1}{2}mg$  எனத் தரப்பட்டுள்ளது. மணி  $P$  இன்  $A$  இலிருந்து  $C$  வரையுள்ள இயக்கத்தில்  $OP$  ஆனது  $\vec{OA}$  உடன் கோணம்  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) ஐ ஆக்கும்போது அதன் கதி  $v$  ஆனது  $v^2 = u^2 - 2ag(1 - \cos \theta)$  இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.



$F$  இல் கம்பியைப் பிரிந்து செல்வதற்குச் சுற்று முன்னர் மணி  $P$  இன் கதி  $w$  ஆனது  $w^2 = u^2 - 9ag$  இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டி, அக்கணத்தில் கம்பியின் மூலம் மணி  $P$  மீது பிரயோகிக்கப்படும் மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

13. இயற்கை நீளம்  $4a$  ஐ உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி  $O$  உடனும் மற்றைய நுனி திணிவு  $m$  ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை  $P$  உடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை  $O$  இற்குக் கீழே தூரம்  $5a$  இல் நாப்பத்தில் தொங்குகின்றது. இழையின் மீள்தன்மை மட்டு  $4mg$  எனக் காட்டுக.

இப்போது திணிவு  $m$  ஐ உடைய வேறொரு துணிக்கை  $Q$  நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி இயங்கி  $P$  உடன் மோதி ஒன்றிணைந்து ஒரு சேர்த்தித் துணிக்கை  $R$  ஐ ஆக்குகின்றது. துணிக்கை  $P$  உடன் மோதுவதற்குச் சற்று முன்னர் துணிக்கை  $Q$  இன் கதி  $\sqrt{2kga}$  ஆகும்.  $R$  இயங்கத் தொடங்கும் வேகத்தைக் காண்க.



மீள்தன்மையின்றிய நிலம்

இழை தளர்வுறாமல் இருந்து பின்னர் நடைபெறும் இயக்கத்தில் சேர்த்தித் துணிக்கை  $R$  இற்கு  $O$  இலிருந்து உள்ள தூரம்  $x$  ஆனது சமன்பாடு  $\ddot{x} + \frac{g}{2a}(x - 6a) = 0$  ஐத் திருப்தியாக்குகின்றதெனக் காட்டுக.

$X = x - 6a$  என எழுதி,  $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$  எனக் காட்டுக; இங்கு  $\omega = \sqrt{\frac{g}{2a}}$ .

மேற்குறித்த எளிய இசை இயக்கத்தின் மையத்தையும் சூத்திரம்  $\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$  ஐப் பயன்படுத்தி வீச்சம்  $c$  ஐயும் காண்க.

$k > 3$  எனின், இழை தளர்வுறாமெனக் காட்டுக.

இப்போது,  $k = 8$  எனக் கொள்வோம்.  $P, Q$  ஆகிய துணிக்கைகள் ஒன்றிணையும் கணத்திலிருந்து புள்ளி  $O$  இற்குக் கீழே தூரம்  $\frac{15}{2}a$  இல் ஒரு மீள்தன்மையின்றிய கிடை நிலத்தில் அடிப்பதற்குச் சேர்த்தித் துணிக்கை  $R$  எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

மேலும், சேர்த்தித் துணிக்கை  $R$  நிலத்தில் அடித்த பின்னர் அடையும் உயர்ந்தபட்ச உயரத்தையும் காண்க.



14.(a)  $a, b$  ஆகியன பூச்சியமல்லாதனவும் சமாந்தரமல்லாதனவுமான காவிகள் எனவும்  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  எனவும் கொள்வோம்.

$\lambda a + \mu b = 0$  எனின்,  $\lambda = 0$  எனவும்  $\mu = 0$  எனவும் காட்டுக.

$ABC$  ஒரு முக்கோணியெனக் கொள்வோம்.  $AB$  இன் நடுப் புள்ளி  $D$  உம்  $CD$  இன் நடுப் புள்ளி  $E$  உம் ஆகும்.  $BC$ , (நீட்டப்பட்ட)  $AE$  ஆகிய கோடுகள்  $F$  இற் சந்திக்கின்றன.  $\overrightarrow{AB} = a$  எனவும்  $\overrightarrow{AC} = b$  எனவும் கொள்வோம். முக்கோணிக் கூட்டல் விதியைப் பயன்படுத்தி  $\overrightarrow{AE} = \frac{a+2b}{4}$  எனக் காட்டுக.

$\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AE}$  ஆகவும்  $\overrightarrow{CF} = \beta \overrightarrow{CB}$  ஆகவும் இருப்பது ஏனென விளக்குக; இங்கு  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

முக்கோணி  $ACF$  ஐக் கருதுவதன் மூலம்  $(\alpha - 4\beta)a + 2(\alpha + 2\beta - 2)b = 0$  எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து,  $\alpha, \beta$  ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

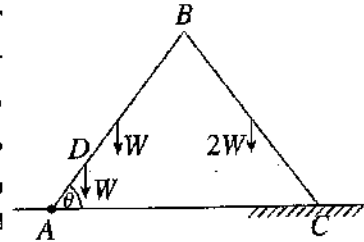
(b)  $ABC$  ஆனது ஒரு பக்கத்தின் நீளம்  $2a$  ஆகவுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணி எனவும்  $D, E, F$  ஆகியன முறையே  $AB, BC, AC$  ஆகியவற்றின் நடுப் புள்ளிகள் எனவும் கொள்வோம்.  $2P, \sqrt{3}P, 2\sqrt{3}P, \alpha P$  என்னும் பருமன்களை உடைய விசைகள் முறையே  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}$  வழியே தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதியின் விளையுள்  $\overrightarrow{AC}$  இற்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்குகின்றதெனத் தரப்பட்டுள்ளது.  $\alpha$  இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

விசைத் தொகுதி  $A$  இலூடாகத் தாக்கும் பருமன்  $R$  ஐ உடைய ஒரு தனி விசையுடன் பருமன்  $G$  ஐ உடைய ஓர் இணைக்குச் சமவலுவுள்ளது.  $R, G$  ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இவ்விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் எழுதி,  $AB$  ஐ விளையுளின் தாக்கக் கோடு சந்திக்கும் புள்ளிக்கு  $A$  இலிருந்து உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

இப்போது பருமன்  $H$  ஐ உடைய ஓர் இணை தொகுதியுடன் சேர்க்கப்படுகின்றது. இப்புதிய தொகுதியின் விளையுள் புள்ளி  $B$  இலூடாகத் தாக்குகின்றது.  $H$  இன் பெறுமானத்தையும் இவ்விணையின் போக்கையும் காண்க.

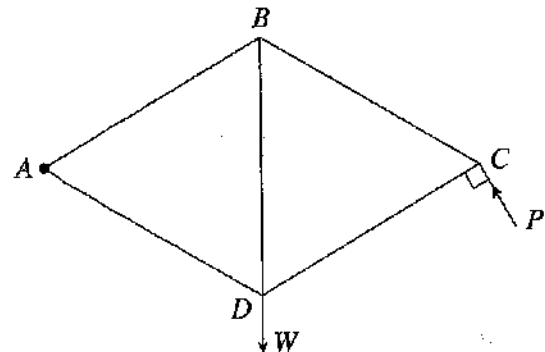
15.(a) ஒவ்வொன்றும் நீளம்  $2a$  ஐ உடைய  $AB, BC$  என்னும் இரு சீரான கோல்கள் முனை  $B$  இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன.  $AB, BC$  ஆகிய கோல்களின் நிறைகள் முறையே  $W, 2W$  ஆகும். முனை  $A$  ஒரு கிடை நிலத்தின் மீதுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல்  $AB$  மீது,  $AD = \frac{a}{2}$  ஆக இருக்கத்தக்கதாக, உள்ள புள்ளி  $D$  இல் நிறை  $W$  ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. உருவிற காட்டப்பட்டுள்ளவாறு



தொகுதி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே,  $\hat{BAC} = \theta$  ஆகவும் கோல்  $BC$  இன் முனைப் புள்ளி  $C$  மேற்குறித்த கிடை நிலத்தின் ஒரு கரடான பகுதி மீதும் இருக்குமாறு, நாப்பத்தில் உள்ளது. கோல்  $BC$  இற்கும் நிலத்திற்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம்  $\mu$  ஆகும்.  $\cot \theta \leq \frac{15}{7}\mu$  எனக் காட்டுக.

$CB$  இன் மூலம்  $AB$  மீது மூட்டு  $B$  இல் உருற்றப்படும் மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

(b) உருவிற காட்டப்பட்டுள்ள சட்டப்படல், அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட சம நீளமுள்ள  $AB, BC, CD, DA, DB$  என்னும் ஐந்து இலேசான கோல்களைக் கொண்டுள்ளது. ஒரு சுமை  $W$  ஆனது மூட்டு  $D$  இல் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை சட்டப்படல்  $A$  இல் ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டு, ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில்,  $BD$  நிலைக்குத்தாக இருக்க அதற்கு மூட்டு  $C$  இல் கோல்  $CD$  இற்குச் செங்குத்தாக உருவிற காட்டப்பட்டுள்ள திசையில் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு விசை  $P$  இன் மூலம், நாப்பத்தில் வைக்கப்படுகின்றது.



(i)  $P$  இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) போவின் குறிப்பிட்டப் பயன்படுத்தி,  $C, B, D$  ஆகிய மூட்டுகளுக்கு ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக. இதிலிருந்து, கோல்களில் உள்ள தகைப்புகளை அவை இழுவைகளா, உதைப்புகளா எனக் குறிப்பிட்டுக், காண்க.

16. (i) ஆரை  $a$  ஐ உடைய ஓர் அரைவட்ட வில்லின் வடிவமுள்ள ஒரு மெல்லிய சீரான கம்பியின் திணிவு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து தூரம்  $\frac{2a}{\pi}$  இலும்

(ii) உயரம்  $h$  ஐ உடைய ஒரு சீரான பொட் செவ்வட்டக் கூம்பின் திணிவு மையம் அதன் அடியின் மையத்திலிருந்து தூரம்  $\frac{1}{3}h$  இலும்

உள்ளனவெனக் காட்டுக.

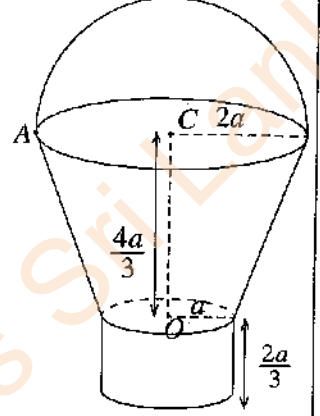
உருவிற காட்டப்பட்டுள்ளவாறு மேல் வட்ட விளிம்பினதும் கீழ் வட்ட விளிம்பினதும் ஆரைகள் முறையே  $2a$ ,  $a$  ஆகவும் உயரம்  $\frac{4a}{3}$  ஆகவும் உள்ள ஒரு பொட் செவ்வட்டக் கூம்பின் அடித்துண்டின் வடிவமுள்ள ஒரு சீரான மெல்லிய ஓட்டுடன் பின்வரும் பகுதிகளை ஒவ்வொன்றும் ஓட்டினைச் சந்திக்கும் இடங்களில் விறைப்பாகப் பொருத்துவதன் மூலம் ஒரு வாளி செய்யப்பட்டுள்ளது.

- ஆரை  $a$  ஐயும் மையம்  $O$  ஐயும் கொண்ட ஒரு சீரான மெல்லிய வட்டத் தகடு
- ஆரை  $a$  ஐயும் உயரம்  $\frac{2a}{3}$  ஐயும் கொண்ட பொட் செவ்வட்ட உருளையின் வடிவமுள்ள ஒரு சீரான மெல்லிய ஓடு
- ஆரை  $2a$  ஐயும் மையம்  $C$  ஐயும் கொண்ட ஓர் அரைவட்டத்தின் வடிவமுள்ள ஒரு சீரான மெல்லிய கம்பி

அடித்துண்டு, தகடு, உருளை ஆகியவற்றின் அலகுப் பரப்பளவிற்கான திணிவு  $\sigma$  உம் கம்பியின் அலகு நீளத்திற்கான திணிவு  $11a\sigma$  உம் ஆகும்.

வாளியின் திணிவு மையத்திற்கு  $O$  இலிருந்து உள்ள தூரம்  $(10\pi + 27)\frac{a}{9\pi}$  எனக் காட்டுக.

கம்பி அடித்துண்டின் மேல் விளிம்பைச் சந்திக்கும் புள்ளி  $A$  இலிருந்து வாளி ஒரு நிலைக்குத்து இழையினால் சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்படும்போது நாப்பத் தானத்தில்  $OC$  கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணத்தைக் காண்க.



17. (a)  $A, B$  என்னும் இரு சர்வசமப் பெட்டிகள் ஒவ்வொன்றிலும் அவற்றின் நிறங்களைத் தவிர எல்லா அம்சங்களிலும் சர்வசமமான 10 பந்துகள் உள்ளன. பெட்டி  $A$  இல் 6 வெள்ளைப் பந்துகளும் 4 சிவப்புப் பந்துகளும் பெட்டி  $B$  இல் 8 வெள்ளைப் பந்துகளும் 2 சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. ஒரு பெட்டியை எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்து, அப்பெட்டியிலிருந்து ஒன்றின்பின் மற்றதாகப் பிரதிவைப்பு இல்லாமல் எழுமாற்றாக 3 பந்துகள் வெளியே எடுக்கப்படுகின்றன.

(i) இரு சிவப்புப் பந்துகளும் ஒரு வெள்ளைப் பந்தும் வெளியே எடுக்கப்படுவதற்கான,

(ii) இரு சிவப்புப் பந்துகளும் ஒரு வெள்ளைப் பந்தும் வெளியே எடுக்கப்படுகின்றனவெனத் தரப்படும்போது பெட்டி  $A$  தெரிந்தெடுக்கப்பட்டமைக்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(b) தரவுத் தொடை  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  இன் இடையும் நியம விலகலும் முறையே  $\bar{x}$ ,  $\sigma_x$  எனவும்  $i = 1, 2, \dots, n$  இற்கு  $y_i = \frac{x_i - \alpha}{\beta}$  எனவும் கொள்வோம்; இங்கு  $\alpha, \beta (> 0)$  ஆகியன மெய்யம் மாறிலிகளாகும்.  $\bar{y} = \frac{\bar{x} - \alpha}{\beta}$  எனவும்  $\sigma_y = \frac{\sigma_x}{\beta}$  எனவும் காட்டுக; இங்கு  $\bar{y}$ ,  $\sigma_y$  ஆகியன முறையே தரவுத் தொடை  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  இன் இடையும் நியம விலகலும் ஆகும்.

ஒரு கம்பலியின் 100 சேவையாளர்களின் ஒரு காப்புறுதித் திட்டத்திற்கான மாதத் தவணைக் கட்டணங்கள் பின்வரும் மீடறன் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

மாதத் தவணைக் கட்டணம் (ரூபாய்) $x$	சேவையாளர்களின் எண்ணிக்கை
1500 - 3500	30
3500 - 5500	40
5500 - 7500	20
7500 - 9500	10

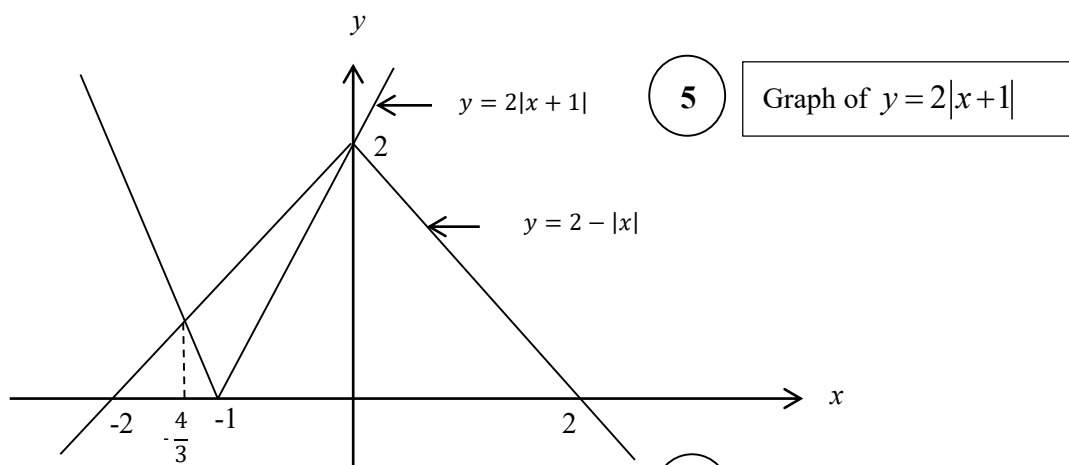
உருமாற்றம்  $y = \frac{x - 500}{1000}$  ஐப் பயன்படுத்தி  $y$  இன் இடையும் நியம விலகலையும்  $\frac{3(\text{இடை-இடையம்})}{\text{நியம விலகல்}}$

இனால் வரையறுக்கப்படும்  $y$  இன் ஓராயக் குணகத்தையும் மதிப்பிடுக.

இதிலிருந்து,  $x$  இன் இடை, நியம விலகல், ஓராயக் குணகம் ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக.



2. Sketch the graphs of  $y = 2|x+1|$  and  $y = 2-|x|$  in the same diagram.  
Hence or otherwise, find all real values of  $x$  satisfying the inequality  $2|x+2|+|x| \leq 4$ .



5 Graph of  $y = 2|x+1|$

5 Graph of  $y = 2-|x|$

(To earn all 10 marks, the common intersection point on the  $y$ -axis must be seen; otherwise only 5)

The  $x$ -coordinate of one point of intersection is  $x = 0$ .

The  $x$ -coordinate of the other point of intersection is given by  $-2(x+1) = 2+x$  for  $x < -1$ .

This gives  $x = -\frac{4}{3}$ . 5

$x = 0$  and  $x = -\frac{4}{3}$  seen

Let  $t = \frac{x}{2}$ . 5

$t = \frac{x}{2}$  substitution or equivalent

Then the given inequality becomes

$$2|2t+2|+|2t| \leq 4.$$

It is equivalent to

$$2|t+1| \leq 2-|t|.$$

From the graphs, we have

$$-\frac{4}{3} \leq t \leq 0.$$

$\therefore -\frac{8}{3} \leq x \leq 0$ . 5

correct solution seen

**Aliter 1:**

For the graphs  $\textcircled{5} + \textcircled{5}$ , as before.

Case (i)  $x \leq -2$ :

Then,  $2|x+2|+|x| \leq 4$  is equivalent to  $-2(x+2)-x \leq 4$ .

$$\therefore -\frac{8}{3} \leq x.$$

Hence, in this case, solutions are the values of  $x$  satisfying  $-\frac{8}{3} \leq x \leq -2$ .

Case (ii)  $-2 < x \leq 0$ :

Then,  $2|x+2|+|x| \leq 4$  is equivalent to  $2(x+2)-x \leq 4$ .

$$\therefore x \leq 0.$$

Hence, in this case, the solutions are the values of  $x$  satisfying  $-2 < x \leq 0$ .

Case (iii)  $x > 0$ :

Then,  $2|x+2|+|x| \leq 4$  is equivalent to  $2(x+2)+x \leq 4$

$$\therefore x \leq 0$$

Hence, in this case, there are no solutions.

All 3 cases with correct solutions

$\textcircled{10}$

only 2 cases with correct solutions

$\textcircled{5}$

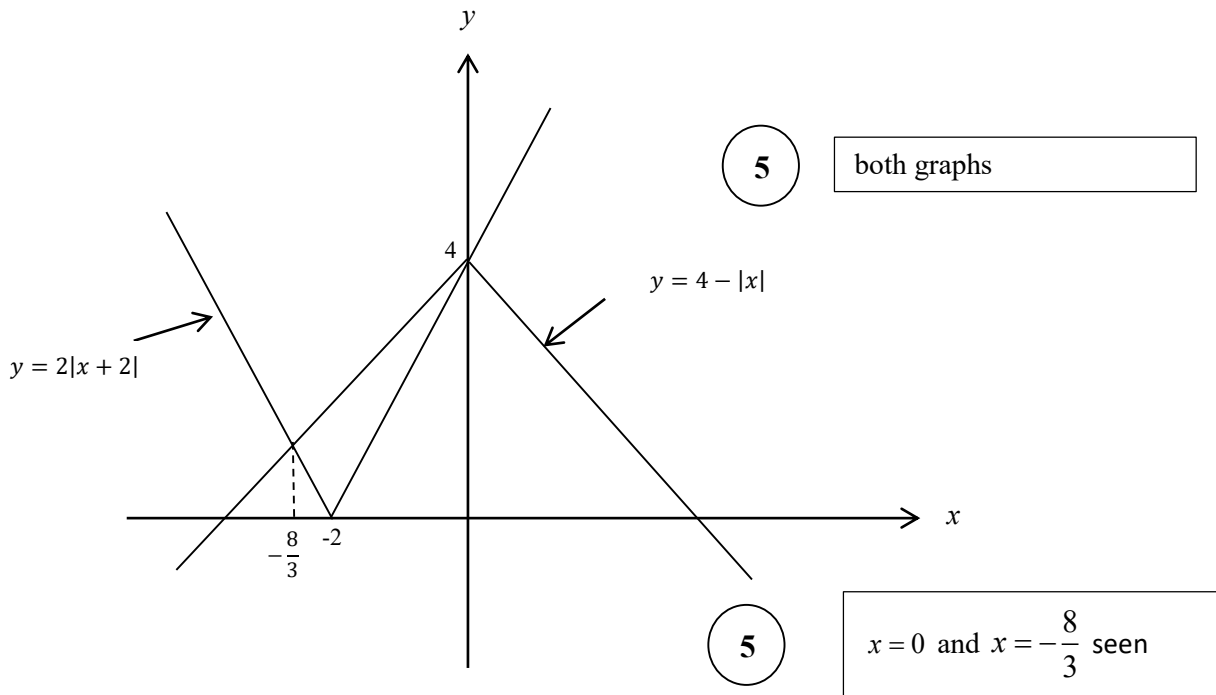
$\therefore$  The solutions of the given inequality are the values of  $x$  satisfying  $-\frac{8}{3} \leq x \leq 0$ .

$\textcircled{5}$

**Aliter 2:**

For the graphs (5) + (5), as before.

$$2|x+2|+|x|\leq 4 \text{ is equivalent to } 2|x+2| \leq 4-|x|.$$



From the graphs,

$$2|x+2| \leq 4 - |x|$$

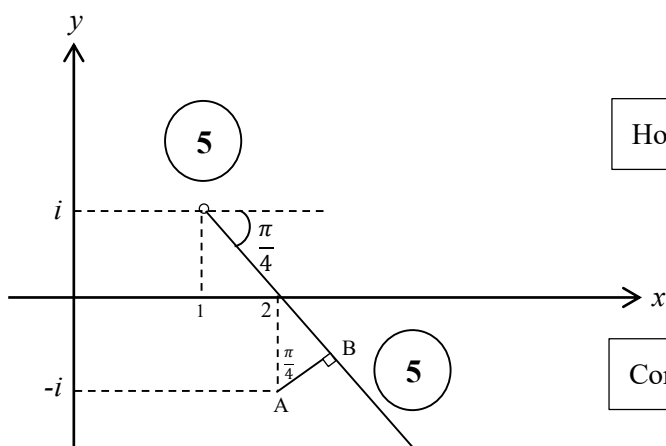
$$\Leftrightarrow -\frac{8}{3} \leq x \leq 0$$

(5)

correct solution seen

3. Sketch, in an Argand diagram, the locus of the points that represent complex numbers  $z$  satisfying  $\text{Arg}(z-1-i) = -\frac{\pi}{4}$ .  
Hence or otherwise, show that the minimum value of  $|z-2+i|$  satisfying  $\text{Arg}(iz+1-i) = \frac{\pi}{4}$  is  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

$$\text{Arg}(z-(1+i)) = -\frac{\pi}{4}$$



Hole at  $1+i$

Correct half line

$$\text{Arg}(i(z-i-1)) = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \text{Arg } i + \text{Arg}(z-(1+i)) = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \text{Arg}(z-(1+i)) = -\frac{\pi}{4} \quad (5)$$

Breaking the argument of the product to a sum, and using  $\text{Arg } i = \frac{\pi}{2}$ .

$$\text{Now, min } |z-(2-i)| = AB \quad (5)$$

$$= 1 \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

Recognising the minimum distance

Work leading to the answer

**Aliter:**

For the diagram  $\textcircled{5} + \textcircled{5}$  as before.

Let  $z = x + iy$

Then  $\frac{\pi}{4} = \text{Arg}(iz + 1 - i) = \text{Arg}(1 - y + i(x - 1))$

$$\begin{aligned} \therefore x - 1 &= (1)(1 - y) && \textcircled{5} \\ \Rightarrow x + y &= 2. \end{aligned}$$

Writing the given information as a relation of  $x$  and  $y$ .

Now  $|z - 2 + i| = |x + iy - 2 + i|$

$$= |(x - 2) + i(y + 1)|$$

$$= |y + i(y + 1)| \quad (\because x = y)$$

$$= \sqrt{y^2 + (y + 1)^2}$$

$$= \sqrt{2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \quad \textcircled{5}$$

Writing the absolute value as a complete square of  $x$  or  $y$ .

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ since } 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0; \quad (= 0 \text{ when } y = -\frac{1}{2}).$$

$$\therefore \min |z - 2 + i| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \textcircled{5}$$

Work leading to the answer.

4. Let  $k > 0$ . It is given that the coefficient of  $x^7$  in the binomial expansion of  $\left(x^2 + \frac{k}{x}\right)^{11}$  and the coefficient of  $x^{-7}$  in the binomial expansion of  $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{11}$  are equal. Show that  $k = 1$ .

$k > 0$ . For  $\left(x^2 + \frac{k}{x}\right)^{11}$ ;

$$T_{r+1} = {}^{11}C_r (x^2)^{11-r} \left(\frac{k}{x}\right)^r = {}^{11}C_r x^{22-3r} k^r$$

$$22 - 3r = 7 \Rightarrow r = 5$$

5

Correct value of  $r$ 

$\therefore$  The coefficient of  $x^7 = {}^{11}C_5 k^5$

5

Correct coefficient

For  $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{11}$ ;  $T_{r+1} = {}^{11}C_r x^{11-r} (-1)^r \left(\frac{1}{x^2}\right)^r = (-1)^r {}^{11}C_r x^{11-3r}$

$$11 - 3r = -7 \Rightarrow r = 6$$

5

Correct value of  $r$ 

$\therefore$  The coefficient of  $x^{-7} = {}^{11}C_6$

5

Correct coefficient

Then,  ${}^{11}C_6 = {}^{11}C_5 k^5$  gives  $k = 1$ , as  ${}^{11}C_6 = {}^{11}C_5$ .

5

Work leading to the answer



5. Show that  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})} = 4$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})} \times \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \quad \textcircled{5} \quad \text{Multiplying by the conjugate}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{(1 - \cos 2x)}{x^2 \cos 2x} \times (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$$

$$= \left( \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \right) \times \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} \right) \times \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$$

$$= \underset{\textcircled{5}}{1} \times \underset{\textcircled{5}}{2} \times \underset{\textcircled{5}}{1} \times \underset{\textcircled{5}}{2}$$

Each limit  $\textcircled{5}$

$$= 4.$$

**Aliter 1:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x(1 - \cos 2x)}{x^2 \cos 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \quad \text{5} \quad \text{multiplying by the conjugate}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x(1 - \cos^2 2x)}{x^2 \cos 2x(1 + \cos 2x)} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2x}$$

$$= 4 \left( \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \right)^3 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos 2x} \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \right)$$

$$= 4 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 2$$

$$\text{5} \quad \text{5} \quad \text{5} \quad \text{5}$$

Each limit

5

$$= 4.$$

**Aliter 2:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}$$

5

multiplying by the conjugate

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \times \left( \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} - \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \right) \frac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \times \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x (2 \tan^2 x)}{x^2 (1 - \tan^4 x)} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2x}$$

$$= 2 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^3 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \right)^3 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \tan^4 x} \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \right)$$

$$= 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2$$

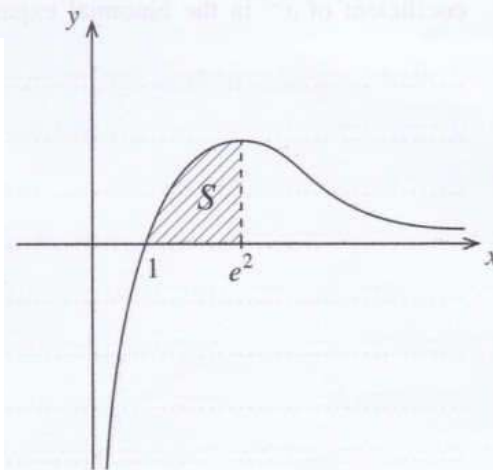
$$= 4. \quad \text{5} \quad \text{5} \quad \text{5} \quad \text{5}$$

Each limit

5

6. Let  $S$  be the region enclosed by the curves  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ,  $y = 0$  and  $x = e^2$ . Show that the area of  $S$  is 4 square units.

The region  $S$  is rotated about the  $x$ -axis through  $2\pi$  radians. Show that the volume of the solid thus generated is  $\frac{8\pi}{3}$ .



$$\text{Area of } S = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \quad (5)$$

Setting up the integral for  $S$

$$= (\ln x) \cdot 2x^{\frac{1}{2}} \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 2x^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{x} dx \quad (5)$$

Integration by parts or equivalent

$$= 4e - 2 \int_1^{e^2} x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= 4e - (2\sqrt{x}) \Big|_1^{e^2}$$

$$= 4e - 4e + 4$$

$$= 4 \quad (5)$$

Work leading to the answer

$$\text{The volume required} = \int_1^{e^2} \pi \left( \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)^2 dx \quad (5)$$

Setting up the integral for the volume

$$= \pi \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

$$= \pi \frac{(\ln x)^3}{3} \Big|_1^{e^2}$$

$$= \frac{8\pi}{3} \quad (5)$$

Work leading to the answer

7. Show that the equation of the tangent line to the rectangular hyperbola parametrically given by  $x = ct$  and  $y = \frac{c}{t}$  for  $t \neq 0$ , at the point  $P \equiv \left( cp, \frac{c}{p} \right)$  is given by  $x + p^2y = 2cp$ .

The normal line to this hyperbola at  $P$  meets the hyperbola again at another point  $Q \equiv \left( cq, \frac{c}{q} \right)$ . Show that  $p^3q = -1$ .

$$\frac{dx}{dt} = c \quad \text{and} \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{c}{t^2}. \quad (t \neq 0.)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{c}{t^2}}{c} = -\frac{1}{t^2}$$

$\frac{dy}{dx}$  in terms of  $t$

$$\therefore \text{The gradient of the tangent at } P = -\frac{1}{t^2} \Big|_{t=p} = -\frac{1}{p^2}$$

$\therefore$  The equation of the tangent at  $P$ :

$$y - \frac{c}{p} = -\frac{1}{p^2} (x - cp)$$

$$\therefore x + p^2y = 2cp.$$

5

Work leading to the answer

The gradient of the normal at  $P = p^2$ .

$$\therefore \text{Equation of the normal at } P; \quad y - \frac{c}{p} = p^2(x - cp)$$

5

Equation of the normal

$Q \equiv \left( cq, \frac{c}{q} \right)$  is on this line;

$$\therefore \frac{c}{q} - \frac{c}{p} = p^2(cq - cp) \Rightarrow c(p - q) = -p^3qc(p - q)$$

5

For the substitution

Since  $P$  and  $Q$  are distinct points, we have  $p \neq q$ .

$$p^3q = -1.$$

5

Work leading to the answer

**Aliter:** (For the last part)

Gradient of  $PQ =$  Gradient of the normal line at  $P$

5

For the condition

$$\therefore \frac{\frac{c}{q} - \frac{c}{p}}{cq - cp} = p^2$$

5

( $\because \neq 0$ )

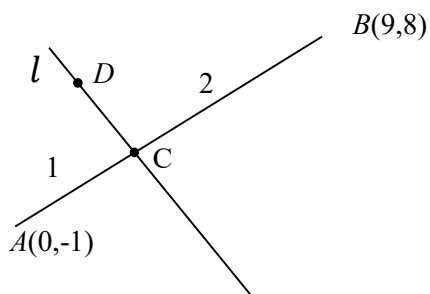
For the substitutions

$$\therefore p^3q = -1$$

5

Work leading to the answer

8. Let  $A \equiv (0, -1)$  and  $B \equiv (9, 8)$ . The point  $C$  lies on  $AB$  such that  $AC:CB = 1:2$ . Show that the equation of the straight line  $l$  through  $C$  perpendicular to  $AB$  is  $x + y - 5 = 0$ .  
 Let  $D$  be the point on  $l$  such that  $AD$  is parallel to the straight line  $y = 5x + 1$ . Find the coordinates of  $D$ .



$$C \equiv \left( \frac{2(0)+1(9)}{2+1}, \frac{2(-1)+1(8)}{2+1} \right)$$

$$\equiv (3, 2) \quad \text{5}$$

Coordinates of  $C$

The gradient of  $AB = 1$ .  
 The gradient of  $l = -1$       5

For the gradient of  $l$

$\therefore$  Equation of  $l$ :  
 $y - 2 = -1(x - 3)$   
 i.e.  $x + y - 5 = 0$ . ----- (1)      5

Work leading to the equation of  $l$

Equation of  $AD$ ;  $y - (-1) = 5(x - 0)$       5  
 i.e.  $y + 1 = 5x$  ----- (2)

Work leading to the coordinates of  $D$

Solving (1) and (2)

$$\therefore D \equiv (1, 4) \quad \text{5}$$

$D \equiv (1, 4)$  seen



9. Show that the straight line  $x + 2y = 3$  intersects the circle  $S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$  at two distinct points.  
Find the equation of the circle passing through these two points and the centre of the circle  $S = 0$ .

$$S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\text{Let } \ell \quad x + 2y - 3 = 0.$$

$$\text{On } \ell \quad x = 3 - 2y;$$

$$(3 - 2y)^2 + y^2 - 4(3 - 2y) + 1 = 0$$

$$\therefore 5y^2 - 4y - 2 = 0 \quad (5)$$

$$\text{Discriminant of this quadratic } \Delta = 16 + 4(5)(2) \quad (5)$$

$\therefore$  Since  $\Delta > 0$ , the line  $x + 2y = 3$  intersects  $S$  at two distinct points.

The equation of the required circle can be written as

$$x^2 + y^2 - 4x + 1 + \lambda(x + 2y - 3) = 0, \quad (5)$$

where  $\lambda \in \mathbb{R}$

This circle passes through  $(2, 0)$ , we have

$$4 - 8 + 1 + \lambda(2 - 3) = 0$$

$$\therefore \lambda = -3 \quad (5)$$

$\therefore$  Equation of the required circle is

$$x^2 + y^2 - 4x + 1 + (-3)(x + 2y - 3) = 0$$

$$\text{i.e. } x^2 + y^2 - 7x - 6y + 10 = 0.$$

**Aliter:**

(5)

(5)

Perpendicular distance from the centre < radius

Comparison

(5)

Forming a quadratic

Writing the discriminant

For  $\Delta > 0$

For the  $\lambda$  form

$\lambda = -3$  seen

10. Express  $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 1$  in the form  $R\cos(2x - \alpha)$ , where  $R > 0$  and  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .  
Hence, solve the equation  $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x = 1$ .

$$2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 1$$

$$= 2\cos^2 x - 1 + \sqrt{3}(2\sin x \cos x)$$

$$= \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$$

5

Writing the expression using  
 $\cos 2x$  and  $\sin 2x$ 

$$= 2 \left[ \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x \right]$$

$$= 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Here  $R = 2$  and  $\alpha = \frac{\pi}{3}$

5

5

 $R = 2$  seen $\alpha = \frac{\pi}{3}$  seen

The equation  $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x = 1$  is equivalent to

$$2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 1 = 1.$$

$$\therefore 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

Hence  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

5

 $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$  seen

$$\therefore 2x - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore x = n\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$$

5

Correct solution seen

11. (a) Let  $k > 1$ . Show that the equation  $x^2 - 2(k+1)x + (k-3)^2 = 0$  has real distinct roots.

Let  $\alpha$  and  $\beta$  be these roots. Write down  $\alpha + \beta$  and  $\alpha\beta$  in terms of  $k$ , and find the values of  $k$  such that both  $\alpha$  and  $\beta$  are positive.

Now, let  $1 < k < 3$ . Find the quadratic equation whose roots are  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$  and  $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ , in terms of  $k$ .

(b) Let  $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$  and  $g(x) = x^3 + cx^2 + ax + 1$ , where  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . It is given that the remainder when  $f(x)$  is divided by  $(x-1)$  is 5, and that the remainder when  $g(x)$  is divided by  $x^2 + x - 2$  is  $x + 1$ . Find the values of  $a, b$  and  $c$ .

Also, with these values for  $a, b$  and  $c$ , show that  $f(x) - 2g(x) \leq \frac{13}{12}$  for all  $x \in \mathbb{R}$ .

(a)

Let  $\Delta$  be the discriminant of  $x^2 - 2(k+1)x + (k-3)^2 = 0$ .

$$\text{Then } \Delta = 4(k+1)^2 - 4(k-3)^2 \quad (5)$$

$$= 4(k+1+k-3)(k+1-k+3)$$

$$= 32(k-1). \quad (5)$$

Since  $k > 1$ , we have  $\Delta > 0$ . (5)

$\therefore$  The given equation has real distinct roots. (5)

20

$$\alpha + \beta = 2(k+1) \text{ and } \alpha\beta = (k-3)^2 \quad (5) + (5)$$

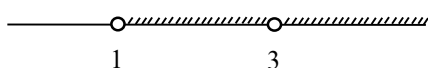
For  $\alpha$  and  $\beta$  both to be positive,

we must have  $\alpha + \beta > 0$  and  $\alpha\beta > 0$ . (10)

Since  $k > 1$ , we have  $\alpha + \beta = 2(k+1) > 0$  (5)

and  $\alpha\beta = (k-3)^2 > 0$  if and only if  $k \neq 3$ . (10)

$\therefore$  The required values of  $k$  are  $1 < k < 3$  or  $k > 3$ .



35

Now let  $1 < k < 3$ . Note that  $\alpha > 0$  and  $\beta > 0$ .

The equation whose roots are  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$  and  $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$  is  $\left(x - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right) = 0$ . (5)

i.e.  $x^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)x + \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} = 0$ . (5)

i.e.  $\sqrt{\alpha\beta}x^2 - (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})x + 1 = 0$ . (5)

Note that  $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{(k-3)^2} = |k-3| = 3-k$  ( $\because$  (5))

Also,  $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}$  (5)  
 $= 2(k+1) + 2(3-k)$  (5)  
 $= 8$ . (5)

$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 2\sqrt{2}$  (5) ( $\because \beta > 0$ )

$\therefore$  The required equation is  $(3-k)x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$  (5)

45

(b)

$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$  and

$g(x) = x^3 + cx^2 + ax + 1$

Since the remainder when  $f(x)$  is divided by  $(x-1)$  is 5, by the Remainder

Theorem,  $f(1) = 5$ . (5)

$\therefore a + b + 3 = 5$

$a + b = 2$ . (5) ----- (1)

Since, the remainder when  $g(x)$  is divided by  $x^2 + x - 2$  is  $x + 1$ , we have

$g(x) = x^3 + cx^2 + ax + 1 = (x^2 + x - 2)(x + \lambda) + x + 1$  for  $\lambda \in \mathbb{R}$  (5)

$((x))$ ;

$\therefore g(x) = x(x^2 + x - 2) + x + 1$  (5) (5)  
 $= x^3 + x^2 - x + 1$ . Hence  $c = 1$  and  $a = -1$ .

Now by (1);  $b = 3$ . (5)

30

$$f(x) - 2g(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1 - 2(x^3 + x^2 - x + 1)$$

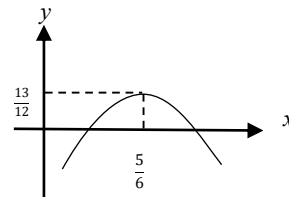
$$= -3x^2 + 5x - 1 \quad (5)$$

$$= -3 \left[ \left( x - \frac{5}{6} \right)^2 - \frac{25}{36} + \frac{1}{3} \right]$$

$$= -3 \left[ \left( x - \frac{5}{6} \right)^2 - \frac{13}{36} \right] \quad (5)$$

$$\leq -3 \times \left( \frac{-13}{36} \right), \text{ since } \left( x - \frac{5}{6} \right)^2 \geq 0. \quad (5)$$

$$\therefore f(x) - 2g(x) \leq \frac{13}{12}. \quad (5)$$



20
----

12.(a) It is required to form a 4-digit number consisting of 4 digits taken from the 10 digits given below:

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5

Find the number of different such 4-digit numbers that can be formed

- (i) if all 4 digits chosen are different,  
 (ii) if any 4 digits can be chosen.

(b) Let  $U_r = \frac{-16r^3 + 12r^2 + 40r + 9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$  for  $r \in \mathbb{Z}^+$ .

Determine the values of the real constants  $A$  and  $B$  such that  $U_r = \frac{A(r-1)}{(2r+1)^2} - \frac{(r-B)}{(2r-1)^2}$  for  $r \in \mathbb{Z}^+$ .

Hence, find  $f(r)$  such that  $\frac{1}{5^{r-1}}U_r = f(r) - f(r-1)$  for  $r \in \mathbb{Z}^+$ , and

show that  $\sum_{r=1}^n \frac{1}{5^{r-1}}U_r = 1 + \frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}$  for  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

Deduce that the infinite series  $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{5^{r-1}}U_r$  is convergent and find its sum.

(a)

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5

(i) Four different digits out of 1,2,3,4 and 5

$$= {}^5P_4 \quad \textcircled{5}$$

$$= 5! \quad \textcircled{5}$$

$$= 120 \quad \textcircled{5}$$

15

(ii) four digit numbers can be formed by

	number of different such 4 digit numbers
four different digits	${}^5P_4 = 120$
only one digit is repeated twice and the other two are different	${}^4C_1 \times {}^4C_2 \times \frac{4!}{2!} = 288$ <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px 10px;">10</span> <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px 10px;">5</span> </div>
Two digits repeated twice	${}^4C_2 \times \frac{4!}{2!2!} = 36$ <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px 10px;">10</span> <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px 10px;">5</span> </div>
one digits repeated thrice	${}^1C_1 \times {}^4C_1 \times \frac{4!}{3!} = 16$ <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px 10px;">10</span> <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px 10px;">5</span> </div>

The required number of ways =  $120 + 288 + 36 + 16$ 

= 460

5555

(b)

For  $r \in \mathbb{Z}$ 

$$U_r = \frac{-16r^3 + 12r^2 + 40r + 9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$$

$$U_r = \frac{A(r-1)}{(2r+1)^2} - \frac{(r-B)}{(2r-1)^2} = \frac{A(r-1)(2r-1)^2 - (r-B)(2r+1)^2}{(2r+1)^2(2r-1)^2}$$

$$\therefore -16r^3 + 12r^2 + 40r + 9 = 5A(r-1)(4r^2 - 4r + 1) - 5(r-B)(4r^2 + 4r + 1)$$

Comparing coefficients of powers of  $r$  :

3

$$r^2 : 12 = 5A(-8) - 5(-4B + 4)$$

$$r^1 : 40 = 25A - 5(1 - 4B)$$

$$r^0 : 9 = -5A + 5B$$

10

These give us  $A = \frac{1}{5}$  and  $B = 2$ .

(5)      (5)

20

$$\therefore U_r = \frac{r-1}{5(2r+1)^2} - \frac{r-2}{(2r-1)^2} \quad (5)$$

$$\therefore \frac{1}{5^{r-1}} U_r = \frac{r-1}{5^r(2r+1)^2} - \frac{r-2}{5^{r-1}(2r-1)^2} \quad (5)$$

and hence,

$$\frac{1}{5^{r-1}} U_r = f(r) - f(r-1), \text{ where } f(r) = \frac{r-1}{5^r(2r+1)^2}. \quad (10)$$

$$\begin{array}{l} r=1; \quad \frac{1}{5^0} U_1 = f(1) - f(0) \\ r=2; \quad \frac{1}{5} U_2 = f(2) - f(1) \\ \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} r=1; \\ r=2; \\ \vdots \end{array}} \right\} (5)$$

$$\begin{array}{l} r=n-1; \quad \frac{1}{5^{n-2}} U_{n-1} = f(n-1) - f(n-2) \\ r=n \quad \quad \frac{1}{5^{n-1}} U_n = f(n) - f(n-1) \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} r=n-1; \\ r=n \end{array}} \right\} (5)$$

$$\sum_{r=1}^n \frac{1}{5^{r-1}} U_r = f(n) - f(0) \quad (5)$$

$$= \frac{n-1}{5^n(2n+1)^2} - (-1) \quad (5)$$

$$= 1 + \frac{n-1}{5^n(2n+1)^2} \text{ for } n \in \mathbb{Z} \quad (5)$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \frac{1}{5^{r-1}} U_r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{n-1}{5^n (2n+1)^2} \right)$$

$$\textcircled{5} = 1. \textcircled{5}$$

$\therefore$  the infinite series  $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{5^{r-1}} U_r$  is convergent and the sum is 1.  $\textcircled{5}$

15
----

13.(a) Let  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$  and  $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , where  $a \in \mathbb{R}$ .

Also, let  $C = AB^T$ . Find  $C$  in terms of  $a$ , and show that  $C^{-1}$  exists for all  $a \neq 0$ .

Write down  $C^{-1}$  in terms of  $a$ , when it exists.

Show that if  $C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}$ , then  $a = 2$ .

With this value for  $a$ , find the matrix  $D$  such that  $DC - C^T C = 8I$ , where  $I$  is the identity matrix of order 2.

(b) Let  $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$  and  $z_2 = 1 + i$ . Express  $\frac{z_1}{z_2}$  in the form  $x + iy$ , where  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Also, express each of the complex numbers  $z_1$  and  $z_2$  in the form  $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , where  $r > 0$  and  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , and hence, show that  $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$ .

Deduce that  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ .

(c) Let  $n \in \mathbb{Z}^+$  and  $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$  for  $k \in \mathbb{Z}$ .

Using De Moivre's theorem, show that  $(1 + i \tan \theta)^n = \sec^n \theta (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ .

Hence, obtain a similar expression for  $(1 - i \tan \theta)^n$ , and

show that  $(1 + i \tan \theta)^n + (1 - i \tan \theta)^n = 2 \sec^n \theta \cos n\theta$ .

Deduce that  $z = i \tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$  is a solution of  $(1+z)^{25} + (1-z)^{25} = 0$ .

(a)  $\textcircled{5}$

$$C = AB^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 3 & a + 3 \\ a + 1 & 1 \end{pmatrix} \textcircled{10}$$

$|C| = (a^2 + 3) - (a + 1)(a + 3) = -4a$

$\neq 0 (\because \textcircled{5})$

$\therefore C^{-1}$  exists for all  $a \neq 0$ .  $\textcircled{5}$  **25**

For  $a \neq 0, C^{-1} = -\frac{1}{4a} \begin{pmatrix} 1 & -(a+3) \\ -(a+1) & a^2+3 \end{pmatrix} \textcircled{10}$

$\textcircled{5}$  **10**

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4a} \begin{pmatrix} -1 & a+3 \\ a+1 & -a^2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4a} \begin{pmatrix} 2a+5 \\ -2a^2+a-5 \end{pmatrix} \quad (10)$$

All 2 entries correct  
only 1 correct

(10)

(5)

$$\therefore \frac{1}{4a} \begin{pmatrix} 2a+5 \\ -2a^2+a-5 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2a+5}{4a} = \frac{9}{8} \quad \text{and} \quad \frac{-2a^2+a-5}{4a} = -\frac{11}{8} \quad (5)$$

These two equations give us  $a = 2$ . (5)

20

When  $a = 2$ ,  $C = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  and  $C^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ . (5)

$DC - C^T C = 8I$  is equivalent to  $D - C^T = 8IC^{-1}$ . (5)

(5)

$$\therefore D = C^T + 8C^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 8 \left(-\frac{1}{8}\right) \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

20

(b)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(1-i) = \underbrace{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}_x + i \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}_y \quad (5)$$

(5)

10

$$z_1 = 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad (5)$$

(5)

$$z_2 = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad (5)$$

(5)

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = \frac{2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}{\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$= \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \quad (10)$$

30

Equating real parts,

$$\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad (5)$$

<b>05</b>
-----------

(c)

For  $n \in \mathbb{Z}$  and  $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$  for  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$(1+i \tan \theta)^n = \frac{1}{\cos^n \theta} (\cos \theta + i \sin \theta)^n \quad (5)$$

$$= \sec^n \theta (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad \text{-----} \quad (1) \quad (5)$$

<b>10</b>
-----------

$$(1-i \tan \theta)^n = (1+i \tan(-\theta))^n$$

$$= \sec^n(-\theta) [\cos n(-\theta) + i \sin n(-\theta)]$$

$$= \sec^n \theta (\cos n\theta - i \sin n\theta) \quad \text{-----} \quad (2) \quad (5)$$

$$(1) \quad \text{and} \quad (2) \quad \text{give us} \quad (1+i \tan \theta)^n + (1-i \tan \theta)^n = 2 \sec^n \theta \cos n\theta. \quad (5)$$

<b>10</b>
-----------

$z = i \tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$  gives

$$(1+z)^{25} + (1-z)^{25} = \left(1+i \tan\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)^{25} + \left(1-i \tan\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)^{25}$$

$$= 2 \sec^{25}\left(\frac{\pi}{10}\right) \cos 25\left(\frac{\pi}{10}\right) \quad (5)$$

$$= 0, \text{ as } \cos 25\left(\frac{\pi}{10}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0. \quad (5)$$

<b>10</b>
-----------

14.(a) Let  $f(x) = \frac{4x+1}{x(x-2)}$  for  $x \neq 0, 2$ .

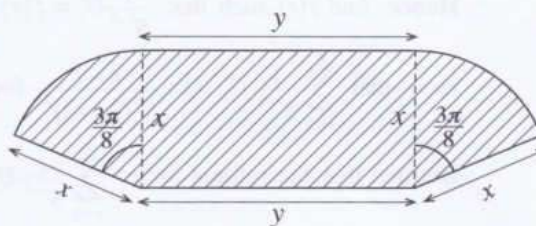
Show that  $f'(x)$ , the derivative of  $f(x)$ , is given by  $f'(x) = -\frac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2}$  for  $x \neq 0, 2$ .

Hence, find the intervals on which  $f(x)$  is increasing and the intervals on which  $f(x)$  is decreasing.

Sketch the graph of  $y = f(x)$  indicating the asymptotes,  $x$ -intercept and the turning points.

Using this graph, find all real values of  $x$  satisfying the inequality  $f(x) + |f(x)| > 0$ .

(b) The shaded region  $S$  of the adjoining figure shows a garden consisting of a rectangle and two sectors of a circle each subtending an angle  $\frac{3\pi}{8}$  at the centre. Its dimensions, in metres, are shown in the figure. The area of  $S$  is given to be  $36 \text{ m}^2$ . Show that the perimeter  $p$  m of  $S$  is given by  $p = 2x + \frac{72}{x}$  for  $x > 0$  and that  $p$  is minimum when  $x = 6$ .



(a)

For  $x \neq 0, 2$ ,  $f(x) = \frac{4x+1}{x(x-2)}$

Then,  $f'(x) = \frac{4x(x-2) - (4x+1)(x-2+x)}{x^2(x-2)^2}$  20

$$= -\frac{2(2x^2 + x - 1)}{x^2(x-2)^2}$$

$$= -\frac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2} \text{ for } x \neq 0, 2.$$

5

25

Turning points:

$$f'(x) = 0 \iff x = -1 \text{ or } x = \frac{1}{2}$$
5

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 2$	$2 < x < \infty$
1	(-)	(+)	(+)	(-)	(-)
$f(x)$ is	↘ decreasing	↗ increasing	↗ increasing	↘ decreasing	↘ decreasing

5

5

5

5

5

$\therefore f(x)$  is increasing on  $[-1, 0)$  and  $(0, \frac{1}{2}]$

and decreasing on  $(-\infty, -1]$ ,  $[\frac{1}{2}, 2)$  and  $(2, \infty)$ .

30

Turning points:  $(\frac{1}{2}, -4)$  is a local maximum.

5

$(-1, -1)$  is a local minimum.

$x$  - intercept :  $(-\frac{1}{4}, 0)$

5

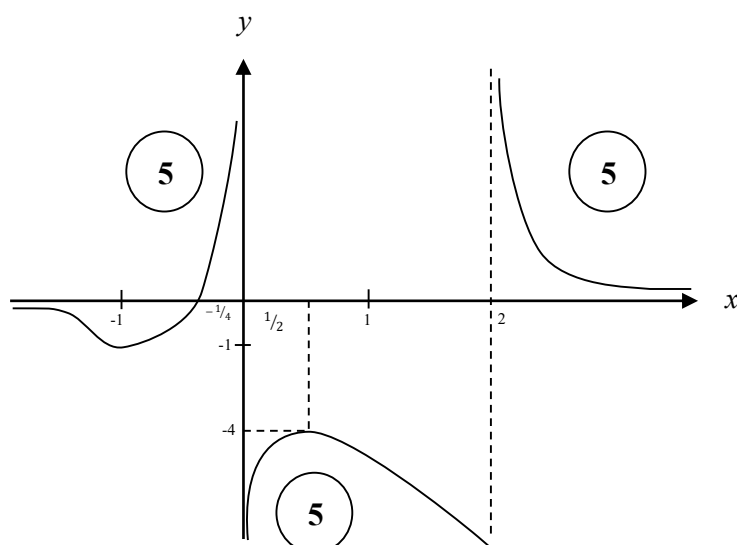
5

Horizontal asymptote:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \therefore y = 0$

5

Vertical asymptotes:  $x = 0$  and  $x = 2$ .

5



40

Note that  $f(x) + |f(x)| = \begin{cases} 2f(x) & \text{if } f(x) \geq 0. \\ 0 & \text{if } f(x) < 0. \end{cases}$

$\therefore f(x) + |f(x)| > 0$  if and only if  $f(x) > 0$ .

$\therefore$  The real values of satisfying  $f(x) + |f(x)| > 0$  is given by

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < x < 0 \text{ or } x > 2.$$

5

10

15

(b)

For  $x > 0$ ;

$$\text{Given: } 36 = xy + \frac{3}{8}\pi x^2 \quad (10)$$

$$\therefore y = \frac{36}{x} - \frac{3}{8}\pi x \quad \text{for } x > 0$$

$$p = 2x + 2y + 2\left(\frac{3}{8}\pi x\right) \quad (10)$$

$$= 2x + 2\left(\frac{36}{x} - \frac{3}{8}\pi x\right) + \frac{3}{4}\pi x$$

$$\therefore p = 2x + \frac{72}{x} \quad (5)$$

$$\frac{dp}{dx} = 2 - \frac{72}{x^2}; \quad x > 0.$$

$$(5)$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6. \quad (5)$$

For  $0 < x < 6$ ,  $\frac{dp}{dx} < 0$  and

for  $x > 6$ ,  $\frac{dp}{dx} > 0$ .

$\therefore p$  is minimum when  $x = 6$ .  $(5)$

40
----

15.(a) Find the values of the constants  $A$ ,  $B$  and  $C$  such that

$$x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = A(x^2 + 1)^2 + Bx(x^2 + 1) + Cx^2 \text{ for all } x \in \mathbb{R}.$$

Hence, write down  $\frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x(x^2 + 1)^2}$  in partial fractions and

find  $\int \frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x(x^2 + 1)^2} dx$ .

(b) Let  $I = \int_0^{\frac{1}{4}} \sin^{-1}(\sqrt{x}) dx$ . Show that  $I = \frac{\pi}{24} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$  and hence, evaluate  $I$ .

(c) Show that  $\frac{d}{dx}(x \ln(x^2 + 1) + 2 \tan^{-1} x - 2x) = \ln(x^2 + 1)$ .

Hence, find  $\int \ln(x^2 + 1) dx$  and show that  $\int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2}(\ln 4 + \pi - 4)$ .

Using the result  $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ , where  $a$  is a constant,

find the value of  $\int_0^1 \ln[(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)] dx$ .

(a)

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 &= A(x^2 + 1)^2 + Bx(x^2 + 1) + Cx^2 \\ &= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^3 + x) + Cx^2 \end{aligned}$$

Comparing coefficients of powers of  $x$ ;

$$x^0: 1 = A$$

$$x: 3 = B$$

$$x^2: 4 = 2A + C$$

$$\textcircled{5} + \textcircled{5}$$

$$x^3: 3 = B$$

$$x^4: 1 = A$$

$$\therefore A = 1, B = 3 \text{ and } C = 2.$$

$$\textcircled{5}$$

15



$$\frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2 + 1} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \quad (10)$$

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x(x^2 + 1)^2} = \int \frac{1}{x} dx + 3 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + 2 \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx. \quad (5)$$

$$= \ln|x| + 3 \tan^{-1} x - \frac{1}{x^2 + 1} + E, \quad \text{where } E \text{ is an arbitrary constant.}$$

$$(5) \quad (5) \quad (5) \quad (5)$$

35

(b)

$$I = \int_0^{\frac{1}{4}} \sin^{-1}(\sqrt{x}) dx$$

$$= x \sin^{-1}(\sqrt{x}) \Big|_0^{\frac{1}{4}} - \int_0^{\frac{1}{4}} x \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx. \quad (10)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx \quad (5)$$

$$= \frac{\pi}{24} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx \quad (5)$$

20

$$\text{Let } \sqrt{x} = \sin \theta \Rightarrow dx = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$(5)$$

$$\theta = 0 \text{ when } x = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ when } x = \frac{1}{4} \quad (5)$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (5)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 2\theta) d\theta \quad (5)$$

$$= \left( \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \quad (5)$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (5)$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{24} - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = -\frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{24}.$$

(5)

35

(c)

$$\frac{d}{dx} (x \ln(x^2 + 1) + 2 \tan^{-1} x - 2x)$$

$$= x \left( \frac{1}{x^2 + 1} \right) (2x) + \ln(x^2 + 1) + \frac{2}{1 + x^2} - 2 \quad (10)$$

$$= \ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2 + 2 - 2(1 + x^2)}{1 + x^2}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

$$= \ln(x^2 + 1). \quad (5)$$

15

$$\int \ln(x^2 + 1) dx = x \ln(x^2 + 1) + 2 \tan^{-1} x - 2x + C, \text{ where } C \text{ is an arbitrary constant.} \quad (5)$$

$$\therefore \int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx = \ln 2 + 2 \left( \frac{\pi}{4} \right) - 2 \quad (5)$$

$$= \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2$$

$$= \frac{1}{2} (2 \ln 2 + \pi - 4)$$

$$= \frac{1}{2} (\ln 4 + \pi - 4) \quad (5)$$

15

$$\int_0^1 \ln[(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)] dx$$
$$= \int_0^1 \ln(x^2 + 1) + \int_0^1 \ln(x^2 - 2x + 2) dx \quad (5)$$

Now  $\int_0^1 \ln(x^2 - 2x + 2) dx$

$$= \int_0^1 \ln((1-x)^2 - 2(1-x) + 2) dx$$
$$= \int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx \quad (5)$$

$$\therefore \int_0^1 \ln[(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)] dx = 2 \int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx$$
$$= \ln 4 + \pi - 4 \quad (5)$$

<b>15</b>
-----------

16. Let  $P \equiv (x_1, y_1)$  and  $l$  be the straight line given by  $ax + by + c = 0$ . Show that the coordinates of any point on the line through the point  $P$  and perpendicular to  $l$  are given by  $(x_1 + at, y_1 + bt)$ , where  $t \in \mathbb{R}$ .

**Deduce** that the perpendicular distance from  $P$  to  $l$  is  $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

Let  $l$  be the straight line  $x + y - 2 = 0$ . Show that the points  $A \equiv (0, 6)$  and  $B \equiv (3, -3)$  lie on opposite sides of  $l$ .

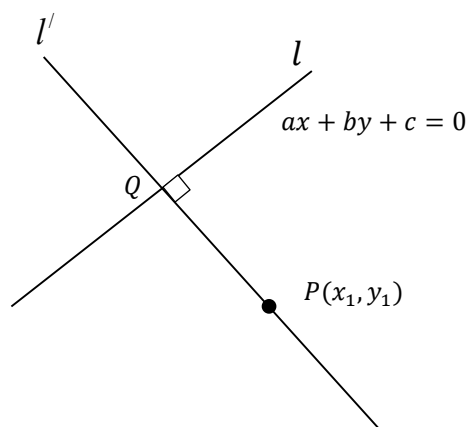
Find the acute angle between  $l$  and the line  $AB$ .

Find the equations of the circles  $S_1$  and  $S_2$  with centres at  $A$  and  $B$ , respectively, and touching  $l$ .

Let  $C$  be the point of intersection of  $l$  and the line  $AB$ . Find the coordinates of the point  $C$ .

Find also the equation of the other common tangent through  $C$  to  $S_1$  and  $S_2$ .

Show that the equation of the circle that passes through the origin, bisects the circumference of  $S_1$  and orthogonal to  $S_2$  is  $3x^2 + 3y^2 - 38x - 22y = 0$ .



(Note that  $a^2 + b^2 \neq 0$ )

The equation of  $l'$ :  $y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1)$ . (5)

$$\therefore \frac{y - y_1}{b} = \frac{x - x_1}{a} = t \text{ (say)} \quad (5)$$

Then  $x = x_1 + at$ ,  $y = y_1 + bt$  (5)

(This is valid even when  $a = 0$  and  $b \neq 0$  or when  $a \neq 0$  and  $b = 0$ .)

15

Let  $Q \equiv (x_2, y_2) \equiv (x_1 + at_1, y_1 + bt_1)$  be the point of intersection of  $l$  and  $l^\perp$ .

Since  $Q$  is on  $l$ , we have  $a(x_1 + at_1) + b(y_1 + bt_1) + c = 0$ .

$$\therefore t_1 = -\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2} \quad (5)$$

The perpendicular distance from  $P$  to  $l = PQ$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (5)$$

$$= \sqrt{a^2 t_1^2 + b^2 t_1^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} |t_1|. \quad (5)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{(a^2 + b^2)}$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (5)$$

20

$$\ell \quad 2 = 0 \quad (5)$$

$$(0 + 6 - 2)(3 - 3 - 2) = -8 < 0 \quad (5)$$

$\therefore A$  and  $B$  lie on opposite sides of  $\ell$

10

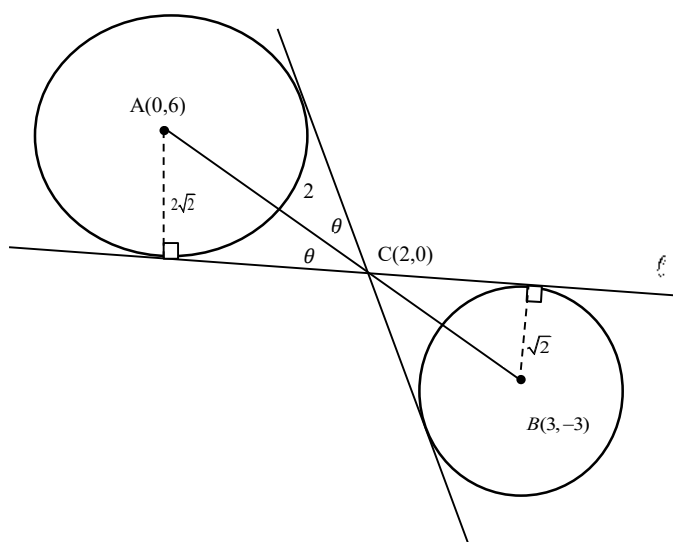
The gradient of  $AB = -3 \quad (5)$

The acute angle between  $\ell$  and  $AB$

$$\tan \theta = \left| \frac{-1 - (-3)}{1 + (-1)(-3)} \right| \quad (5)$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1} \left( \frac{1}{2} \right) \quad (5)$$

15



The radius of  $S_1 = \frac{|0+6-2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$  and the radius of  $S_2 = \frac{|3-3-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ .

$\therefore S_1 : x^2 + (y-6)^2 = 8$

i.e.  $x^2 + y^2 - 12y + 28 = 0$ .

$S_2 : (x-3)^2 + (y+3)^2 = 2$

i.e.  $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 16 = 0$

30

$AC : CB = 2\sqrt{2} : \sqrt{2} = 2 : 1$

$\therefore C \equiv \left( \frac{6+0}{3}, \frac{-6+6}{3} \right) = (2,0)$

Let  $m$  be the slope of the other common tangent through  $C$ .

$\therefore \tan \theta = \frac{1}{2} = \frac{|m - (-3)|}{|1 + m(-3)|}$

$\Leftrightarrow 1 - 3m = 2m + 6$  or  $3m - 1 = 2m + 6$

$\Leftrightarrow m = -1$  or  $m = 7$

$\therefore m = 7$ .

$\therefore$  The required equation is  $y - 0 = 7(x - 2)$ .

i.e.  $7x - y - 14 = 0$ .

25

Let  $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  be the required circle.

Since  $S$  passes through the origin,  $c = 0$ . (5)

As  $S$  bisects the circumference of  $S_1$ , the common chord passes through  $A$ .

The common chord is  $S - S_1 \equiv 2gx + (2f + 12)y - 28 = 0$  (5)

$A \equiv (0, 6)$  is on  $S - S_1 = 0$ , we have

$$(2f + 12)(6) - 28 = 0. \quad (5)$$

$$(f + 6)(3) - 7 = 0, \text{ which gives us } f = -\frac{11}{3}. \quad (5)$$

Since  $S$  is orthogonal to  $S_2$ ,  $2g(-3) + 2f(3) = 0 + 16$ . (5)

$$\therefore -3g + 3\left(\frac{-11}{3}\right) = 8, \text{ which gives us } \Rightarrow g = -\frac{19}{3}. \quad (5)$$

$\therefore$  The required circle is

$$x^2 + y^2 + 2\left(\frac{-19}{3}\right)x + 2\left(\frac{-11}{3}\right)y = 0 \quad (5)$$

i.e.  $3x^2 + 3y^2 - 38x - 22y = 0.$

35
----

17.(a) Write down  $\cos(A+B)$  and  $\cos(A-B)$  in terms of  $\cos A$ ,  $\cos B$ ,  $\sin A$  and  $\sin B$ .

Hence, show that  $\cos C + \cos D = 2 \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$

Deduce that  $\cos C - \cos D = -2 \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$ .

Solve the equation  $\cos 9x + \cos 7x + \cot x (\cos 9x - \cos 7x) = 0$ .

(b) In the usual notation, state and prove the **Cosine Rule** for a triangle  $ABC$ .

Let  $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$  for  $n \in \mathbb{Z}$ . Show that  $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$ .

In a triangle  $ABC$ , it is given that  $AB = 20$  cm,  $BC = 10$  cm and  $\sin 2B = \frac{24}{25}$ .

Show that there are two distinct such triangles and find the length of  $AC$  for each.

(c) Solve the equation  $\sin^{-1}\left[(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}\right] + \tan^{-1}(e^x) = \tan^{-1}(2)$ .

(a)

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \longrightarrow$$

①

5

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \longrightarrow$$

②

5

10

① + ②

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos A \cos B$$

5

Taking  $A+B=C$  and  $A-B=D$ , we have  $A = \frac{C+D}{2}$ ,  $B = \frac{C-D}{2}$

$$\therefore \cos C + \cos D = 2 \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right).$$

5

10

Now,  $\cos C - \cos D = \cos C + \cos(\pi - D)$

5

$$= 2 \cos\left(\frac{C+(\pi-D)}{2}\right) \cos\left(\frac{C-(\pi-D)}{2}\right)$$

$$= 2 \sin\left(\frac{D-C}{2}\right) \sin\left(\frac{C+D}{2}\right)$$

$$= -2 \sin\left(\frac{C-D}{2}\right) \sin\left(\frac{C+D}{2}\right).$$

5

10



$$\cos 9x + \cos 7x + \cot x (\cos 9x - \cos 7x) = 0 \quad (\sin x \neq 0)$$

$$\therefore 2 \cos 8x \cos x + \frac{\cos x}{\sin x} (-2 \sin 8x \sin x) = 0 \quad (5)$$

$$\therefore \cos x = 0 \text{ or } (\cos 8x - \sin 8x) = 0. \quad (5)$$

$$\therefore \cos x = 0 \text{ or } \tan 8x = 1.$$

$$x = 2m\pi \pm \frac{\pi}{2} \text{ for } m \in \mathbb{Z} \text{ or } 8x = n\pi + \frac{\pi}{4} \text{ for } n \in \mathbb{Z}$$

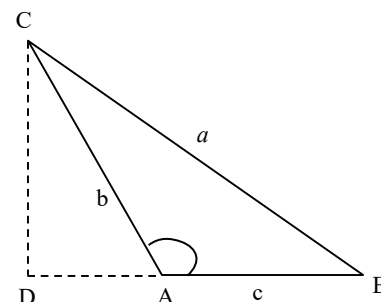
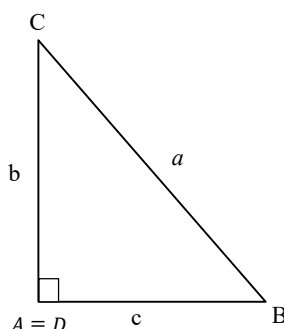
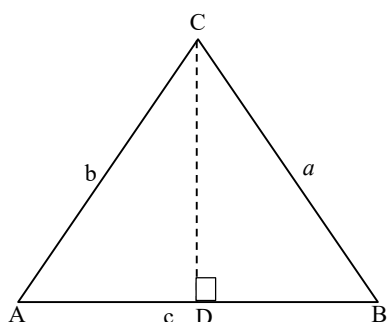
$$x = 2m\pi \pm \frac{\pi}{2} \text{ for } m \in \mathbb{Z} \text{ or } x = \frac{n\pi}{8} + \frac{\pi}{32} \text{ for } n \in \mathbb{Z}. \quad (5) + (5)$$

20

(b)

Cosine Rule: Let  $ABC$  be a triangle. (5)

$$\text{Then } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



Proof: Let  $D$  be the perpendicular of the foot from  $C$  on  $AB$ . Then by the Pythagoras Theorem.

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 \quad (1) \quad (5)$$

Case (i)  $A$  is acute;

$$DC = b \sin A$$

$$DB = c - b \cos A \quad (5)$$

Case (ii)  $A$  is obtuse

$$DC = b \sin(\pi - A) = b \sin A$$

$$DB = c + b \cos(\pi - A) = c - b \cos A \quad (5)$$

$$\therefore \text{In both cases, } (1) \text{ gives us } a^2 = b^2 \sin^2 A + (c - b \cos A)^2$$

$$= b^2 \sin^2 A + c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A \quad (\because \cos^2 A = 1) \quad (5)$$

$$\text{When } A = \frac{\pi}{2}, \cos A = 0 \text{ and this holds in that case too.} \quad (5)$$

30

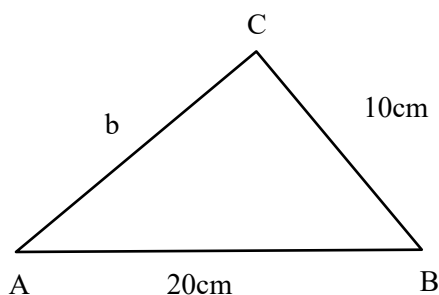
Let  $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ . ( $\cos x \neq 0$ )

$$\sin 2x = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x} \times \cos^2 x \quad (5)$$

$$= \frac{2 \tan x}{\sec^2 x}$$

$$= \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \quad (5)$$

10



$$\sin 2B = \frac{24}{25} \Rightarrow B \text{ is acute}$$

$$\therefore \frac{2t}{1+t^2} = \frac{24}{25}, \text{ where } t = \tan B \quad (5)$$

$$12t^2 - 25t + 12 = 0$$

$$(4t - 3)(3t - 4) = 0$$

$$t = \frac{3}{4} \text{ or } \frac{4}{3} \quad (5) + (5)$$

$\therefore$  two distinct solutions for  $B$ .

$\therefore$  two distinct such triangles.

B is an acute angle  $\cos B = \frac{3}{5}$  or  $\cos B = \frac{4}{5}$

When  $\cos B = \frac{3}{5}$ ;  $AC^2 = (20)^2 + 10^2 - 2(20)(10)\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow AC = 2\sqrt{65}$ . (5)

When  $\cos B = \frac{4}{5}$ ;  $AC^2 = (20)^2 + (10)^2 - 2(20)(10)\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow AC = 6\sqrt{5}$ . (5)

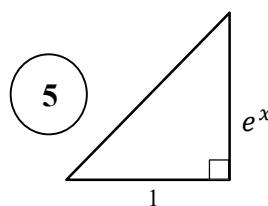
25

(c)

$$-1 - 2x - \frac{1}{2} - 2x - \frac{1}{2} > 0$$

Then  $\sin \alpha = (1 + e^{-2x})^{\frac{1}{2}} = \frac{e^x}{\sqrt{1 + (e^x)^2}}$

$\therefore \tan \alpha = e^x$ . (5)



Then, the given equation becomes  $\alpha + \alpha = \lambda$ .

$$\therefore \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \tan \lambda \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{2e^x}{1 - e^{2x}} = 2 \quad (5)$$

$$\Rightarrow e^x = 1 - e^{2x}$$

$$\Rightarrow e^{2x} + e^x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (5)$$

Since  $e^x > 0$ , (-) sign cannot be taken.

$$\therefore e^x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (5)$$

$$\therefore x = \ln \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right). \quad (5)$$

Note that this value of  $x$  satisfies the given equation.

35
----

G. C. E (Advanced Level) Examination - 2021(2022)

**10 - Combined Mathematics II**

**Distribution of Marks**

**Paper II**

$$\text{Part A} \quad = \quad 10 \times 25 \quad = \quad 250$$

$$\text{Part B} \quad = \quad 05 \times 150 \quad = \quad 750$$

$$\text{Total} \quad = \quad \frac{1000}{10}$$

$$\text{Final marks} \quad = \quad 100$$

## Common Techniques of Marking Answer Scripts.

It is compulsory to adhere to the following standard method in marking answer scripts and entering marks into the mark sheets.

1. Use a red color ball point pen for marking. (Only Chief/Additional Chief Examiner may use a mauve color pen.)
2. Note down Examiner's Code Number and initials on the front page of each answer script.
3. Write off any numerals written wrong with a clear single line and authenticate the alterations with Examiner's initials.
4. Write down marks of each subsection in a  $\triangle$  and write the final marks of each question as a rational number in a  $\square$  with the question number. Use the column assigned for Examiners to write down marks.

**Example:**

**Question No. 03**

(i)	.....	✓	$\triangle$ $\frac{4}{5}$
	.....		
	.....		
(ii)	.....	✓	$\triangle$ $\frac{3}{5}$
	.....		
	.....		
(iii)	.....	✓	$\triangle$ $\frac{3}{5}$
	.....		
	.....		

$$\textcircled{03} \quad (i) \quad \frac{4}{5} \quad + \quad (ii) \quad \frac{3}{5} \quad + \quad (iii) \quad \frac{3}{5} \quad = \quad \square \frac{10}{15}$$

### MCQ answer scripts: (Template)

1. Marking templets for G.C.E.(A/L) and GIT examination will be provided by the Department of Examinations itself. Marking examiners bear the responsibility of using correctly prepared and certified templates.
2. Then, check the answer scripts carefully. If there are more than one or no answers Marked to a certain question write off the options with a line. Sometimes candidates may have erased an option marked previously and selected another option. In such occasions, if the erasure is not clear write off those options too.
3. Place the template on the answer script correctly. Mark the right answers with a 'v' and the wrong answers with a 'X' against the options column. Write down the number of correct answers inside the cage given under each column. Then, add those numbers and write the number of correct answers in the relevant cage.

**Structured essay type and assay type answer scripts:**

1. Cross off any pages left blank by candidates. Underline wrong or unsuitable answers. Show areas where marks can be offered with check marks.
2. Use the right margin of the overland paper to write down the marks.
3. Write down the marks given for each question against the question number in the relevant cage on the front page in two digits. Selection of questions should be in accordance with the instructions given in the question paper. Mark all answers and transfer the marks to the front page, and write off answers with lower marks if extra questions have been answered against instructions.
4. Add the total carefully and write in the relevant cage on the front page. Turn pages of answer script and add all the marks given for all answers again. Check whether that total tallies with the total marks written on the front page.

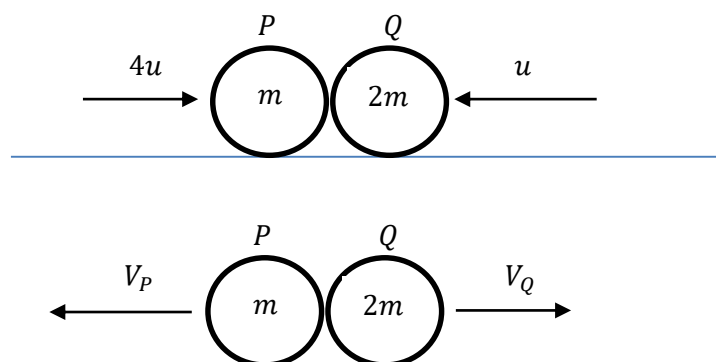
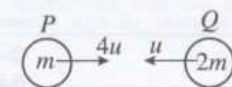
**Preparation of Mark Sheets.**

Except for the subjects with a single question paper, final marks of two papers will not be calculated within the evaluation board this time. Therefore, add separate mark sheets for each of the question paper. Write paper 01 marks in the paper 01 column of the mark sheet and write them in words too. Write paper II Marks in the paper II Column and wright the relevant details.

\*\*\*

Part A

1. A particle  $P$  of mass  $m$  and a particle  $Q$  of mass  $2m$  moving on a smooth horizontal table along the same straight line towards each other with speeds  $4u$  and  $u$ , respectively, collide directly. The coefficient of restitution between  $P$  and  $Q$  is  $\frac{4}{5}$ . Show that the particles  $P$  and  $Q$  move away from each other after the collision. Find the time taken, after the collision, for  $P$  and  $Q$  to be at a distance  $a$  apart.



$\underline{I} = \Delta(m\underline{V})$  for the system:

$$0 = (2mV_Q - mV_P) - (4mu - 2mu) \quad (5)$$

$$\Rightarrow 2V_Q - V_P = 2u \quad (1)$$

$I = \Delta(m\underline{v})$  for  $P$  and  $Q$

By Newton's Experimental Law,

$$V_Q + V_P = \frac{4}{5}(4u + u) \quad (5)$$

$$V_Q + V_P = 4u \quad (2)$$

$$\therefore V_Q = 2u \text{ and } V_P = 2u. \quad (5)$$

Newton's Experimental Law

For both  $V_p$  and  $V_Q$

$(1) + (2): V_Q > 0 \text{ and } V_P > 0.$

$\therefore P$  and  $Q$  move away from each other after the collision. (5)

For both  $V_p > 0$  and  $V_Q > 0$  or equivalent

$$\underline{V}(P, Q) = \underline{V}(P, E) + \underline{V}(E, Q)$$

$$= \overrightarrow{2u} + \overrightarrow{2u}$$

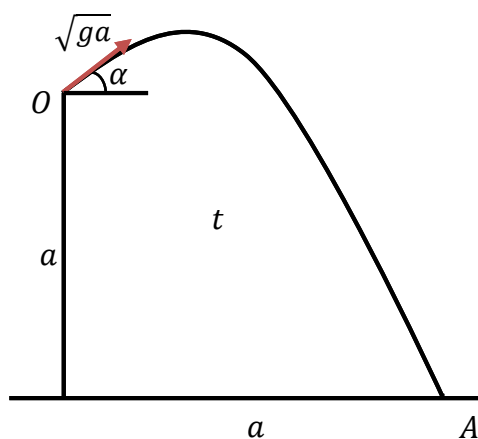
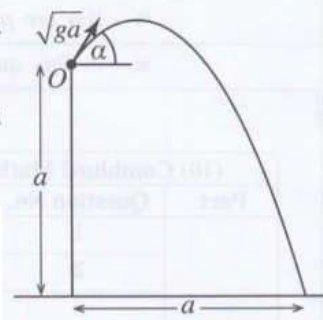
$$= 4u \leftarrow$$

The required time =  $\frac{a}{4u}$ . (5)

$\frac{a}{4u}$  seen.



2. A particle is projected from a point  $O$  at a vertical distance  $a$  above a horizontal ground with initial velocity  $\sqrt{ga}$  and at an angle  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) to the horizontal, as shown in the figure. The particle strikes the ground at a horizontal distance  $a$  from  $O$ . Show that  $\tan \alpha = 1 + \sqrt{2}$ .



From  $O$  to  $A$   $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ :

$$\rightarrow a = \sqrt{ga} \cos \alpha t \text{ ----- (1)}$$

5

$$\rightarrow s = u + \frac{1}{2}at^2$$

$$\uparrow -a = \sqrt{ga} \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \text{ ----- (2)}$$

5

$$\uparrow s = u + \frac{1}{2}at^2$$

① given us  $t = \frac{a}{\sqrt{ga} \cos \alpha}$ .

② given us  $-a = a \tan \alpha - \frac{1}{2}g \frac{a^2}{ga \cos^2(\alpha)}$ .

$$\therefore -2 = 2 \tan \alpha - (1 + \tan^2 \alpha).$$

5

For the quadratic in  $\tan \alpha$

i.e.  $\tan^2 \alpha - 2 \tan \alpha - 1 = 0$ .

$$\therefore \tan \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

5

both  $\pm$

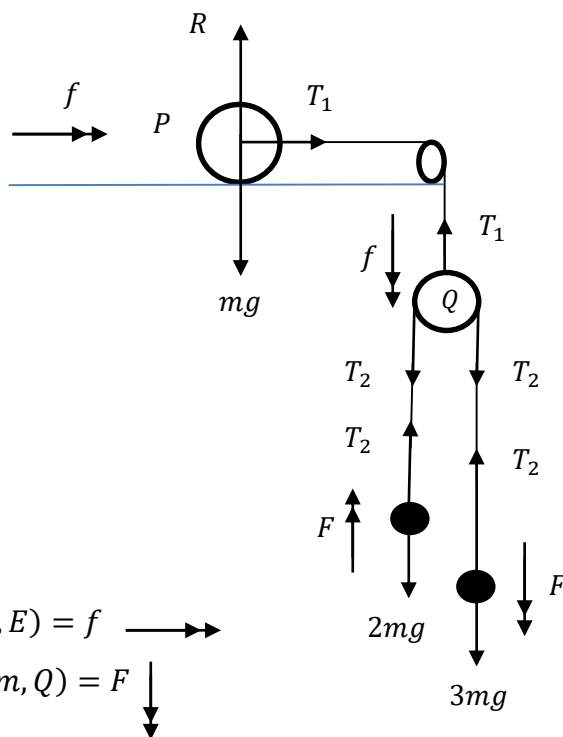
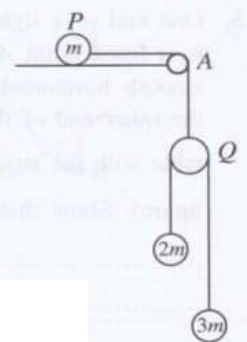
(-) sign is not possible as  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

$$\therefore \tan \alpha = 1 + \sqrt{2}.$$

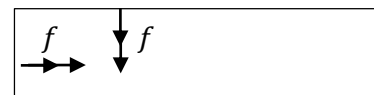
5

Selecting the correct sign

3. A particle  $P$  of mass  $m$  is placed on a smooth horizontal table and is connected to a light smooth pulley  $Q$  by a light inextensible string which passes over a fixed small smooth pulley at the point  $A$  of the edge of the table. A light inextensible string which passes over the pulley  $Q$  is connected to particles of masses  $2m$  and  $3m$ , as shown in the figure. The particles and the strings lie in a vertical plane. The system is released from rest with the strings taut. Obtain equations sufficient to determine the acceleration of  $Q$ .



5



Applying  $\underline{F} = m\underline{a}$ :

$\textcircled{P} \rightarrow T_1 = mf$   $\textcircled{5}$

$\underline{F} = m\underline{a}$  for  $P$

$\textcircled{Q} \downarrow 2T_2 - T_1 = 0$   $\textcircled{5}$

$\underline{F} = m\underline{a}$  for  $Q$

$\textcircled{2m} \uparrow T_2 - 2mg = 2m(F - f)$   $\textcircled{5}$

$\underline{F} = m\underline{a}$  for  $2m$

$\textcircled{3m} \downarrow 3mg - T_2 = 3m(F + f)$   $\textcircled{\phantom{5}}$

$\underline{F} = m\underline{a}$  for  $3m$

or

$\textcircled{Q} \textcircled{2m} \text{ and } \textcircled{3m} \downarrow T_1 - 2mg - 3mg = 2m(f - F) - 3m(f + F)$

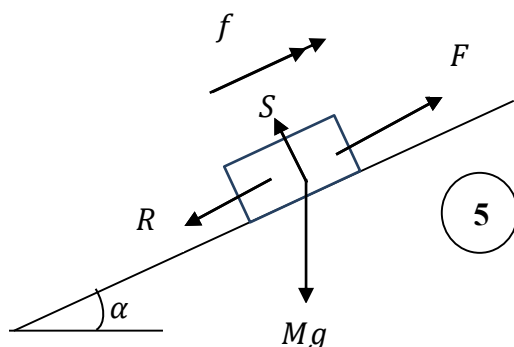
$\underline{F} = m\underline{a}$  for  $Q, 2m$  and  $3m$

Note: Any 4 correct independent equations

$\textcircled{20}$

**25**

4. A car of mass  $M$  kg moves upwards with a constant acceleration along a straight road of inclination  $\sin^{-1}\left(\frac{1}{20}\right)$  to the horizontal. There is a constant resistance of  $R$  N to its motion. The distance travelled by the car to increase its speed from  $36 \text{ km h}^{-1}$  to  $72 \text{ km h}^{-1}$  is  $500 \text{ m}$ . Obtain equations sufficient to determine the power exerted by the car when its speed is  $54 \text{ km h}^{-1}$ .



For forces with or without  $S$

$$\sin \alpha = \frac{1}{20}$$

$$\frac{36 \times 1000}{3600} = 10 \text{ ms}^{-1}$$

$$\frac{72 \times 1000}{3600} = 20 \text{ ms}^{-1} \quad (5)$$

For all three conversions of speeds

$$\frac{54 \times 1000}{3600} = 15 \text{ ms}^{-1}$$

$$\nearrow v^2 = u^2 + 2as:$$

$$20^2 = 10^2 + 2f(500) \quad (5)$$

Applying  $v^2 = u^2 + 2as$  ↗

$$f = \frac{150}{500} = \frac{3}{10} \text{ ms}^{-2}$$

$$\nearrow \underline{F} = m\underline{a}:$$

$$F - R - Mg \sin \alpha = Mf \quad (5)$$

Applying  $\underline{F} = m\underline{a}$  ↗

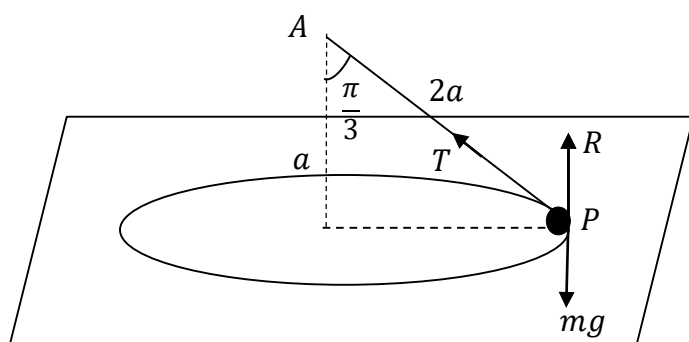
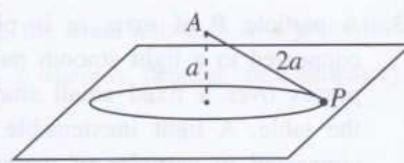
$$P = F \cdot V$$

$$= F \cdot 15 \quad (5)$$

$P = F \cdot 15$  seen

25

5. One end of a light inextensible string of length  $2a$  is attached to a fixed point  $A$  which is at a distance  $a$  vertically above a smooth horizontal table. A particle  $P$  of mass  $m$ , attached to the other end of the string, moves in a horizontal circle on the table with the string taut and with uniform speed  $\sqrt{\frac{ga}{2}}$  (see the figure). Show that the magnitude of the normal reaction on the particle  $P$  from the table is  $\frac{5}{6}mg$



5

For the forces

Applying  $\underline{F} = m\underline{a}$ :

$$\leftarrow T \sin \frac{\pi}{3} = m \cdot \frac{ga}{2(2a \sin \frac{\pi}{3})} \quad (5)$$

$\underline{F} = m\underline{a}$  ←

$$\therefore T = \frac{mg}{3} \quad (5)$$

$T = \frac{mg}{3}$  seen or implied

$$\uparrow R - mg + T \cos \frac{\pi}{3} = 0 \quad (5)$$

$\underline{F} = m\underline{a}$  ↑

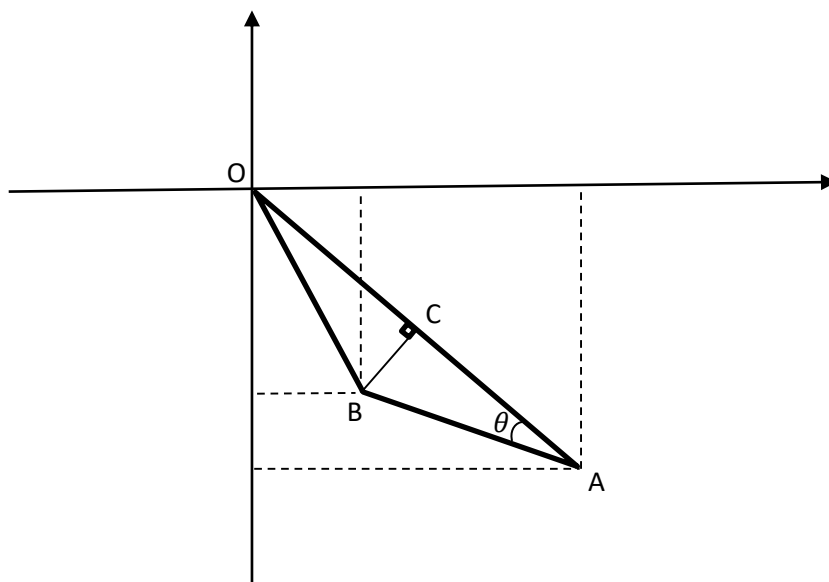
$$\therefore R = mg - \frac{mg}{6}$$

$$= \frac{5}{6}mg \quad (5)$$

Work leading to the answer

25

6. In the usual notation, the position vectors of two points  $A$  and  $B$ , with respect to a fixed origin  $O$  are  $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$  and  $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ , respectively. Using  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$ , find  $\widehat{OAB}$ .  
Let  $C$  be the point on  $OA$  such that  $\widehat{OCB} = \frac{\pi}{2}$ . Find  $\overrightarrow{OC}$ .



$$\overrightarrow{OA} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} \text{ and } \overrightarrow{OB} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

$$\therefore \overrightarrow{AO} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \text{ and}$$

$$\overrightarrow{AB} = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) - (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) \quad (5)$$

$$= -\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AO}| |\overrightarrow{AB}| \cos \theta \quad (5)$$

$$2 + 3 = \sqrt{13}\sqrt{2} \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{5}{\sqrt{26}} \quad (5)$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)$$

$$\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA}, \text{ where } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ and } \overrightarrow{CB} = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) - \lambda(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \text{ gives as } 2(1 - 2\lambda) - 3(-2 + 3\lambda) = 0 \quad (5)$$

$$\therefore \lambda = \frac{8}{13} \quad (5)$$

$$\text{and } \overrightarrow{OC} = \frac{8}{13} (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$$

$\overrightarrow{AO}$  is terms of  $\mathbf{i}$  and  $\mathbf{j}$

Definition of  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$   
or equivalent

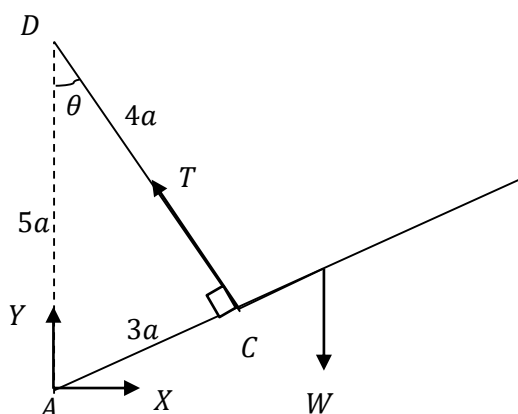
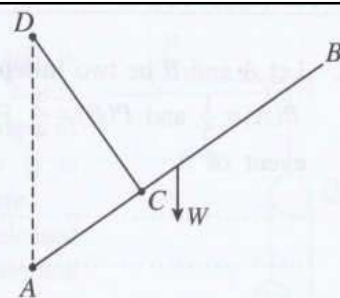
$$\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{26}} \text{ seen}$$

condition for  $\widehat{OCB} = \frac{\pi}{2}$

value of  $\lambda$  or equivalent

25

7. A uniform rod  $AB$  of length  $8a$  and weight  $W$  has its end  $A$  smoothly hinged to a fixed point. One end of a light inextensible string of length  $4a$  is attached to the point  $C$  on the rod such that  $AC = 3a$ , and the other end is attached to a fixed point  $D$  vertically above  $A$  such that  $AD = 5a$  (see the figure). The rod is in equilibrium. Show that the tension of the string is  $\frac{16}{15}W$ . Also, find the horizontal component of the reaction at  $A$ .



5

For the forces

$$\hat{ACD} = \frac{\pi}{2}$$

5

For the equilibrium of the rod:

$$\hat{ACD} = \frac{\pi}{2} \text{ seen}$$

$$\curvearrowleft A \quad W \times 4a \cos \theta - T \times 3a = 0 \quad 5$$

An equation sufficient to find  $T$ .

$$\therefore T = \frac{4W}{3} \cos \theta$$

$$= \frac{4W}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{16W}{15} \quad 5$$

work leading to the answer

$$\rightarrow X = T \sin \theta$$

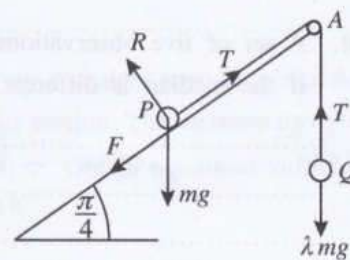
$$= \frac{16W}{15} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{16W}{25} \quad 5$$

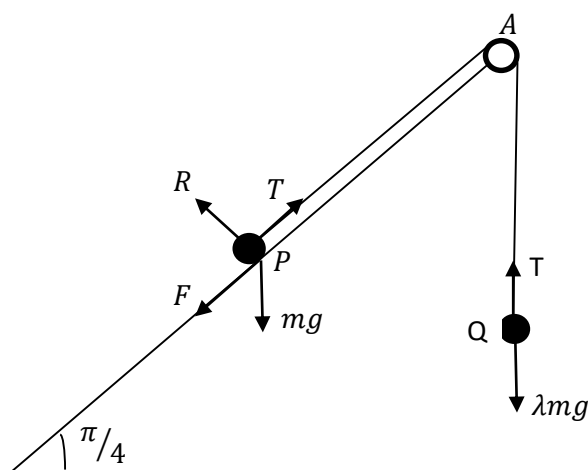
$$\frac{16W}{25} \text{ seen.}$$

25

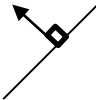
8. A particle  $P$  of mass  $m$  is placed on a rough plane inclined at an angle  $\frac{\pi}{4}$  to the horizontal. One end of a light inextensible string which passes over a fixed small smooth pulley fixed to the edge of the inclined plane at  $A$ , is attached to the particle  $P$  and the other end to a particle  $Q$  of mass  $\lambda mg$ , as shown in the figure. The coefficient of friction between the particle  $P$  and the inclined plane is  $\frac{1}{2}$ . The line  $PA$  is a line of greatest slope of the inclined plane and the particles  $P$  and  $Q$  stay in equilibrium with the string taut.



Show that  $\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \lambda \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}$ . (The relevant forces are marked in the figure.)




For the equilibrium:

(P)   $R - mg \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$  (5)


$\therefore R = \frac{mg}{\sqrt{2}}$

An equation leading to the value of  $R$ .

(Q)   $T - \lambda mg = 0$  (5)

$\therefore T = \lambda mg$

An equation leading to the value of  $T$ .

(P)   $T - F - mg \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$  (5)

$\therefore F = \lambda mg - \frac{mg}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\lambda - 1)$

An equation leading to the value of  $F$ .

For the equilibrium of  $P$ :

$\frac{1}{2} \geq \frac{|F|}{R}$  (5)

$\therefore |\sqrt{2}\lambda - 1| \leq \frac{1}{2}$

Condition for non-slipping with absolute value.

(5)  $\therefore \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \lambda \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}$

work leading to the answer

25

9. Let  $A$  and  $B$  be two **independent** events of a sample space  $\Omega$ . In the usual notation, it is given that  $P(A) = \frac{1}{5}$  and  $P(B) = \frac{3}{4}$ . Find  $P(A \cup B)$ ,  $P(A | A \cup B)$  and  $P(B | A')$ , where  $A'$  denotes complementary event of  $A$ .

$$P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{3}{4}$$

Since  $A$  and  $B$  are independent,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (5)$$

$$= \frac{3}{20}$$

For the condition for independence

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{3}{4} - \frac{3}{20} = \frac{4}{5}$$

Formula a for  $P(A \cup B)$

$$P(A | A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{1/5}{4/5} = \frac{1}{4} \quad (5)$$

$\frac{1}{4}$  or equivalent seen.

$$P(B | A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')}$$

$$P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{3}{20} = \frac{3}{5} \quad (5)$$

$\frac{3}{5}$  or equivalent seen.

$$\left( \boxed{\text{OR}} \right) P(B \cap A') = P(B) \cdot P(A') = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P(B | A') = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4} \quad (5)$$

$\frac{3}{4}$  or equivalent seen.

25



10. A set of five observations of positive integers has mean 6 and range 10. It has two modes. If the median is different from the modes, find the five observations.

Let the numbers in the increasing order be

$$a, a, b, c, c$$

Since the range is 10, we have  $c - a = 10$ .

5

Condition for the range

$$\therefore c = a + 10 \quad \text{—————(1)}$$

Since the mean is 6, we have  $\frac{2a+b+2c}{5} = 6$ .

5

For this or an equivalence

(1) and (2) gives us  $4a + b + 20 = 30$

$$i.e. \quad 4a + b = 10 \quad \text{—————(3)}$$

5

An equation sufficient to determine the observations

Since  $a$  and  $b$  are positive integers,

Then, (3) Implies that  $4a \leq 9$  and the only possible values for  $a$  are 1 and 2.

If  $a = 1$ , then  $b = 6$ .

If  $a = 2$ , then  $b = 2$ , and it is not possible as the median is different from the modes.

5

Mean  $\neq$  mode used.

$\therefore$  The numbers are 1, 1, 6, 11, 11.

1, 1, 6, 11, 11 seen.

25

11.(a) A particle  $P$ , projected with a velocity  $u \text{ m s}^{-1}$  vertically upwards from a point  $O$ , reaches a point  $A$  after 4 seconds and comes back to  $A$  again after another 2 seconds. At the instant when the particle  $P$  is at  $A$  for the second time, another particle  $Q$  is projected with the same velocity  $u \text{ m s}^{-1}$  vertically upwards from  $O$ . Sketch the velocity-time graph for the motions of  $P$  and  $Q$ , in the same diagram.

**Hence**, find the value of  $u$  and the height of  $OA$  in terms of  $g$ , and the time taken by  $Q$  to collide with  $P$ .

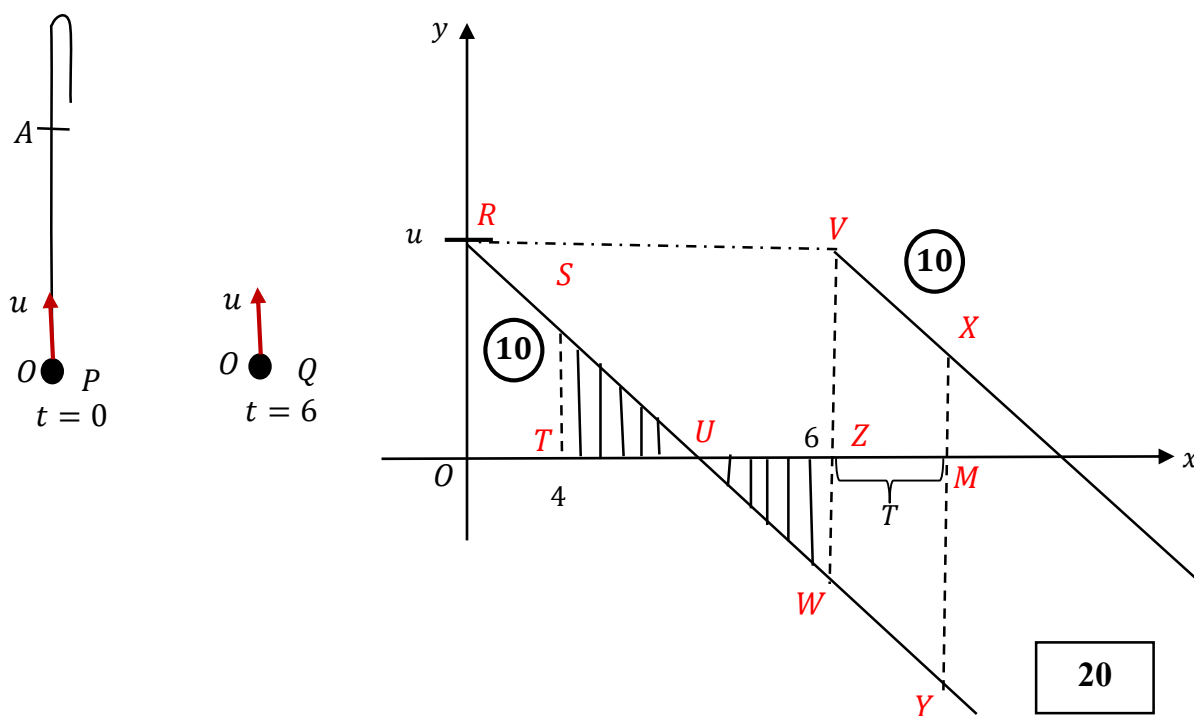
(b) A ship  $S$  is sailing due north with uniform speed  $u \text{ km h}^{-1}$  relative to earth. At a certain instant, a boat  $P$  is at a distance  $d \text{ km}$  east of  $S$  and another boat  $Q$  is at a distance  $\sqrt{3}d \text{ km}$  south of  $S$ . The boat  $P$  travels in a straight line path intending to intercept  $S$  with uniform speed  $2u \text{ km h}^{-1}$  relative to earth and the boat  $Q$  travels in a straight line path intending to intercept  $P$  with uniform speed  $3u \text{ km h}^{-1}$  relative to earth.

Show that

(i) the time taken by the boat  $P$  to intercept the ship  $S$  is  $\frac{d}{\sqrt{3}u} \text{ h}$ ,

(ii) the boat  $P$  intercepts the ship  $S$  before the boat  $Q$  intercepts the boat  $P$ .

(a)



Since

$$TU = UZ$$

$$TZ = 2 \Rightarrow TU = 1. \quad (5)$$

$$\therefore OU = 5. \quad (5)$$

From  $\Delta ROU$ , we have  $g = \frac{u}{5}$ .

$$\therefore u = 5g. \quad (5)$$

From  $\Delta STU$ , we have  $g = \frac{ST}{1} = ST. \quad (5)$

The height of  $OA = \text{Area of } ORST.$

$$= \frac{1}{2}(OR + ST) \times OT \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2}(u + g) \times 4 \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} \times 6g \times 4$$

$$= 12g \quad (5)$$

Let  $T$  be the time taken by  $Q$  to collide with  $P$ .

$$OA = \text{Area } VZMX + \text{Area } WZMY$$

$$= \text{Area } VWYX \quad (10)$$

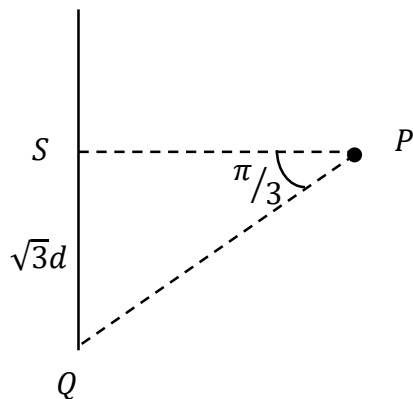
$$= \frac{1}{2}(VW + XT) \times ZM$$

$$\therefore 12g = \frac{1}{2}(6g + 6g) \times T \quad (10)$$

$$\therefore T = 2 \text{ sec.} \quad (5)$$

60

(b)



$$\underline{V}(S, E) = \uparrow u$$

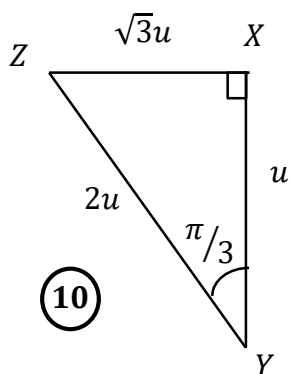
$$\underline{V}(P, E) = 2u$$

$$\underline{V}(Q, E) = 3u$$

$$\underline{V}(P, S) = \leftarrow$$

$$\underline{V}(Q, P) = \begin{array}{c} \nearrow \\ \pi/3 \end{array}$$

(i)

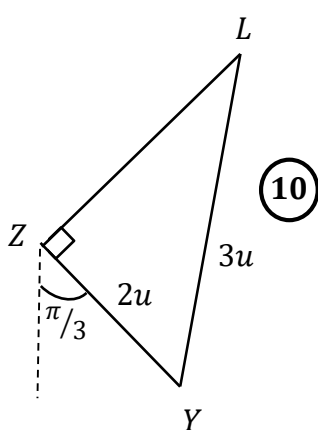


$$\begin{aligned} \underline{V}(P, S) &= \underline{V}(P, E) + \underline{V}(E, S) && \textcircled{5} + \textcircled{5} \\ &= \underline{V}(E, S) + \underline{V}(P, E) \\ &= \overline{XY} + \overline{YZ} \\ &= \overline{XZ} \end{aligned}$$

$$\text{The required time} = \frac{d}{XZ} = \frac{d}{\sqrt{3}u} h. \quad \textcircled{5}$$

25

(ii)



$$\begin{aligned} \underline{V}(Q, P) &= \underline{V}(Q, E) + \underline{V}(E, P) && \textcircled{5} \\ &= \underline{V}(E, P) + \underline{V}(Q, E) \\ &= \overline{ZY} + \overline{YL} \\ &= \overline{ZL} \end{aligned}$$

$$ZL = \sqrt{(3u)^2 - (2u)^2} = \sqrt{5}u \quad \textcircled{5}$$

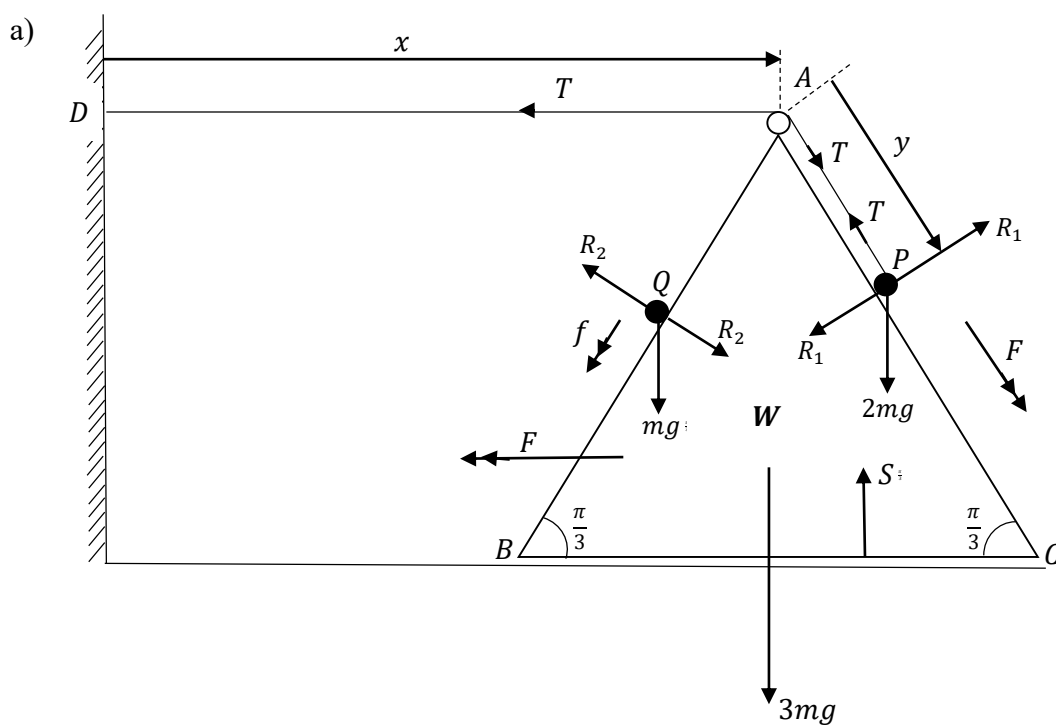
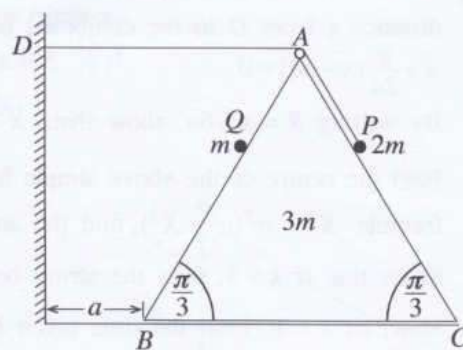
Let  $t_2$  be the time taken by  $Q$  to intercept  $P$ .

$$\begin{aligned} \text{Then, } t_2 &= \frac{\sqrt{3} d \sec(\pi/6)}{\sqrt{5} u} \\ &= \frac{2d}{\sqrt{5} u} h. && \textcircled{10} \end{aligned}$$

$$\therefore t_1 < t_2. \quad \textcircled{10}$$

70

12.(a) Equilateral triangle  $ABC$  in the figure is the vertical cross-section through the centre of gravity of a smooth uniform wedge of mass  $3m$  with  $AB = BC = AC = 6a$  such that the face containing  $BC$  is placed on a smooth horizontal floor. The lines  $AB$  and  $AC$  are lines of greatest slope of the faces containing those. The point  $D$  is a fixed point on the vertical wall which is at a distance  $a$  from the point  $B$  of the wedge, and in the plane of  $ABC$  such that  $AD$  is horizontal. One end of a light inextensible string of length  $5a$  passing over a small smooth pulley fixed at  $A$  is attached to a particle  $P$  of mass  $2m$  kept on  $AC$  and the other end is attached to the fixed point  $D$  on the wall. A particle  $Q$  of mass  $m$  is held on  $AB$ . The system is released from the rest with  $AP = AQ = a$ , as shown in the figure. Obtain equations sufficient to determine the velocity of  $Q$  relative to the wedge at the instant when the wedge strikes the wall.



$$x + y = \text{constant.} \quad (5)$$

$$\therefore \ddot{x} + \ddot{y} = 0 \quad (1) \quad (5)$$

$$\underline{a}(W, E) = F \leftarrow$$

$$\therefore \underline{a}(P, W) = F \searrow \quad (\text{by (1)}) \quad (5)$$

$$\text{Also, let } \underline{a}(Q, W) = f \swarrow$$

Applying  $\underline{F} = m\underline{a}$  :

$$\textcircled{P} \searrow \quad \textcircled{5} \text{ (for forces)} \quad \textcircled{5} \text{ (for acceleration)} \\ 2mg \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - T = 2m\left(F - F \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \quad \textcircled{5} \text{ (for equation)}$$

$$\textcircled{Q} \swarrow \quad mg \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = m\left(f + F \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \quad \textcircled{5} \text{ (for equation)} \\ \textcircled{5} \quad \quad \quad \textcircled{5}$$

For the system ( $P$ ,  $Q$ , and  $W$ ),  $\longleftarrow$

$$T = 3mF + 2m\left(F - F \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + m\left(F + f \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \quad \textcircled{5} \text{ (for equation)} \\ \textcircled{5} \quad \textcircled{5} \quad \quad \textcircled{5} \quad \quad \quad \textcircled{5}$$

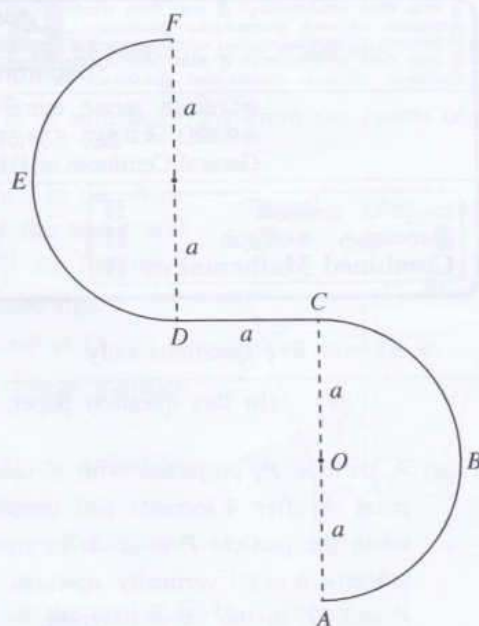
Applying  $S = ut + \frac{1}{2}at^2$  :

$$\longleftarrow \textcircled{W} \quad a = \frac{1}{2}ft^2 \quad \textcircled{5}$$

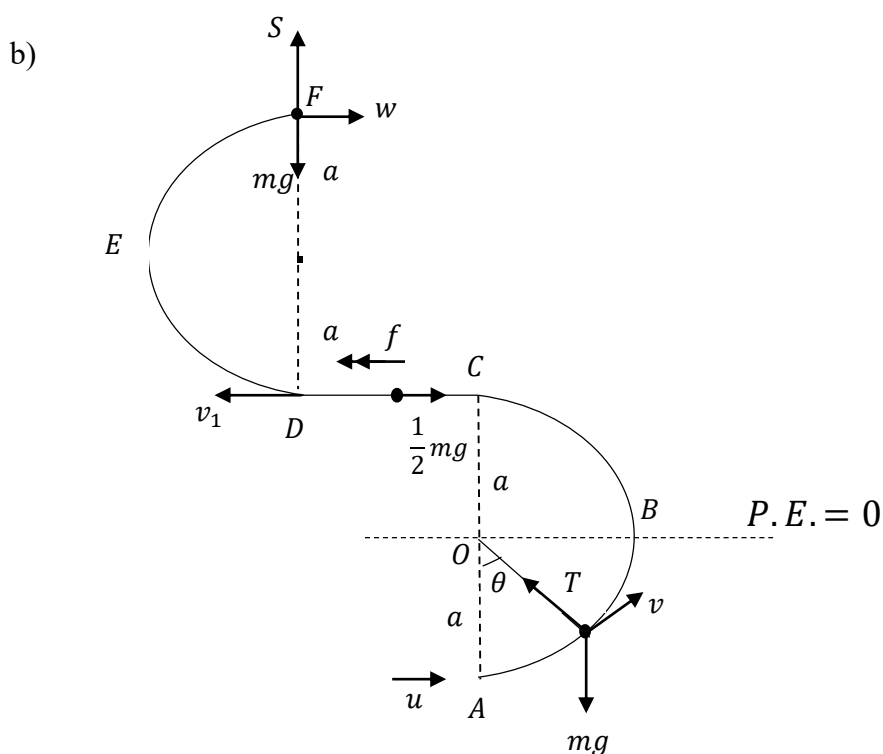
Applying  $v = u + at$  :

$$v = Ft \quad \textcircled{5}$$

(b) A thin wire  $ABCDEF$  is fixed in a vertical plane, as shown in the figure. The portion  $ABC$  is a thin **smooth** semicircular wire with centre  $O$  and radius  $a$ . The portion  $CD$  is a thin **rough** horizontal wire of length  $a$ . The portion  $DEF$  is also a thin **smooth** semicircular wire of radius  $a$ . The diameters  $AC$  and  $DF$  are vertical. A small smooth bead  $P$  of mass  $m$  is placed at  $A$  and is given a velocity  $u$  ( $>3\sqrt{ag}$ ) horizontally, and begins to move along the wire. It is given that the magnitude of the frictional force on the bead from the wire, during its motion from  $C$  to  $D$ , is  $\frac{1}{2}mg$ . Show that the speed  $v$  of the bead  $P$ , during its motion from  $A$  to  $C$ , when  $\overrightarrow{OP}$  makes an angle  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) with  $\overrightarrow{OA}$ , is given by  $v^2 = u^2 - 2ag(1 - \cos \theta)$ .



Show that the speed  $w$  of the bead  $P$  just before it leaves the wire at  $F$  is given by  $w^2 = u^2 - 9ag$ , and find the reaction on the bead  $P$  from the wire at that instant.



By the conservation of energy,

$$\frac{1}{2}mv^2 - mga \cos \theta = \frac{1}{2}mu^2 - mga \quad (15) \quad \text{PE (5)+KE (5)+Equation (5)}$$

$$\therefore v^2 = u^2 - 2ga(1 - \cos \theta) \quad (5)$$

$$\text{When } \theta = \pi, v^2 = u^2 - 4ga \quad (1) \quad (5)$$

25
----

From  $C$  to  $D$ ,  $\leftarrow \underline{F} = m\underline{a}$  :

$$-\frac{1}{2}mg = mf \quad (5)$$

$$\therefore f = -\frac{g}{2} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \leftarrow v^2 = u^2 + 2as : v_1^2 &= (u^2 - 4ga) - 2 \cdot \frac{g}{2} a \\ &= u^2 - 5ga. \quad (10) \end{aligned}$$

$$\text{Using (1), we have } w^2 = v_1^2 - 4ga \quad (10)$$

$$= u^2 - 9ga. \quad (5)$$

$\underline{F} = m\underline{a}$   $\downarrow$  at  $F$ :

$$mg - S = m \frac{w^2}{a} \quad (5)$$

$$\therefore S = mg - \frac{m}{a}(u^2 - 9ga)$$

$$= \frac{m}{a}(10ag - u^2) \quad (5)$$

45
----



13. One end of a light elastic string of natural length  $4a$  is attached to a fixed point  $O$  and the other end to a particle  $P$  of mass  $m$ . The particle hangs in equilibrium at a distance  $5a$  below  $O$ .

Show that the modulus of elasticity of the string is  $4mg$ .

Now, another particle  $Q$  of mass  $m$  moving vertically upwards collides and coalesces with  $P$ , and form a combined particle  $R$ . The speed of the particle  $Q$  just before it collides with the particle  $P$  is  $\sqrt{2kga}$ . Find the velocity with which  $R$  begins to move.

Show that, in the subsequent motion while the string is not slack, the distance  $x$  from  $O$  to the combined particle  $R$  satisfies the equation  $\ddot{x} + \frac{g}{2a}(x - 6a) = 0$ .

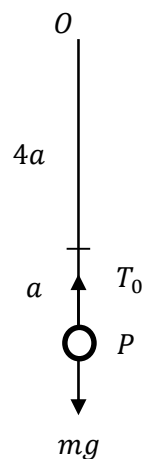
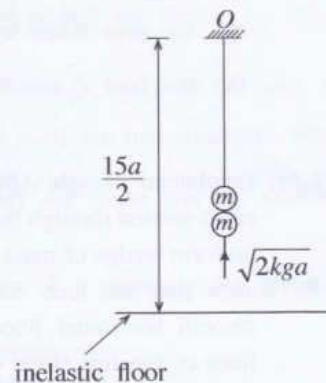
By writing  $X = x - 6a$ , show that,  $\ddot{X} + w^2X = 0$  where  $w = \sqrt{\frac{g}{2a}}$ .

Find the centre of the above simple harmonic motion and using the formula  $\dot{X}^2 = w^2(c^2 - X^2)$ , find the amplitude  $c$ .

Show that if  $k > 3$ , then the string becomes slack,

Now, let  $k = 8$ . Find the time taken by the combined particle  $R$  to strike an **inelastic horizontal floor** at a distance  $\frac{15a}{2}$  below the point  $O$ , from the instant of coalescing of the particles  $P$  and  $Q$ .

Also, find the maximum height reached by the combined particle  $R$  after striking the floor.



For the equilibrium of  $P$ ,

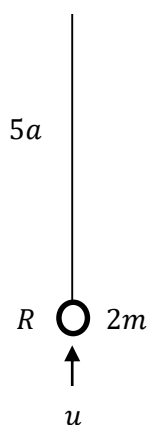
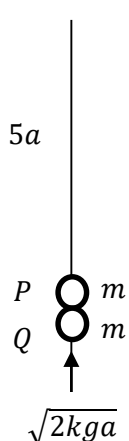
$$\uparrow T_0 = mg \quad (5)$$

$$T_0 = \frac{\lambda a}{4a} = \frac{\lambda}{4} \quad (5)$$

$$\therefore \lambda = 4mg$$

(5)

15

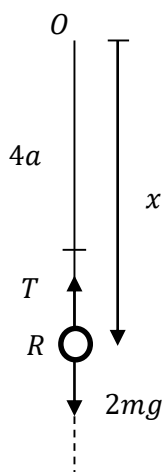


Applying  $\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$  for P and Q:

$$\uparrow 0 = 2mu - m\sqrt{2kga} \quad (5)$$

$$\therefore u = \sqrt{\frac{kga}{2}} \quad (5)$$

10



Applying  $\underline{F} = m\underline{a}$  for R:

$$\uparrow T - 2mg = -2m\ddot{x} \quad (10)$$

$$T = 4mg \frac{(x - 4a)}{4a} \quad (5)$$

$$\therefore \frac{mg}{a}(x - 4a) - 2mg = -2m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{2a}(x - 6a) = 0 \quad (1) \quad (5)$$

20

$$X = x - 6a$$

$$\therefore \dot{X} = \dot{x}$$

$$\therefore \ddot{X} = \ddot{x} \quad (5)$$

$$\text{Then (1)} \Rightarrow \ddot{X} + \omega^2 X = 0, \text{ where } \omega = \sqrt{\frac{g}{2a}}. \quad (5)$$

10

Centre is given by  $X = 0$ .

i.e.  $x = 6a$ . (5)

$$\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2) \quad (2)$$

When  $x = 5a$ , we have  $X = -a$  and  $\dot{X} = -\frac{1}{2}\sqrt{2kga}$ . (5)

Then (2)  $\Rightarrow \frac{kga}{2} = \frac{g}{2a}(c^2 - a^2)$ .

$$\Rightarrow ka^2 = c^2 - a^2.$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{k+1} a. \quad (5)$$

15

Let  $k > 3$ . Then,  $c > 2a$ .

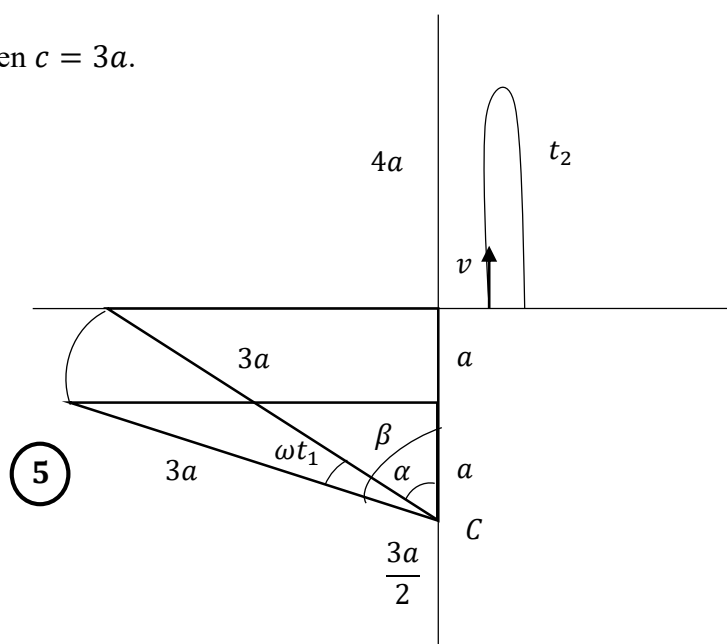
$\therefore$  Amplitude  $> 2a$ . (5)

$\therefore$  the string becomes slack. (5)

10

$$k = 8$$

Then  $c = 3a$ .



$$\cos \beta = \frac{1}{3} \quad (5)$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \quad (5)$$

$$\omega t_1 = \beta - \alpha$$

$$\therefore t_1 = \frac{1}{\omega} (\beta - \alpha) \quad (5)$$

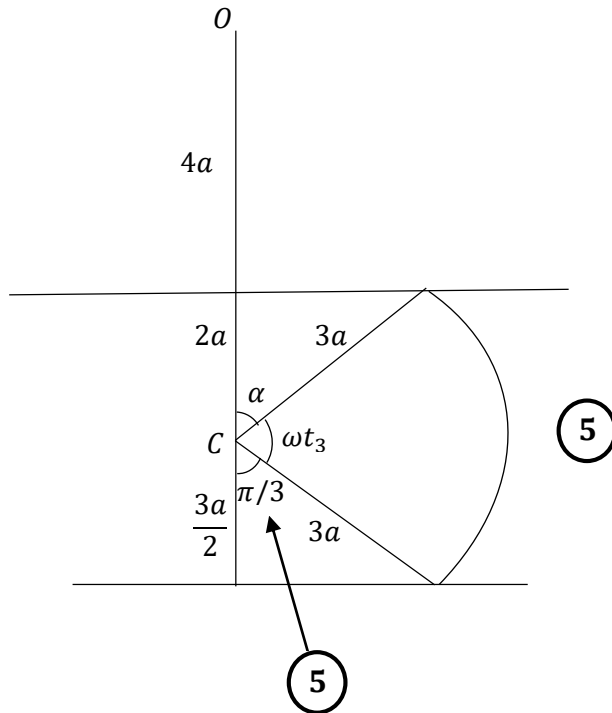
Now,  $v^2 = \frac{g}{2a} (9a^2 - 4a^2)$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{5}{2}ga} \quad (5)$$

Under gravity:  $s = ut + \frac{1}{2}at^2$  (5)

$$0 = vt_2 - \frac{1}{2}gt_2^2.$$

$$\therefore t_2 = \frac{2v}{g} = \frac{2}{g} \sqrt{\frac{5}{2}ga} = \sqrt{\frac{10a}{g}} \quad (5)$$



$$\omega t_3 = \frac{2\pi}{3} - \alpha \quad (5)$$

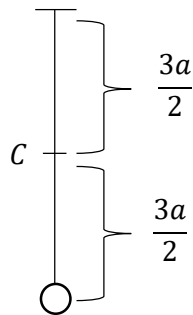
$$\therefore t_3 = \frac{1}{\omega} \left( \frac{2\pi}{3} - \alpha \right)$$

$\therefore$  The required time =  $t_1 + t_2 + t_3$

$$= \frac{1}{\omega} (\beta - \alpha) + \sqrt{\frac{10a}{g}} + \frac{1}{\omega} \left( \frac{2\pi}{3} - \alpha \right)$$

$$= \sqrt{\frac{10a}{g}} + \sqrt{\frac{2a}{g}} \left\{ \frac{2\pi}{3} + \cos^{-1} \left( \frac{1}{3} \right) - 2 \cos^{-1} \left( \frac{2}{3} \right) \right\} \quad (10)$$

60



After hitting the floor,  $R$  performs only simple harmonic motion. (5)

$$\begin{aligned} \therefore \text{The maximum height} &= \frac{3a}{2} + \frac{3a}{2} \\ &= 3a \quad (5) \end{aligned}$$

10

14. (a) Let  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$  be non-zero and non-parallel vectors, and  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

Show that if  $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , then  $\lambda = 0$  and  $\mu = 0$ .

Let  $ABC$  be a triangle. The mid-point of  $AB$  is  $D$  and the mid-point of  $CD$  is  $E$ . The lines  $AE$  (extended) and  $BC$  meet at  $F$ . Let  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$  and  $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ . Using the triangle law of addition, show that  $\overrightarrow{AE} = \frac{\mathbf{a} + 2\mathbf{b}}{4}$ .

Explain why  $\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AE}$  and  $\overrightarrow{CF} = \beta\overrightarrow{CB}$ , where  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Considering the triangle  $ACF$ , show that  $(\alpha - 4\beta)\mathbf{a} + 2(\alpha + 2\beta - 2)\mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

Hence, find the values of  $\alpha$  and  $\beta$ .

- (b) Let  $ABC$  be an equilateral triangle of sides  $2a$  and let  $D, E, F$  be the mid points of  $AB, BC$  and  $AC$  respectively. Forces of magnitudes  $2P, \sqrt{3}P, 2\sqrt{3}P$  and  $\alpha P$  act respectively along  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DC}$  and  $\overrightarrow{BC}$ . It is given that the resultant of this system of forces is acting parallel to  $\overrightarrow{AC}$ . Find the value of  $\alpha$ .

The system of forces is equivalent to a single force of magnitude  $R$  acting through  $A$  together with a couple of magnitude  $G$ . Find the values of  $R$  and  $G$ .

Write down the magnitude and the direction of the resultant of this system of forces and find the distance from  $A$  to the point at which the line of action of the resultant meets  $AB$ .

A couple of magnitude  $H$  is now added to the system. The resultant of this new system acts through the point  $B$ . Find the value of  $H$  and the sense of this couple.

(a)

$$\underline{a}, \underline{b} \neq \underline{0} \text{ and } \underline{a} \nparallel \underline{b}$$

$$\lambda\underline{a} + \mu\underline{b} = \underline{0} \text{ (1)}$$

$$\text{If } \lambda \neq 0, \text{ then } \underline{a} = -\frac{\mu}{\lambda}\underline{b}. \quad (5)$$

This contradicts the given condition.

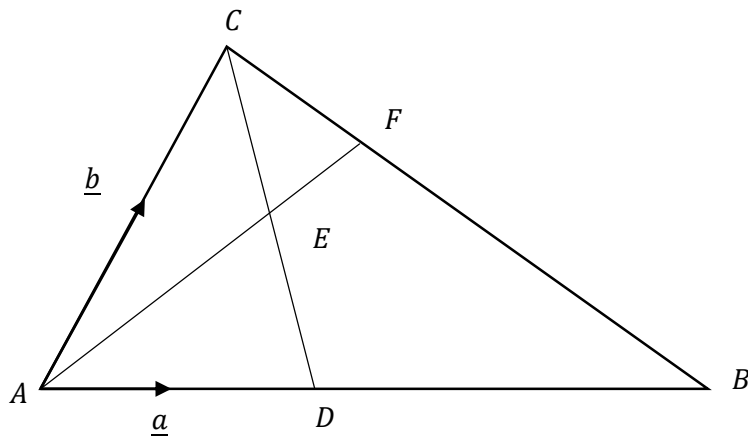
$$\therefore \lambda = 0. \quad (5)$$

Now, (1) gives us  $\mu\underline{b} = \underline{0}$

$$\underline{b} \neq \underline{0} \quad \mu = 0 \quad (5)$$

$$\therefore \lambda = 0 \text{ and } \mu = 0$$

15



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} && \textcircled{5} \\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} && \textcircled{5} \\ &= \frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) && \textcircled{5} \\ &= \frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\underline{a} + \underline{b}\right) \\ &= \frac{\underline{a} + 2\underline{b}}{4}. && \textcircled{5} \end{aligned}$$

20

$$AF \parallel AE \text{ (or } A, E, F \text{ are collinear)} \quad \textcircled{5}$$

$$CF \parallel CB \text{ (or } C, F, B \text{ are collinear)} \quad \textcircled{5}$$

10

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} && \textcircled{5} \\ \therefore \alpha\overrightarrow{AE} &= \underline{b} + \beta\overrightarrow{CB} \\ \therefore \alpha\left(\frac{\underline{a} + 2\underline{b}}{4}\right) &= \underline{b} + \beta(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) && \textcircled{5} \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha \underline{a} + 2\alpha \underline{b} = 4\underline{b} + 4\beta(-\underline{b} + \underline{a})$$

$$\therefore (\alpha - 4\beta)\underline{a} + (2\alpha + 4\beta - 4)\underline{b} = \underline{0} \quad (5)$$

$\underline{a}, \underline{b} \neq 0$  and  $\underline{a} \nparallel \underline{b}$  give us,

$$\alpha - 4\beta = 0 \text{ or } 2\alpha + 4\beta - 4 = 0$$

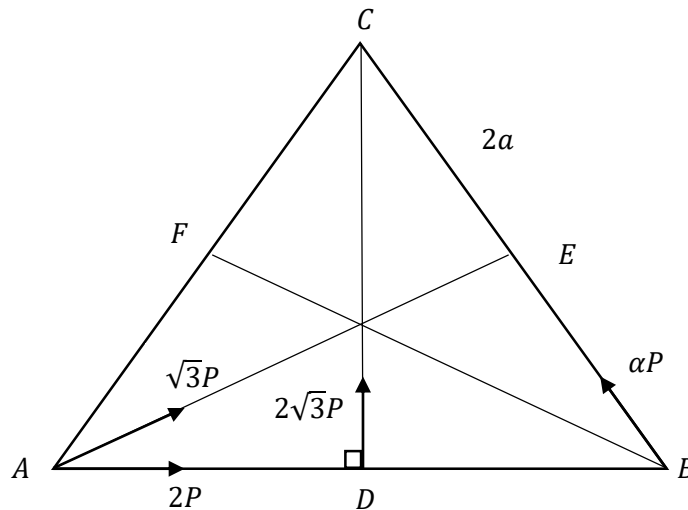
$$\therefore \alpha = \frac{4}{3} \text{ and } \beta = \frac{1}{3}$$

(5)

(5)

25

(b)



$$\rightarrow X = 2P + \sqrt{3}P \cos \frac{\pi}{6} - \alpha P \cos \frac{\pi}{3} \quad (5)$$

$$= 2P + \frac{3P}{2} - \frac{\alpha P}{2}$$

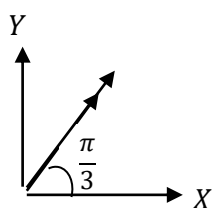
$$= \frac{1}{2}(7 - \alpha)P$$

$$\uparrow Y = \sqrt{3}P \sin \frac{\pi}{6} + 2\sqrt{3}P + \alpha P \sin \frac{\pi}{3} \quad (5)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}P + 2\sqrt{3}P + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha P$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(5 + \alpha)P$$





$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{Y}{X} \quad (5)$$

$$\therefore Y = \sqrt{3}X$$

$$\text{i.e. } \frac{\sqrt{3}}{2}(5 + \alpha)P = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}(7 - \alpha)P$$

$$\therefore \alpha = 1 \quad (5)$$

20

OR

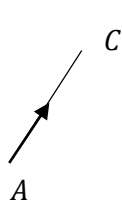
10

$$\alpha P \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\sqrt{3}P \left( \frac{1}{2} \right) - \sqrt{3}P \left( \frac{1}{2} \right) - 2P \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0. \quad (5)$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 + 2 - 2.$$

$$\Rightarrow \alpha = 1. \quad (5)$$

20



$$R = \sqrt{3}P \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2P \left( \frac{1}{2} \right) + 2\sqrt{3}P \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + P \left( \frac{1}{2} \right) \quad (10)$$

$$= \frac{3P}{2} + \frac{2P}{2} + \frac{6P}{2} + \frac{P}{2}$$

$$= 6P.$$

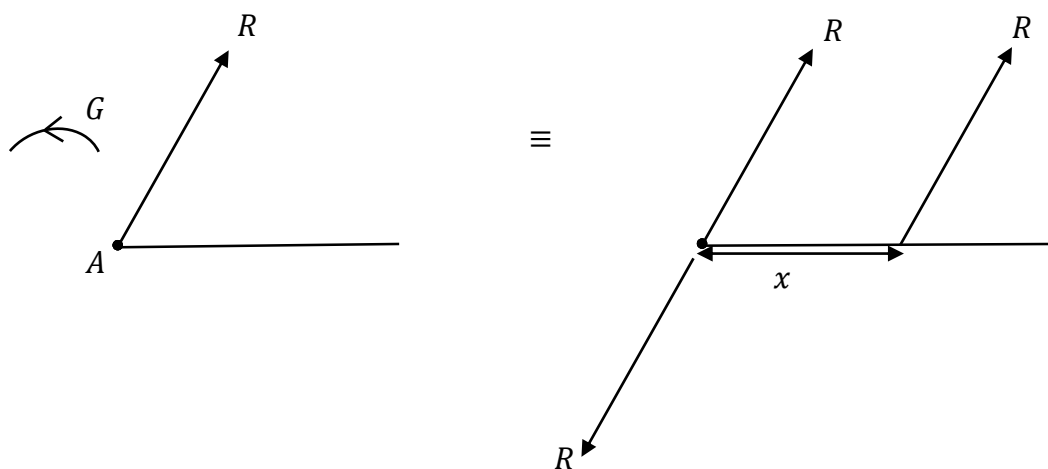
(5)

$$\vec{A}; G = 2\sqrt{3}P \cdot a + P \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 2a \quad (5)$$

$$G = 2\sqrt{3}Pa \left( 1 + \frac{1}{2} \right)$$

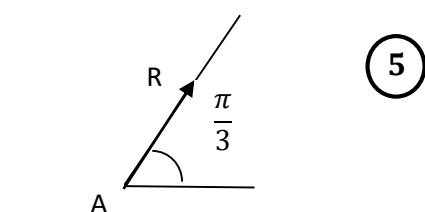
$$G = 3\sqrt{3}Pa \quad (5)$$

25



Magnitude of the resultant =  $R = 6P$  (5)

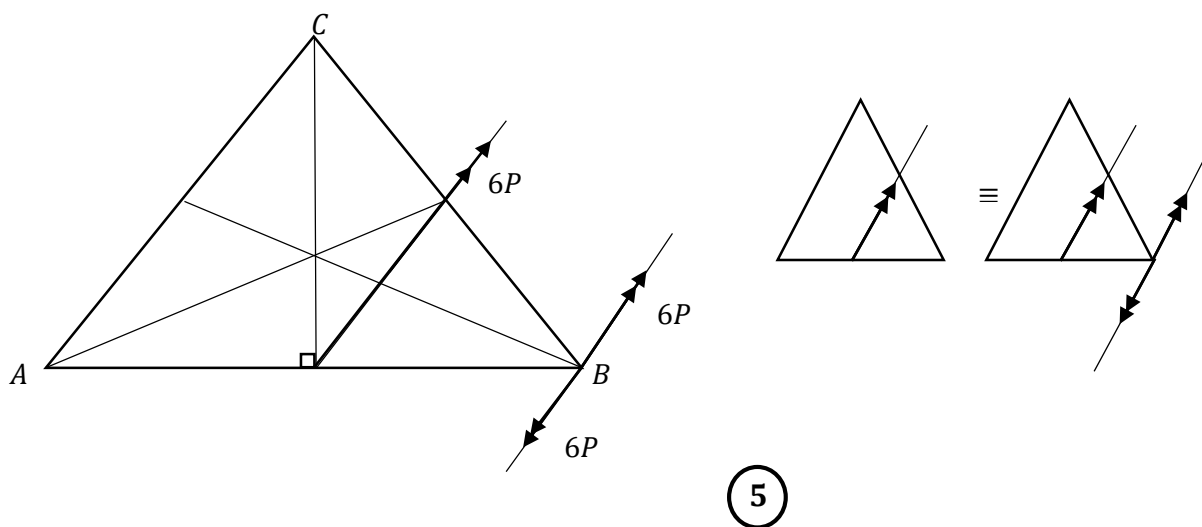
Direction:



$A; 3\sqrt{3}Pa = 6P \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x$  (5)

$\therefore x = a$  (5)

20



(5)

$$\curvearrowright H = 6P \cdot a \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 3\sqrt{3}Pa \quad (5)$$

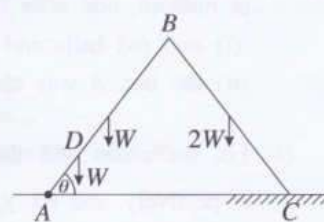
Counterclockwise sense

$$\curvearrowleft (5)$$

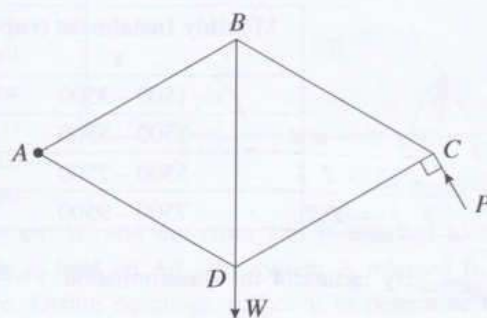
15

---

15.(a) Two uniform rods  $AB$  and  $BC$ , each of length  $2a$ , are smoothly joined at the end  $B$ . The weights of the rods  $AB$  and  $BC$  are  $W$  and  $2W$ , respectively. The end  $A$  is smoothly hinged to a fixed point on a horizontal floor. A particle of weight  $W$  is attached to the point  $D$  on rod  $AB$  such that  $AD = \frac{a}{2}$ . The system is in equilibrium in a vertical plane such that  $\hat{BAC} = \theta$  and the end-point  $C$  of the rod  $BC$  on a rough portion of the above horizontal floor, as shown in the figure. The coefficient of friction between the rod  $BC$  and the floor is  $\mu$ . Show that  $\cot \theta \leq \frac{15}{7}\mu$ . Find the reaction exerted on  $AB$  by  $CB$  at the joint  $B$ .



(b) The framework shown in the figure consists of five light rods  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  and  $DB$  of equal lengths smoothly joined at their ends. A load  $W$  is suspended at the joint  $D$  and the framework is smoothly hinged at  $A$  to a fixed point and kept in equilibrium in a vertical plane with  $BD$  vertical by a force  $P$  applied to it at the joint  $C$  and perpendicular to the rod  $CD$ , in the direction shown in the figure.

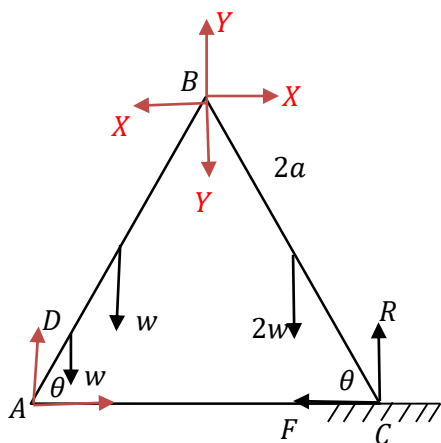


(i) Find the value of  $P$ .

(ii) Draw a stress diagram using Bow's notation for the joints  $C$ ,  $B$  and  $D$ .

Hence, find the stresses in the rods, stating whether they are tensions or thrusts.

(a)



For the system;



$$R \cdot 4a \cos \theta - w \left( \frac{a}{2} \cos \theta + a \cos \theta \right) - 2w(2a \cos \theta + a \cos \theta) = 0$$

(15)

$$\therefore 4R = \frac{3}{2}w + 6w$$

$$R = \frac{15}{8}w.$$

$BC$ :

$$B \curvearrowright 2wa \cos \theta + F2a \sin \theta - R \cdot 2a \cos \theta = 0 \quad (10)$$

$$\therefore w + F \tan \theta = R$$

$$\therefore F \tan \theta = \frac{15}{8}w - w.$$

$$\therefore F = \frac{7}{8}w \cot \theta. \quad (5)$$

For the Equilibrium,

$$\mu \geq \frac{F}{R}.$$

$$\frac{7}{8}w \cot \theta \leq \mu \frac{15}{8}w$$

$$\cot \theta \leq \frac{15}{7}\mu. \quad (5)$$

45

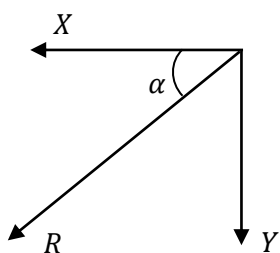
$$\leftarrow BC: \quad X = F = \frac{7}{8}w \cot \theta \quad (5)$$

$$\uparrow R + Y = 2w \quad (5)$$

$$Y = 2w - R$$

$$= 2w - \frac{15}{8}w$$

$$= \frac{w}{8} \quad (5)$$



$$R^2 = X^2 + Y^2$$

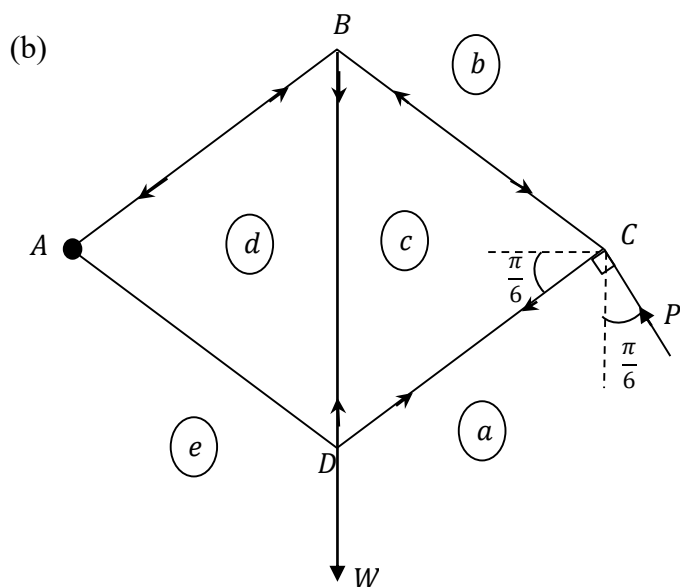
$$= \frac{49}{64}w^2 \cot^2 \theta + \frac{w^2}{64}$$

$$R = \frac{w}{8} \sqrt{1 + 49 \cot^2 \theta} \quad (5)$$

$$\tan \alpha = \frac{Y}{X} = \frac{w/8}{7w/8 \cot \theta} = \frac{\tan \theta}{7}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{\tan \theta}{7} \right) \quad (5)$$

20

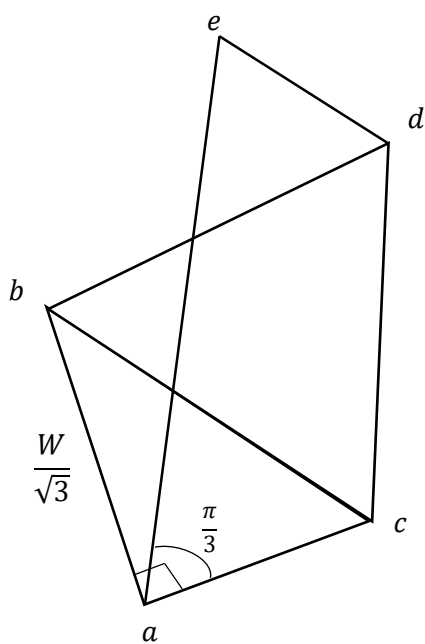


$$\sum \tau_A = P \cos \frac{\pi}{6} \cdot 2x - Wx = 0 \quad (5)$$

(Here  $AC = 2x$ )

$$\therefore P = \frac{W}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

10



$$(10) + (10) + (10)$$

Each Joint (10)

30

Rod	Tension	Thrust
$AB$		$\frac{2W}{3}$
$BC$		$\frac{2W}{3}$
$CD$	$\frac{W}{3}$	
$DA$	$\frac{W}{3}$	
$BD$	$\frac{2W}{3}$	

magnitude - (5) each

Tension/Thrust (15)

All 5 correct (15)

4 correct (10)

3 correct (5)

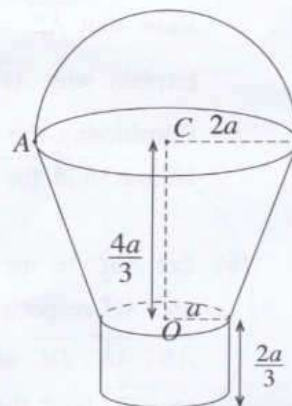
50

16. Show that the centre of mass of

- (i) a thin uniform wire in the shape of a semi-circular arc of radius  $a$ , is at a distance  $\frac{2a}{\pi}$  from its centre,
- (ii) a uniform hollow right circular cone of height  $h$  is at a distance  $\frac{1}{3}h$  from the centre of the base of the cone.

A bucket is made by rigidly fixing to a uniform thin shell in the shape of a frustum of hollow right circular cone of radii of the upper and lower circular rims  $2a$  and  $a$ , respectively and height  $\frac{4a}{3}$  the following parts at the places each meets this shell as shown in the figure:

- A uniform thin circular plate of radius  $a$  and centre at  $O$ .
- A uniform thin shell in the shape of a hollow right circular cylinder of radius  $a$  and height  $\frac{2a}{3}$ .
- A uniform thin wire in the shape of a semi-circle of radius  $2a$  and centre at  $C$ .



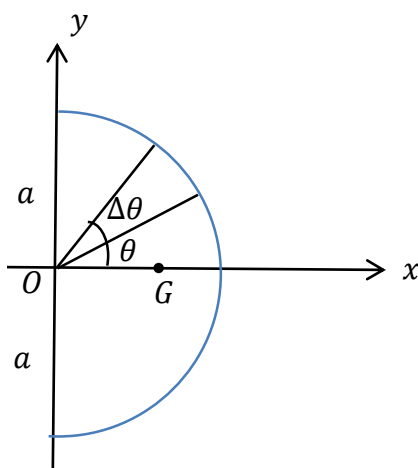
The mass per unit area of the frustum, plate and the cylinder is  $\sigma$  and the mass per unit length of the wire is  $11a\sigma$ .

Show that the distance from  $O$  to the centre of mass of the bucket is  $(10\pi + 27)\frac{a}{9\pi}$ .

Find the angle  $OC$  makes with the downward vertical in the equilibrium position, when the bucket is hung freely by a vertical string from the point  $A$  at which the wire meets the upper rim of the frustum.

(i)

Semi-circular wire



By Symmetry, centre of mass  $G$  lies on  $x$  -axis. (5)

$\Delta m = a\Delta\theta\rho$ , where  $\rho$  is the mass per unit length.

Let  $OG = \bar{x}$ .

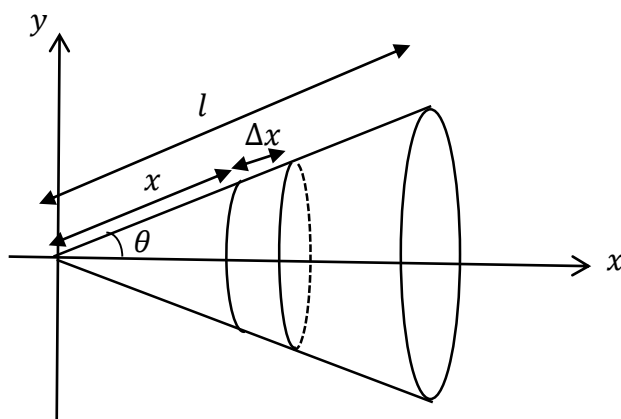


Then

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\rho \cos \theta d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\rho d\theta} = \frac{a \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}{\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}} = \frac{2a}{\pi}$$

30

(ii)



By Symmetry, centre of mass  $G$  lies on  $x$  -axis. (5)

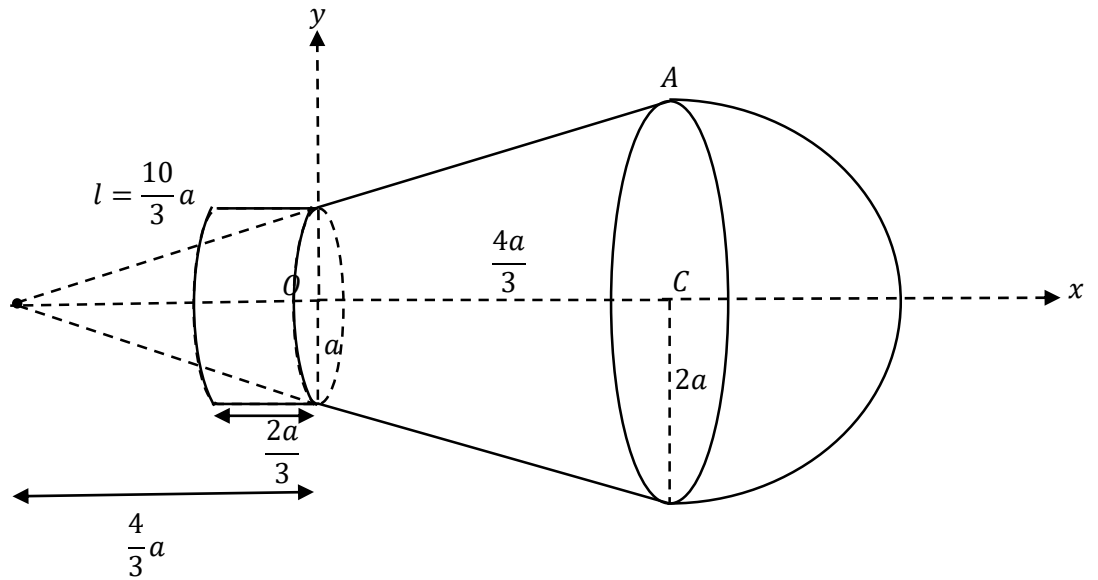
$$h = l \cos \theta$$


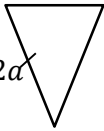

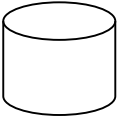

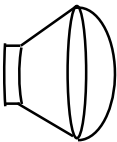
$\Delta m = 2\pi(x \sin \theta)\Delta x\sigma$ , where  $\sigma$  is the mass per unit length.

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_0^l x \cos \theta 2\pi\sigma x \sin \theta dx}{\int_0^l 2\pi\sigma x \sin \theta dx} = \frac{\cos \theta \int_0^l x^2 dx}{\int_0^l x dx} = \frac{h/2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^l}{\frac{x^2}{2} \Big|_0^l} = \frac{2h}{3}$$

$\therefore$  The required distance =  $\frac{h}{3}$ .

30



Object	Mass	Distance from $O(\uparrow)$	
	$\pi(2a)(11a\sigma)$ $= 22\pi a^2\sigma$ (5)	$\frac{4}{3}a + 2\frac{(2a)}{\pi} = \frac{4}{3}a + \frac{4a}{\pi}$	(5)
	$\pi(2a)\left(\frac{10}{3}a\right)\sigma$ $= \frac{20}{3}\pi a^2\sigma$ (5)	$\left[\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}a\right) - \frac{4}{3}a\right] = \frac{4}{9}a$	(5)
	$\pi(a)\left(\frac{5}{3}a\right)\sigma$ $= \frac{5}{3}\pi a^2\sigma$ (5)	$-\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}a\right) = -\frac{4}{9}a$	(5)
	$2\pi a\left(\frac{2}{3}a\right)\sigma$ $= \frac{4}{3}\pi a^2\sigma$ (5)	$-\frac{1}{3}a$	(5)
	$\pi a^2\sigma$	0	(5)
	$22\pi a^2\sigma + \frac{20}{3}\pi a^2\sigma + \frac{5}{3}\pi a^2\sigma$ $+ \frac{4}{3}\pi a^2\sigma$ $= \frac{88}{3}\pi a^2\sigma$ (5)	$\bar{x}$	

By symmetry, centre of mass lies on the  $x$  -axis. (5)

$$\frac{88}{3}\pi a^2\sigma\bar{x} = 22\pi a^2\sigma\left(\frac{4}{3}a + \frac{4a}{\pi}\right) + \frac{20}{3}\pi a^2\sigma\left(\frac{4}{9}a\right) - \frac{5}{3}\pi a^2\sigma\left(-\frac{4}{9}a\right) + \frac{4}{3}\pi a^2\sigma\left(-\frac{1}{3}a\right)$$

$$\frac{88}{3}\bar{x} = 4a\left(\frac{22}{3} + \frac{22}{\pi} + \frac{20}{27} + \frac{5}{27} - \frac{1}{9}\right) \quad (15)$$

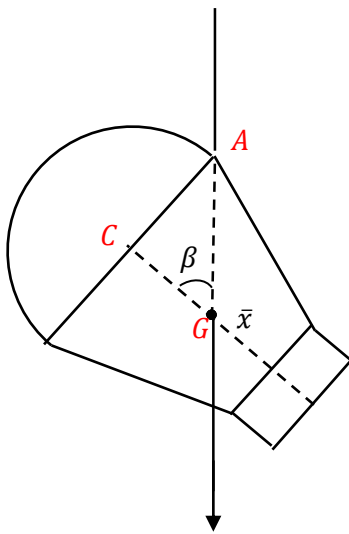
$$\underbrace{\frac{22}{27} + \frac{5}{27}}_{\frac{22}{27}}$$

$$\frac{88}{3}\bar{x} = 22 \times 4a\left(\frac{10}{27} + \frac{22}{\pi}\right)$$

$$\frac{88}{3}\bar{x} = 88a\left(\frac{(10\pi + 27)}{27\pi}\right)$$

$$\bar{x} = \frac{a}{9\pi}(10\pi + 27) \quad (5)$$

75



(5)

$$\tan \beta = \frac{AC}{CG} = \frac{2a}{\frac{4}{3}a - \bar{x}} \quad (5)$$

$$= \frac{18\pi}{27 - 2\pi} \quad (5)$$

$$\therefore \beta = \tan^{-1}\left(\frac{18\pi}{27 - 2\pi}\right)$$

15

17.(a) Two identical boxes  $A$  and  $B$ , each contains 10 balls which are identical in all respects except for their colour. The box  $A$  contains 6 white balls and 4 red balls, and the box  $B$  contains 8 white balls and 2 red balls. A box is chosen at random and 3 balls are drawn from that box at random, one after the other, without replacement. Find the probability that

- (i) two red balls and one white ball are drawn,
- (ii) the box  $A$  was chosen, given that two red balls and one white ball are drawn.

(b) Let the mean and the standard deviation of the set of data  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  be  $\bar{x}$  and  $\sigma_x$  respectively, and let  $y_i = \frac{x_i - \alpha}{\beta}$  for  $i = 1, 2, \dots, n$  where  $\alpha$  and  $\beta$  ( $>0$ ) are real constants. Show that  $\bar{y} = \frac{\bar{x} - \alpha}{\beta}$  and  $\sigma_y = \frac{\sigma_x}{\beta}$ , where  $\bar{y}$  and  $\sigma_y$  are respectively the mean and the standard deviation of the set of data  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ .

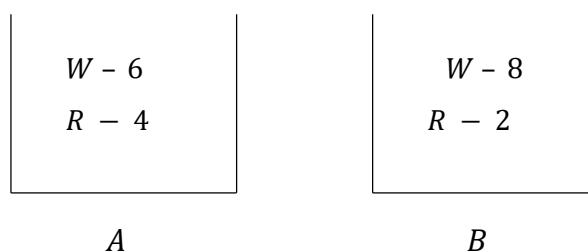
Monthly instalments for an insurance scheme by 100 employees of a company are given in the following frequency table:

Monthly Instalment (rupees) $x$	Number of employees
1500 – 3500	30
3500 – 5500	40
5500 – 7500	20
7500 – 9500	10

By means of the transformation  $y = \frac{x - 500}{1000}$ , estimate the mean and the standard deviation of  $y$ , and also the coefficient of skewness of  $y$  defined by  $\frac{3(\text{mean} - \text{median})}{\text{standard deviation}}$ .

**Hence**, estimate the mean, the standard deviation and the coefficient of skewness of  $x$ .

(a)



Let  $X$  be the event that two red balls and one white ball are drawn.

(i)  $P(X) = P(X|A)P(A) + P(X|B)P(B)$  \_\_\_\_\_ (1) 5

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}. \quad \text{⑤}$$

$$\begin{aligned}
 P(X|A) &= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \\
 &= \frac{3}{10} \cdot \textcircled{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(X|B) &= \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} \times \frac{8}{8} + \frac{2}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} + \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} \\
 &= \frac{1}{15} \cdot \textcircled{5}
 \end{aligned}$$

Now (1) given as,

$$P(X) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{60} \textcircled{5}$$

55

(ii)

$$P(A|X) = \frac{P(X|A)P(A)}{P(X)} \textcircled{5} \quad [\text{or Bayes' theorem}]$$

$$= \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{2}}{\frac{11}{60}}$$

$$= \frac{9}{11} \textcircled{5}$$

10

(b)

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \quad (5)$$

$$y_i = \frac{x_i - \alpha}{\beta}$$

$$= \frac{1}{n\beta} \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)$$

$$= \frac{1}{n\beta} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i - n\alpha \right\}$$

$$= \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \alpha \right\}$$

$$= \frac{\bar{x} - \alpha}{\beta} \quad (5)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \alpha}{\beta} - \frac{\bar{x} - \alpha}{\beta} \right)^2$$

$$= \frac{1}{n\beta^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{\beta^2}$$

$$\therefore \sigma_y = \frac{\sigma_x}{\beta} \quad (5) \quad (\because$$

Class Interval $x$	$f$	Class Interval $y$	Mid-point $y$	$fy$	$fy^2$
1500-3500	30	1-3	2	60	120
3500-5500	40	3-5	4	160	640
5500-7500	20	5-7	6	120	720
7500-9500	10	7-9	8	80	640
				$\sum fy = 420$	$\sum fy^2 = 2120$

$$\bar{y} = \frac{\sum fy}{\sum f} = \frac{420}{100} = 4.2 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \sqrt{\frac{\sum fy^2}{\sum f} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{2120}{100} - 4.2^2} \\ &= \sqrt{21.2 - 17.64} \\ &= \sqrt{3.56} \approx 1.887 \end{aligned} \quad (5)$$

Let  $M_y =$  Median of  $y = 50^{\text{th}}$  data

Then

$$M_y = 3 + \frac{(50 - 30)}{(5 - 3)}(5 - 3) = 4 \quad (5)$$

$$\therefore \text{The coefficient of skewness: } y \approx \frac{3(4.2 - 4)}{\sqrt{3.56}} \approx 0.317$$

(5)

50



$$\begin{aligned}\bar{x} &= 1000\bar{y} + 500 \\ &= 1000 \times 4.2 + 500 \\ &= 4700 \quad (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 1000 \sigma_y \\ &\approx 1000 \times 1.887 \\ &= 1887 \quad (5)\end{aligned}$$

The coefficient of skewness does not change.

$$S_x = S_y \approx 0.317 \quad (5)$$

15

---

